Actions isométriques affines sur des espaces de Banach et généralisation de la structure d'espace à murs mesurés

Conférence "Parole aux jeunes chercheurs" - Nice

Sylvain Arnt

LMPT - Université de Tours

26 Novembre 2015

Actions isométriques affines

Soit G un groupe de type fini.

Une action isométrique affine de G sur un espace de Banach B est un morphisme $\alpha : G \to \mathrm{Isom}(B) \cap \mathrm{Aff}(B)$; une telle action est caractérisée par la décomposition suivante : pour tout $g \in G$, $x \in B$,

$$\alpha(g)x = \pi(g)x + b(g),$$

où π est une représentation isométrique et b satisfait : $b(gh) = \pi(g)b(h) + b(g)$.

Soit G un groupe de type fini.

Une action isométrique affine de G sur un espace de Banach B est un morphisme $\alpha : G \to \mathrm{Isom}(B) \cap \mathrm{Aff}(B)$; une telle action est caractérisée par la décomposition suivante : pour tout $g \in G$, $x \in B$,

$$\alpha(g)x = \pi(g)x + b(g),$$

où π est une représentation isométrique et b satisfait : $b(gh) = \pi(g)b(h) + b(g)$.

Définition

Une action par isométries de G sur une espace pseudo-métrique (X, d) est dite (métriquement) propre, pour tout $x \in X$ tel que :

$$d(gx, x) \underset{g\to\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

Une action isométrique affine α est propre si, et seulement si,

$$\|b(g)\|_B \underset{g\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$$

.

Définition (Propriété de Haagerup et propriété $P\mathcal{B}$)

Un groupe G a la **propriété de Haagerup** *(ou est a-(T)-moyennable) s'il existe une action isométrique affine propre de G sur un espace de Hilbert.*

Définition (Propriété de Haagerup et propriété $P\mathcal{B}$)

Un groupe G a la **propriété de Haagerup** *(ou est a-(T)-moyennable) s'il existe une action isométrique affine propre de G sur un espace de Hilbert.*

Plus généralement, pour $\mathcal{B}$ une classe d'espace de Banach :

un groupe G a la **propriété** *$P\mathcal{B}$ s'il existe une action isométrique affine propre de G sur un espace $B \in \mathcal{B}$.*

Pour $p \in [1, +\infty]$ fixé et $\mathcal{B} =$ classe des espaces L^p, on parlera de propriété PL^p.

Définition (Propriété de Haagerup et propriété $P\mathcal{B}$)

Un groupe G a la **propriété de Haagerup** *(ou est a-(T)-moyennable) s'il existe une action isométrique affine propre de G sur un espace de Hilbert.*

Plus généralement, pour $\mathcal{B}$ une classe d'espace de Banach :

un groupe G a la **propriété** *$P\mathcal{B}$ s'il existe une action isométrique affine propre de G sur un espace $B \in \mathcal{B}$.*

Pour $p \in [1, +\infty]$ fixé et $\mathcal{B} =$ classe des espaces L^p, on parlera de propriété PL^p.

(1)	Haagerup ($=PL^2$)	$\Rightarrow$	PL^p pour tout $1 \leq p < \infty$
(2)	PL^p pour un certain $1 \leq p \leq 2$	$\Leftrightarrow$	Haagerup
(3)	PL^p pour un certain $p > 2$	$\not\Rightarrow$	Haagerup
(4)	PL^p pour un certain $p > 2$	$\underset{??}{\Rightarrow}$	PL^q pour tout $q > p$

- Exemples de groupes possédant la propriété de Haagerup :

  - groupes moyennables ;
  - groupes libres ;
  - groupes de Coxeter,
  - $SL_2(\mathbb{Z})$...

- Exemples de groupes possédant la propriété de Haagerup :

  - groupes moyennables ;
  - groupes libres ;
  - groupes de Coxeter,
  - $SL_2(\mathbb{Z})$...

