Corrigé du devoir surveillé n°2

Exercice 1. *CCP L2 2014*

Le but de l'exercice est de déterminer toutes les fonctions f dérivables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, vérifiant l'égalité :

$$(\star) \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x+y) = f(x)f(y).$$

Pour cela, on mène un raisonnement par «analyse-synthèse».

Analyse : dans les questions **1.**, **2.**, **3.** et **4.**, f désigne une fonction dérivable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant l'égalité $(\star)$ ci-dessus.

1. Démontrer que $f(0) \in \{0, 1\}$.

2. Que dire de f si $f(0) = 0$?

On suppose désormais, jusqu'à la fin de l'analyse, que $f(0) = 1$.

3. Démontrer que $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = f(x)f'(0)$.

4. On pose $a = f'(0)$. En déduire l'expression de f en fonction de a.

5. Synthèse : conclure.

Correction.

1. En prenant $x = 0$ et $y = 0$, on obtient $f(0) = f(0+0) = f(0)^2$. Ainsi, $f(0)$ est solution de l'équation $a = a^2 \Leftrightarrow a(a-1) = 0$ qui possède pour seules solutions 0 et 1.
   Par suite, $f(0) = 0$ ou $f(0) = 1$.

2. Si $f(0) = 0$, alors pour tout $x \in \mathbb{R}$,
   $$f(x) = f(x+0) = f(x)f(0) = f(x) \times 0 = 0;$$
   donc f est la fonction nulle.

3. Soit $x \in \mathbb{R}$ et $h \neq 0$. Alors on a :
   $$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{f(x)f(h) - f(x)}{h} = f(x)\frac{f(h) - 1}{h} = f(x)\frac{f(0+h) - f(0)}{h}.$$
   Ainsi, en faisant tendre h vers 0 dans l'égalité précédente, on obtient le résultat.

4. On pose $a = f'(0)$. D'après la question 3., la fonction f vérifie l'équation différentielle $y' = ay$ dont les solutions sont de la forme $x \mapsto Ce^{ax}$ avec $C \in \mathbb{R}$. En utilisant la condition initiale $f(0) = 1$, on obtient finalement :
   $$f : x \mapsto f(x) = e^{ax}.$$

5. Faisons la synthèse :
On vient de voir que si f est solution dérivable de $(\star)$, alors f est la fonction nulle, ou f est de la forme $x \mapsto e^{ax}$ où $a \in \mathbb{R}$.

Réciproquement, soit $a \in \mathbb{R}$. Montrons que $f : x \mapsto e^{ax}$ vérifie $(\star)$. Pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, on a, par les propriétés de la fonction exponentielle :

$$f(x+y) = e^{a(x+y)} = e^{ax+ay} = e^{ax}e^{ay} = f(x)f(y).$$

et de plus, f est dérivable sur $\mathbb{R}$.
On vérifie facilement que la fonction nulle est également solution de $(\star)$.

Il en résulte que l'ensemble des solutions de $(\star)$ est :

$$\{x \mapsto e^{ax} \mid a \in \mathbb{R}\} \cup \{\mathbf{0}\}.$$

Exercice 2. *CCP PC 2016*

Pour $n \in \mathbb{N}$ et $k \in [\![0, n]\!]$, on note $p_{k,n}(X)$ le polynôme $\binom{n}{k} X^k (1-X)^{n-k}$ si bien que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad p_{k,n}(t) = \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} t^k (1-t)^{n-k}.$$

On note A_0, A_1 et A_2 les trois éléments de $\mathbb{R}^2$ définis par $A_0 = (0,1)$, $A_1 = (1,1)$ et $A_2 = (1,0)$.

On note $\mathcal{T}$ l'ensemble défini par $\mathcal{T} = \{(x,y) \in [0,1]^2 \,|\, x + y \geq 1\}$.
Pour tout $t \in [0,1]$, on remarque que $p_{0,1}(t) = 1 - t$ et $p_{1,1}(t) = t$. On note alors :

$$A(t) = p_{0,1}(t)A_0 + p_{1,1}(t)A_1, \quad B(t) = p_{0,1}(t)A_1 + p_{1,1}(t)A_2 \text{ et}$$
$$C(t) = p_{0,1}(t)A(t) + p_{1,1}(t)B(t).$$

1. Soit $t \in [0,1]$.

1.a) Déterminer l'expression de $p_{0,2}(t)$, $p_{1,2}(t)$ et $p_{2,2}(t)$ en fonction de t.