- Exemples de groupes possédant la propriété PL^p :

  - groupes hyperboliques au sens de Gromov, pour tout $p \geq p_0 \geq 2$ (Yu) ;
  - $Sp(n, 1)$, pour tout $p > 4n + 2$ (Cornulier-Tessera-Valette)...

- Exemples de groupes possédant la propriété de Haagerup :

  - groupes moyennables ;
  - groupes libres ;
  - groupes de Coxeter,
  - $SL_2(\mathbb{Z})$...

- Exemples de groupes possédant la propriété PL^p :

  - groupes hyperboliques au sens de Gromov, pour tout $p \geq p_0 \geq 2$ (Yu) ;
  - $Sp(n,1)$, pour tout $p > 4n+2$ (Cornulier-Tessera-Valette)...

Pour $n \geq 3$, le groupe $SL_n(\mathbb{Z})$ n'a PL^p pour aucun p dans $[1, \infty[$.

La propriété de Haagerup est stable par :
- passage à un sous-groupe fermé ;
- produit/somme directe ;
- produit amalgamé sur un sous-groupe fini ;
- extension par un groupe moyennable ;

La propriété de Haagerup est stable par :

- passage à un sous-groupe fermé ;
- produit/somme directe ;
- produit amalgamé sur un sous-groupe fini ;
- extension par un groupe moyennable ;

mais n'est pas stable par extension en général :
exemple : $\mathbb{Z}^2 \rtimes SL_2(\mathbb{Z})$ n'a pas la propriété de Haagerup.

La propriété de Haagerup est stable par :
- passage à un sous-groupe fermé ;
- produit/somme directe ;
- produit amalgamé sur un sous-groupe fini ;
- extension par un groupe moyennable ;

mais n'est pas stable par extension en général :
exemple : $\mathbb{Z}^2 \rtimes SL_2(\mathbb{Z})$ n'a pas la propriété de Haagerup.

Théorème (Cornulier-Stalder-Valette)

Les groupes G, H ont la propriété de Haagerup si, et seulement si $H \wr G$ a la propriété de Haagerup.

Soit X un ensemble et H un ensemble de parties de X stable par $* : h \mapsto h^c$. On note $W = H/* = \{w = \{h, h^c\} \mid h \in H\}$.

On appelle *murs* de X les éléments de W et *demi-espaces* de X les éléments de H.

Soit X un ensemble et H un ensemble de parties de X stable par $* : h \mapsto h^c$. On note $W = H/* = \{w = \{h, h^c\} \mid h \in H\}$.

On appelle *murs* de X les éléments de W et *demi-espaces* de X les éléments de H.

Pour x, y dans X, on définit l'ensemble des murs séparant x et y :

$$W(x|y) = \{w = \{h, h^c\} \mid x \in h,\ y \in h^c \text{ ou l'inverse}\}.$$

Soit X un ensemble et H un ensemble de parties de X stable par $* : h \mapsto h^c$. On note $W = H/* = \{w = \{h, h^c\} \mid h \in H\}$.

On appelle *murs* de X les éléments de W et *demi-espaces* de X les éléments de H.

Pour x, y dans X, on définit l'ensemble des murs séparant x et y :

$$W(x|y) = \{w = \{h, h^c\} \mid x \in h,\ y \in h^c \text{ ou l'inverse}\}.$$

Définition (Espace à murs)

On dit que (X, W) est un espace à murs si, pour tous x, y dans X, l'ensemble $W(x|y)$ est fini.

Soit X un ensemble et H un ensemble de parties de X stable par $* : h \mapsto h^c$. On note $W = H/* = \{w = \{h, h^c\} \mid h \in H\}$.

On appelle *murs* de X les éléments de W et *demi-espaces* de X les éléments de H.

Pour x, y dans X, on définit l'ensemble des murs séparant x et y :

$$W(x|y) = \{w = \{h, h^c\} \mid x \in h,\ y \in h^c \text{ ou l'inverse}\}.$$

Définition (Espace à murs)

On dit que (X, W) est un espace à murs si, pour tous x, y dans X, l'ensemble $W(x|y)$ est fini.

Métrique des murs sur X : pour x, y dans X,

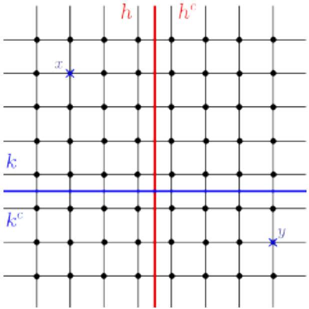
$$d_W(x, y) = \#W(x|y).$$

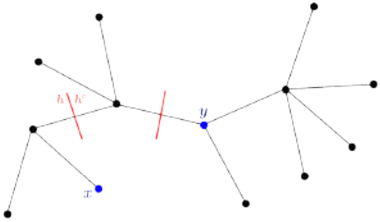
Exemple

- $\mathbb{Z}^n$,
- *les arbres,*
- *les complexes cubiques CAT(0)...*

Exemple

- $\mathbb{Z}^n$,
- *les arbres,*
- *les complexes cubiques CAT(0)...*





Généralisation de la notion d'espace à murs :
Soit X un ensemble, W un ensemble de murs sur X muni d'une structure d'espace mesuré $(W, \mathcal{B}, \mu)$.

Définition (Espace à murs mesurés)

On dit que $(X, W, \mathcal{B}, \mu)$ est un espace à murs mesurés si, pour tous x, y dans X, $W(x|y) \in \mathcal{B}$ et

$$\mu(W(x|y)) < +\infty.$$

Généralisation de la notion d'espace à murs :
Soit X un ensemble, W un ensemble de murs sur X muni d'une structure d'espace mesuré $(W, \mathcal{B}, \mu)$.

Définition (Espace à murs mesurés)

On dit que $(X, W, \mathcal{B}, \mu)$ est un espace à murs mesurés si, pour tous x, y dans X, $W(x|y) \in \mathcal{B}$ et

$$\mu(W(x|y)) < +\infty.$$

Théorème (Cherix-Martin-Valette ; Chatterji-Drutu-Haglund)

Un groupe G a la propriété de Haagerup si, et seulement si, il agit proprement sur une espace à murs mesurés.

Généralisation de la notion d'espace à murs :
Soit X un ensemble, W un ensemble de murs sur X muni d'une structure d'espace mesuré $(W, \mathcal{B}, \mu)$.

Définition (Espace à murs mesurés)

On dit que $(X, W, \mathcal{B}, \mu)$ *est un espace à murs mesurés si, pour tous* x, y *dans* X, $W(x|y) \in \mathcal{B}$ *et*

$$\mu(W(x|y)) < +\infty.$$

Théorème (Cherix-Martin-Valette ; Chatterji-Drutu-Haglund)

Un groupe G *a la propriété de Haagerup si, et seulement si, il agit proprement sur une espace à murs mesurés.*

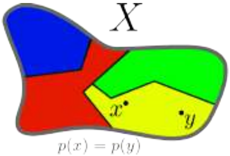
Question

Existe-t-il une structure analogue aux espaces à murs pour la propriété PL^p *?*

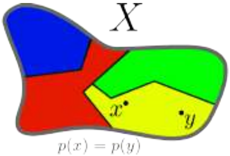
Espaces à partitions pondérées

Soit X un ensemble et $p : X \to \mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ une fonction.

Soit X un ensemble et $p : X \to \mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ une fonction. Pour $x, y \in X$, $x \sim_p y$ si, et seulement si, $p(x) = p(y)$.



Soit X un ensemble et $p : X \to \mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ une fonction. Pour $x, y \in X$, $x \sim_p y$ si, et seulement si, $p(x) = p(y)$.