1.b) Déterminer les coordonnées de $A(t)$, $B(t)$ et vérifier que $C(t) = (2t - t^2, 1 - t^2)$.

1.c) Montrer que $C(t) = \displaystyle\sum_{k=0}^{2} p_{k,2}(t)A_k$.

2.) Montrer que $\mathcal{T}$ est une partie convexe de $\mathbb{R}^2$.

3.) On considère la fonction $f : \begin{array}{ccc} [0,1] & \to & \mathbb{R}^2 \\ t & \mapsto & C(t) \end{array}$. Montrer que $\mathrm{Im}(f) \subset \mathcal{T}$.

Correction.

1. Soit $t \in [0,1]$.

1.a) $\boxed{p_{0,2}(t)=\binom{2}{0}t^0(1-t)^2=(1-t)^2}$. $\boxed{p_{1,2}(t)=\binom{2}{1}t^1(1-t)^1=2t(1-t)}$, et, $\boxed{p_{2,2}(t)=\binom{2}{2}t^2(1-t)^0=t^2}$.

1.b) $\boxed{A(t)=(1-t)A_0+tA_1=(t,1)}$, $\boxed{B(t)=(1-t)A_1+tA_2=(1,1-t)}$ et, $\boxed{C(t)=(1-t)A(t)+tB(t)=(2t-t^2,1-t^2)}$.

1.c) On a alors, $\displaystyle\sum_{k=0}^{2}p_{k,2}(t)A_k=(1-t)^2A_0+2t(1-t)A_1+t^2A_2=(2t-t^2,1-t^2)=C(t)$.

2.) Soit $(A,B)\in\mathcal{T}^2$, soit $\lambda\in[0,1]$, posons $C=\lambda A+(1-\lambda)B$, alors, $A=(x,y)$, $B=(x',y')$ avec $(x,y,x',y')\in[0,1]^4$ et $x+y\geq 1$, $x'+y'\geq 1$.
Ainsi, $C=(\lambda x+(1-\lambda)x',\lambda y+(1-\lambda)y')$ et $0\leq\lambda x+(1-\lambda)x'\leq\lambda+1-\lambda=1$ car x et y sont entre 0 et 1, de même, $0\leq\lambda y+(1-\lambda)y'\leq\lambda+1-\lambda=1$, de plus, $\lambda x+(1-\lambda)x'+\lambda y+(1-\lambda)y'=\lambda(x+y)+(1-\lambda)(x'+y')\geq\lambda+(1-\lambda)=1$, $x+y\geq 1$ et $x'+y'\geq 1$.
En conclusion, $\boxed{\mathcal{T}\text{ est donc une partie convexe de }\mathbb{R}^2}$.

3.) Soit $t\in[0,1]$, $C(t)=(2t-t^2,1-t^2)\in[0,1]^2$ car $t\in[0,1]$, donc, $t^2\in[0,1]\Rightarrow 1-t^2\in[0,1]$.
La fonction $f:t\mapsto 2t-t^2$, est dérivable sur $[0,1]$, et, $f'(t)=2-2t=2(1-t)\geq 0$ sur $[0,1]$, or, $f(0)=0$ et $f(1)=1$, donc, $\forall t\in[0,1]$, $f(t)\in[0,1]$.
De plus, $2t-t^2+1-t^2=1+2t(1-t)\geq 1$, car $t(1-t)\geq 0$.
Ainsi, $\boxed{\text{tous les points de Im}(f)\text{ sont dans }\mathcal{T}}$.

Exercice 3.

Soit $(E,\|\cdot\|)$ une espace vectoriel normé et A une partie **convexe** de E.

1. Montrer que $\overline{A}$ est une partie convexe de E.

2. a) Soit $x,y\in E$, $r>0$ et $t\in[0,1]$. Montrer que pour tout $u\in B(tx+(1-t)y,r)$, il existe $x'\in B(x,r)$ et $y'\in B(y,r)$ tels que $u=tx'+(1-t)y'$.
   Indication : Faire un dessin.

   b) Montrer que $\mathring{A}$ est une partie convexe de E.