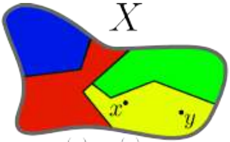


Soit $\mathcal{P}$ un ensemble de fonctions de X dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Pour x, y dans X et p dans $\mathcal{P}$, on note :

$$c(x,y)(p) = p(x) - p(y).$$

La fonction $c : X \times X \to \mathcal{F}(\mathcal{P}, \mathbb{K})$ est appelée *fonction de séparation de X associée à $\mathcal{P}$*.

Soit X un ensemble et $p : X \to \mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ une fonction. Pour $x, y \in X$, $x \sim_p y$ si, et seulement si, $p(x) = p(y)$.



$p(x) = p(y)$

Soit $\mathcal{P}$ un ensemble de fonctions de X dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Pour x, y dans X et p dans $\mathcal{P}$, on note :

$$c(x,y)(p) = p(x) - p(y).$$

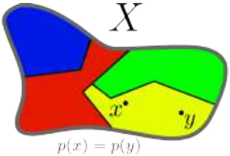
La fonction $c : X \times X \to \mathcal{F}(\mathcal{P}, \mathbb{K})$ est appelée *fonction de séparation de X associée à $\mathcal{P}$*.

Définition

Soit $F(\mathcal{P})$ un espace de Banach de fonctions sur $\mathcal{P}$ à valeurs dans $\mathbb{K}$. On dit que $(X, \mathcal{P}, F(\mathcal{P}))$ est un espace à partitions pondérées si pour tout x, y dans X,

$$c(x,y) \in F(\mathcal{P}).$$

Soit X un ensemble et $p : X \to \mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ une fonction. Pour $x, y \in X$, $x \sim_p y$ si, et seulement si, $p(x) = p(y)$.



Soit $\mathcal{P}$ un ensemble de fonctions de X dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Pour x, y dans X et p dans $\mathcal{P}$, on note :

$$c(x, y)(p) = p(x) - p(y).$$

La fonction $c : X \times X \to \mathcal{F}(\mathcal{P}, \mathbb{K})$ est appelée *fonction de séparation de X associée à $\mathcal{P}$*.

Définition

Soit $F(\mathcal{P})$ un espace de Banach de fonctions sur $\mathcal{P}$ à valeurs dans $\mathbb{K}$. On dit que $(X, \mathcal{P}, F(\mathcal{P}))$ est un espace à partitions pondérées si pour tout x, y dans X,

$$c(x, y) \in F(\mathcal{P}).$$

Métrique des partitions pondérées sur X : pour x, y dans X,

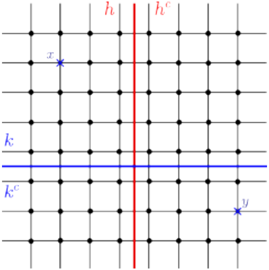
$$d(x, y) = \|c(x, y)\|.$$

Exemple

- *Espaces à murs,*
- *Groupes hyperboliques discrets,*
- *Espaces de Banach.*

Exemple

- *Espaces à murs,*
- *Groupes hyperboliques discrets,*
- *Espaces de Banach.*



On pose $p_h = \mathbb{1}_h$, pour $h \in H$ un demi-espace et $\mathcal{P} = \{p_h \mid h \in H\}$.
Soit $F(\mathcal{P}) := \ell^p(\mathcal{P})$. Alors, pour $x, y \in X$:

$$\|c(x,y)\|_p^p = \sum_{p_h \in \mathcal{P}} |c(x,y)(p_h)|^p = \sum_{h \in H} |\mathbb{1}_h(x) - \mathbb{1}_h(y)|^p = 2\#W(x|y) < +\infty.$$

Théorème (A.)

Un groupe G agit proprement par isométries affines sur une espace de Banach B si, et seulement si, il agit proprement sur un espace à partitions pondérées $(X, \mathcal{P}, F(\mathcal{P}))$.

Théorème (A.)

Un groupe G agit proprement par isométries affines sur une espace de Banach B si, et seulement si, il agit proprement sur un espace à partitions pondérées $(X, \mathcal{P}, F(\mathcal{P}))$.

Remarque

$\Rightarrow$) *On peut choisir $X = G$ et l'espace de Banach $F(\mathcal{P})$ est isomorphe et isométrique à un sous-espace fermé de B.*
$\Leftarrow$) *l'espace de Banach B est un sous-espace fermé de $F(\mathcal{P})$.*

Théorème (A.)

Un groupe G agit proprement par isométries affines sur une espace de Banach B si, et seulement si, il agit proprement sur un espace à partitions pondérées $(X, \mathcal{P}, F(\mathcal{P}))$.

Remarque

$\Rightarrow$) *On peut choisir $X = G$ et l'espace de Banach $F(\mathcal{P})$ est isomorphe et isométrique à un sous-espace fermé de B.*
$\Leftarrow$) *l'espace de Banach B est un sous-espace fermé de $F(\mathcal{P})$.*

Corollaire

Soit $p \geq 1$, $p \neq 4, 6, 8, \ldots$. Le groupe G a la propriété PL^p si, et seulement si, il agit proprement sur un espace à partitions $(X, \mathcal{P}, F(\mathcal{P}))$ où $F(\mathcal{P})$ est isomorphe et isométrique à un sous-espace fermé d'un L^p.

La propriété PL^p (avec $2 < p < \infty$ fixé) est stable par :

- passage à un sous-groupe fermé ;
- produit/somme directe ;

La propriété PL^p (avec $2 < p < \infty$ fixé) est stable par :

- passage à un sous-groupe fermé ;
- produit/somme directe ;

Théorème (A.)

Si G a la propriété de Haagerup et H a la propriété PL^p alors $H \wr G$ a la propriété PL^p.

La propriété PL^p (avec $2 < p < \infty$ fixé) est stable par :

- passage à un sous-groupe fermé ;
- produit/somme directe ;

Théorème (A.)

Si G a la propriété de Haagerup et H a la propriété PL^p alors $H \wr G$ a la propriété PL^p.

Ouvert : stabilité par extension moyennable ; stabilité par produit en couronne en général.

Soit G, H, F des groupes et $\varphi : F \to G$, $\psi : F \to H$ des morphismes. Le produit amalgamé de G et H au dessus de F est défini par :

$$G *_F H := (G * H)/N,$$

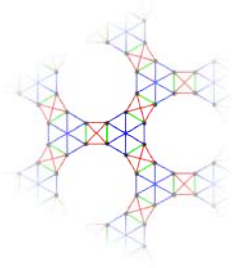
où N est le sous-groupe distingué de $G * F$ engendré par les $\varphi(f)^{-1}\psi(f)$.

Soit G, H, F des groupes et $\varphi : F \to G$, $\psi : F \to H$ des morphismes. Le produit amalgamé de G et H au dessus de F est défini par :

$$G *_F H := (G * H)/N,$$

où N est le sous-groupe distingué de $G * F$ engendré par les $\varphi(f)^{-1}\psi(f)$.

Exemple : $SL_2(\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} *_{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$



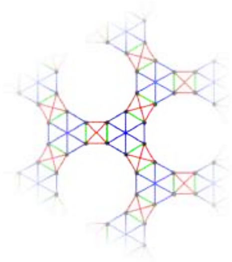
Stabilité par produit amalgamé

Soit G, H, F des groupes et $\varphi : F \to G$, $\psi : F \to H$ des morphismes. Le produit amalgamé de G et H au dessus de F est défini par :

$$G *_F H := (G * H)/N,$$

où N est le sous-groupe distingué de $G * F$ engendré par les $\varphi(f)^{-1}\psi(f)$.

Exemple : $SL_2(\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} *_{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$



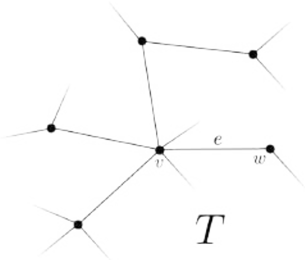
Théorème (A.)