3. a) Soit $x_0\in E$. Montrer que l'application $f_{x_0}:x\mapsto d(x,x_0)$ est une fonction convexe sur E i.e.

$$\forall\, x,y\in E,\ \forall\, t\in[0,1], f_{x_0}(tx+(1-t)y)\leq tf_{x_0}(x)+(1-t)f_{x_0}(y).$$

   b) Montrer que l'application $f_A:x\mapsto d(x,A)$ est une fonction convexe sur E.
   Indication : On pourra s'aider de la caractérisation séquentielle de la borne inférieure.

Correction.

1. Soit $x, y \in \overline{A}$. Montrons que $[x, y] \subset \overline{A}$. Soit $t \in [0, 1]$.
Par la caractérisation séquentielle des points adhérents, il existe $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des suites à valeurs dans A telles que $x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} x$ et $y_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} x$.
Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $z_n = tx_n + (1-t)y_n$; on remarque alors que par convexité de A, z_n appartient à A. Ainsi, la suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite à valeurs dans A qui converge vers $tx + (1-t)y$. En effet :
$$\|z_n-(tx+(1-t)y)\| = \|t(x_n-x)+(1-t)(y_n-y)\| \leq t\underbrace{\|x_n - x\|}_{\xrightarrow[n\to+\infty]{}0}+(1-t)\underbrace{\|y_n - y\|}_{\xrightarrow[n\to+\infty]{}0} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$
Ainsi, par la caractérisation séquentielle des points adhérents, $tx + (1-t)y$ appartient à $\overline{A}$.
Ceci étant vrai pour tout $t \in [0, 1]$, $[x, y] \subset \overline{A}$. Et ceci étant vrai pour tous $x, y \in \overline{A}$, on en conclut que $\overline{A}$ est convexe.

2. a) Soit $x, y \in E$, $r > 0$, $t \in [0, 1]$ et on pose $z = tx + (1-t)y$. Soit $u \in B(z, r)$.
On pose $x' = x + (u-z)$ et $y' = y + (u-z)$. Alors, on a :
$$d(x', x) = \|x' - x\| = \|u - z\| < r \text{ et de même } d(y', y) < r,$$
donc $x' \in B(x, r)$ et $y' \in B(y, r)$. De plus, on a :
$$tx' + (1-t)y' = tx + (1-t)y + (u-z) = z + u - z = u.$$

   b) Soit $x, y \in \mathring{A}$. Montrons que $[x, y] \in \mathring{A}$. Soit $t \in [0, 1]$ et on pose $z = tx + (1-t)y$.
Comme $x, y \in \mathring{A}$, il existe $r_1, r_2 > 0$ tels que $B(x, r_1) \subset A$ et $B(y, r_2) \subset A$. On pose $r = \min(r_1, r_2) > 0$.
Montrons que $B(z, r) \subset A$ et ainsi que $z \in \mathring{A}$. Soit $u \in B(z, r)$. D'après la question précédente, il existe $x' \in B(x, r)$ et $y' \in B(y, r)$ tels que $u = tx' + (1-t)y'$. Or, comme $r < r_i$, $i = 1, 2$, on a $x', y' \in A$, donc par convexité de A, u appartient à A.
Par suite, $B(z, r) \subset A$ et donc $z \in \mathring{A}$. Ceci étant vrai pour tout $t \in [0, 1]$ et tout $x, y \in \mathring{A}$, il en résulte que $\mathring{A}$ est convexe.

3. a) Soit $x_0 \in E$. Soit $x, y \in E$ et $t \in [0, 1]$. On a :
$$\begin{aligned} f_{x_0}(tx + (1-t)y) &= d(tx + (1-t)y, x_0) \\ &= \|tx + (1-t)y - x_0\| \\ &= \|t(x - x_0) + (1-t)(y - x_0)\| \\ &\leq t\|x - x_0\| + (1-t)\|y - x_0\| \\ f_{x_0}(tx + (1-t)y) &\leq td(x, x_0) + (1-t)d(y, y_0). \end{aligned}$$
Par suite, f_{x_0} est convexe sur E.

   b) Soit $x, x' \in E$ et $t \in [0, 1]$. Par caractérisation séquentielle de la borne inférieure, il existe des suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(a'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans A telles que
$$d(x, a_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} d(x, A) \text{ et } d(x', a'_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} d(x', A)$$
Comme A est convexe, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $ta_n + (1-t)a'_n \in A$. Ainsi, on a :

$$
\begin{array}{rcl}
f_A(tx+(1-t)x') & = & d(tx+(1-t)x',A) \\
 & = & \inf_{a\in A}\|tx+(1-t)x'-a\| \\
 & \leq & \|tx+(1-t)x'-(ta_n+(1-t)a'_n)\| \\
 & \leq & t\underbrace{\|x-a_n\|}_{\to d(x,A)}+(1-t)\underbrace{\|x'-a'_n\|}_{\to d(x',A)} \\
 & \leq & td(x,A)+(1-t)d(x',A) \\
f_A(tx+(1-t)x') & \leq & tf_A(x)+(1-t)f_A(x').
\end{array}
$$

Par suite, f_A est convexe sur E.

Problème 1. *(E3A 2014)*

On désigne par $\mathbb{K}$ le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Soit n un entier naturel non nul et soit $E = \mathbb{K}^n$.

Pour tout endomorphisme u de E, on note $\mathrm{Ker}(u)$ le noyau de u, et $\mathrm{Im}(u)$ l'image de u.

1. Question de cours : Soient u et v deux endomorphismes qui commutent. Démontrer que $\mathrm{Ker}(u)$ et $\mathrm{Im}(u)$ sont stables par v.

Dans la suite de l'exercice, u désigne un endomorphisme de E tel que $u^2 = 0$.

2. Démontrer que $\mathrm{Im}(u)$ est contenu dans $\mathrm{Ker}(u)$.
3. Quelle inégalité obtient-on ainsi sur le rang de u ? On citera précisément le théorème utilisé.
4. On suppose ici que $n = 2$, soit $E = \mathbb{K}^2$. On suppose ici u non nul.
   (a) Démontrer qu'il existe une droite D dans E telle que $\mathrm{Ker}(u) = \mathrm{Im}(u) = D$.
   (b) Soit v un endomorphisme de E tel que $v^2 = 0$ et $u \circ v = v \circ u$.
      i. Démontrer que $v(D) \subset D$.
      ii. Démontrer que $u \circ v = 0$.
   (c) Soient v et w deux endomorphismes de E tels que $v^2 = 0$, $w^2 = 0$, $u \circ v = v \circ u$ et $u \circ w = w \circ u$. Démontrer que $v \circ w = 0$.
5. On revient au cas général. Soit m un entier naturel ≥ 2. Soient $u_1, ..., u_m$ des endomorphismes de E tels que :
$$\forall (i,j) \in \{1, ..., m\}^2,\ u_i^2 = 0 \text{ et } u_i \circ u_j = u_j \circ u_i.$$
   On pose $F_1 = \mathrm{Im}(u_1)$ et pour un entier i compris entre 2 et m, $F_i = \mathrm{Im}(u_1 \circ u_2 \circ \cdots \circ u_{i-1} \circ u_i)$.
   (a) Démontrer que, pour tout entier i compris entre 1 et $m-1$, F_i est un sous-espace vectoriel stable par u_{i+1}.
   (b) En déduire que, pour tout entier i compris entre 1 et m, F_i est de dimension au plus $\dfrac{n}{2^i}$.
   (c) Dans le cas où $n < 2^m$, démontrer que l'endomorphisme $u_1 \circ u_2 \circ \cdots \circ u_m = 0$.
6. On suppose $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ dans ce paragraphe. Soit $E = \mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire $<\,,\,>$ usuel:
$$< (x_1, ..., x_n), (y_1, ..., y_n) >= \sum_{i=1}^{n} x_i y_i.$$
   Pour toute matrice A, on note $\mathrm{Ker}(A)$ le noyau de A, et $\mathrm{Im}(A)$ l'image de A.

   Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$. On note ${}^tA$ la matrice transposée de A.
   (a) Démontrer que $E = \mathrm{Ker}(A) \oplus \mathrm{Im}({}^tA)$.
   (b) On suppose de plus $A^2 = 0$. Démontrer que $\mathrm{Im}(A + {}^tA) = \mathrm{Im}(A) + \mathrm{Im}({}^tA)$.

Correction.

1) Soit $(u,v) \in \mathcal{L}(E)$ tels que $u \circ v = v \circ u$.
Soit $x \in \ker(u)$. $u(v(x)) = v(u(x)) = v(0) = 0$ donc $v(x) \in \ker(u)$.
$\underline{\ker(u) \text{ est stable par } v.}$

Soit $x \in \mathrm{Im}(u)$. Soit $y \in E$ tel que $x = u(y)$. $v(x) = v(u(y)) = u(v(y))$ donc $v(x) \in \mathrm{Im}(u)$.
$\underline{\mathrm{Im}(u) \text{ est stable par } v.}$

2)Soit $x \in \mathrm{Im}(u)$. Soit $y \in E$ tel que $x = u(y)$. $u(x) = u^2(y) = 0$ donc $x \in \ker(u)$.
$\underline{\mathrm{Im}(u) \subset \ker(u).}$

3) On en déduit que $\mathrm{rg}(u) \leq \dim(\ker(u)$. Par le théorème du rang, on obtient $\underline{\mathrm{rg}(u) \leq \frac{n}{2}}$.

2)
a)Si $n = 2$ et $u \neq 0$, (3) conduit à $\mathrm{rg}(u) = 1 = \dim(\ker(u))$.
Alors $\underline{D = \ker(u) = \mathrm{Im}(u) \text{ est une droite}}$
b)
(i) Soit v telle que $u \circ v = v \circ u$ et $v^2 = 0$. Par (1) on sait que $\underline{D = \mathrm{Im}(u) \text{ est stable par } v.}$
(ii) D est donc propre pour v. Or $\mathrm{sp}(v) = \{0\}$.
Donc $v = 0$ ou $D = \ker(v) = \mathrm{Im}(v)$. Dans les deux cas $u \circ v = 0$.
c) De même, on a $w = 0$ ou $D = \ker(w) = \mathrm{Im}(w)$. Dans les deux cas $v \circ w = 0$.
5)
a)Posons, pour $1 \leq i \leq m-1$, $v = u_1 \circ \cdots \circ u_i$. v et u_{i+1} commutent, donc par (1), F_i est stable par u_{i+1}.
b) On effectue une récurrence sur i :
$(H_i)\ \dim(F_i) \leq \frac{n}{2^i}$.
(H_1) est obtenu par (3).
Supposons (H_{i_0}) pour $i_0 \geq 1$. Soit $\tilde{u}_{i_0+1}$ le morphisme induit par u_{i_0+1} sur F_{i_0}. $\tilde{u}_{i_0+1}^2 = 0$. En appliquant l'hypothèse de récurrence et le résultat du (3), on déduit $\mathrm{rg}(\tilde{u}_{i_0+1}) \leq \frac{n}{2^{i_0+1}}$. Or $\mathrm{Im}(\tilde{u}_{i_0+1}) = F_{i_0+1}$ car les (u_i) commutent. D'où (H_{i_0+1}). Ceci achève la récurrence.
c) Si $n < 2^m$, $\dim F_m < 1$ donc $\dim F_m = 0$. Ainsi $\underline{u_1 \circ \cdots \circ u_m = 0}$.
6)
a) Par le théorème du rang, $\dim(\ker(A)) + \dim(\mathrm{Im}({}^tA)) = n$. De plus si $x \in \ker(A) \cap \mathrm{Im}({}^tA)$, $Ax = 0$ et $x = {}^tAy$ donc $A^tAy = 0$ et $\|Ay\| = 0$ donc $x = 0$. Ainsi $\underline{E = \ker(A) \oplus \mathrm{Im}({}^tA)}$.
b)$\mathrm{Im}(A + {}^tA) \subset \mathrm{Im}(A) + \mathrm{Im}({}^tA)$. De plus les deux sous-espaces sont de même dimension $2\mathrm{rg}(A)$. Donc $\underline{\mathrm{Im}(A + {}^tA) = \mathrm{Im}(A) + \mathrm{Im}({}^tA)}$.