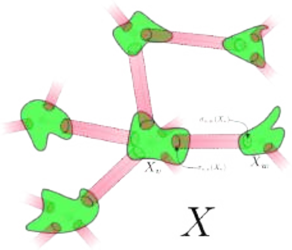
Soit G, H des groupes discrets et F un sous-groupe fini commun. Pour $1 \leq p < \infty$ fixé, G, H ont la propriété PL^p si, et seulement si, $G *_F H$ a la propriété PL^p.

Notion d'arbre d'espaces : Soit $T = (V, \mathbb{E})$ un arbre, $\{X_v\}_{v \in V}$, $\{X_e\}_{e \in \mathbb{E}}$ deux collections d'ensembles non vides telles que $X_e \hookrightarrow X_v$ pour tout sommet v extrémité de l'arête e.

Notion d'arbre d'espaces : Soit $T = (V, \mathbb{E})$ un arbre, $\{X_v\}_{v \in V}$, $\{X_e\}_{e \in \mathbb{E}}$ deux collections d'ensembles non vides telles que $X_e \hookrightarrow X_v$ pour tout sommet v extrémité de l'arête e.

On appelle arbre d'espace le triplet $(T, \{X_v\}, \{X_e\})$ et on définit son espace total X par :

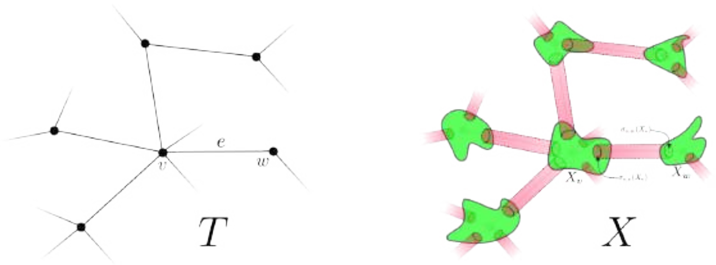




Idées de la preuve

<u>*Notion d'arbre d'espaces :*</u> Soit $T = (V, \mathbb{E})$ un arbre, $\{X_v\}_{v \in V}$, $\{X_e\}_{e \in \mathbb{E}}$ deux collections d'ensembles non vides telles que $X_e \hookrightarrow X_v$ pour tout sommet v extrémité de l'arête e.

On appelle arbre d'espace le triplet $(T, \{X_v\}, \{X_e\})$ et on définit son espace total X par :



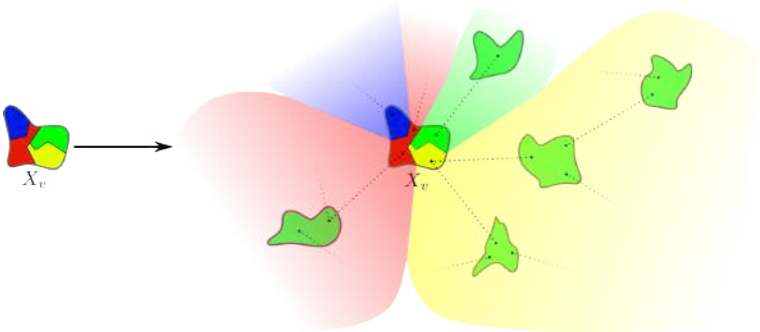
On pourra se restreindre dans la suite au cas simple où les espaces d'arêtes sont des singletons.

Partitions induites par les espaces de sommets

Soit $(T, \{X_v\}, \{\bullet_e\})$ un arbre d'espace. On suppose chaque X_v muni d'une structure d'espace à partitions pondérées.

Soit $(T, \{X_v\}, \{\bullet_e\})$ un arbre d'espace. On suppose chaque X_v muni d'une structure d'espace à partitions pondérées. Chaque fonction de partition p peut être relevée sur l'espace total X via la projection sur X_v :

Soit $(T, \{X_v\}, \{\bullet_e\})$ un arbre d'espace. On suppose chaque X_v muni d'une structure d'espace à partitions pondérées. Chaque fonction de partition p peut être relevée sur l'espace total X via la projection sur X_v :



Soit $\Gamma = G *_F H$ un produit amalgamé. Alors Γ agit sur son arbre de Bass-Serre $T = (V, \mathbb{E})$ défini par :

$$V = \Gamma/G \sqcup \Gamma/H \text{ et } \mathbb{E} = \Gamma/F.$$

Soit $\Gamma = G *_F H$ un produit amalgamé. Alors Γ agit sur son arbre de Bass-Serre $T = (V, \mathbb{E})$ défini par :

$$V = \Gamma/G \sqcup \Gamma/H \text{ et } \mathbb{E} = \Gamma/F.$$

On suppose F fini. Si G, H ont la propriété PL^p, alors :

- $G \curvearrowright (G/F, \mathcal{P}_1, F_1(\mathcal{P}_1))$ proprement et,
- $H \curvearrowright (H/F, \mathcal{P}_2, F_2(\mathcal{P}_2))$ proprement.

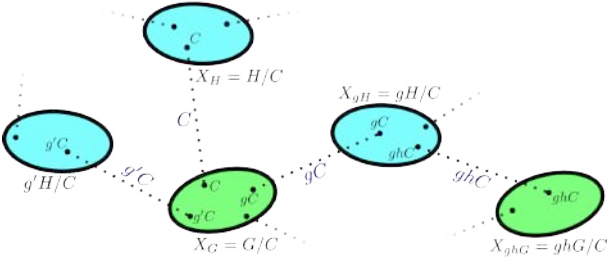
Soit $\Gamma = G *_F H$ un produit amalgamé. Alors Γ agit sur son arbre de Bass-Serre $T = (V, \mathbb{E})$ défini par :

$$V = \Gamma/G \sqcup \Gamma/H \text{ et } \mathbb{E} = \Gamma/F.$$

On suppose F fini. Si G, H ont la propriété PL^p, alors :

- $G \curvearrowright (G/F, \mathcal{P}_1, F_1(\mathcal{P}_1))$ proprement et,
- $H \curvearrowright (H/F, \mathcal{P}_2, F_2(\mathcal{P}_2))$ proprement.

On considère l'arbre d'espaces d'espace total X suivant :



On munit alors X d'une structure d'espace à partitions pondérées $(X, \mathcal{P}, F(\mathcal{P}))$ provenant de : celle induite par les espaces de sommets et celle provenant de l'arbre de Bass-Serre T sous-jacent. De plus,

$$F(\mathcal{P}) \simeq \left(\bigoplus_{\gamma G} F(\mathcal{P}) \oplus \bigoplus_{\gamma H} F'(\mathcal{P}') \oplus \ell^p(\mathbb{E}) \right)_p$$

On munit alors X d'une structure d'espace à partitions pondérées $(X, \mathcal{P}, F(\mathcal{P}))$ provenant de : celle induite par les espaces de sommets et celle provenant de l'arbre de Bass-Serre T sous-jacent. De plus,

$$F(\mathcal{P}) \simeq \left(\bigoplus_{\gamma G} F(\mathcal{P}) \oplus \bigoplus_{\gamma H} F'(\mathcal{P}') \oplus \ell^p(\mathbb{E}) \right)_p$$

Forme normale : tout élément γ de $G *_F H$ s'écrire de manière unique sous la forme :

$$\gamma = g_1 h_1 ... g_n h_n f,$$

où $n \in \mathbb{N}$, $g_i \in \text{rep}(G/F)$, $h_i \in \text{rep}(H/F)$ et $f \in F$.

On a alors, pour $\gamma = g_1 h_1 ... g_n h_n f,$:

$$\|c(\gamma, e_\Gamma)\|^p_{F(\mathcal{P})} = \sum_{i=1}^{n} \left(\|c_1(g_i, e_G)\|^p_{F_1(\mathcal{P}_1)} + \|c_2(h_i, e_H)\|^p_{F_2(\mathcal{P}_2)} \right) + 2n.$$

Merci de votre attention.