Corrigé du devoir surveillé n°3

Exercice 1. *(CCP 2012)*

1. Déterminer le plus petit entier naturel p tel que $3^p \equiv 1$ modulo 11.
2. En utilisant des congruences modulo 11, démontrer que, pour tout entier naturel n, l'entier $3^{n+2012} - 9 \times 5^{2n}$ est divisible par 11.

Correction.

1. En calculant les congruences modulo 11 de 3^p à partir de $p = 1$ jusqu'à 5, on se rend compte que le plus petit entier p_0 est $p_0 = 5$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors :
$$\begin{aligned} 3^{n+2012} - 9 \times 5^{2n} &= 3^n \times (3^5)^{402} \times 3^2 - 9 \times (25)^n \\ &\equiv 3^n \times 1^{402} \times 9 - 9 \times (3)^n \bmod 11 \\ &\equiv 0 \bmod 11. \end{aligned}$$
Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $3^{n+2012} - 9 \times 5^{2n}$ est divisible par 11.

Exercice 2.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $E = M_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrés à coefficients réels de taille $n \times n$ et on considère l'ensemble $O_n(\mathbb{R})$ des matrices orthogonales de E i.e.
$$O_n(\mathbb{R}) = \{M \in E \mid {}^tMM = I_n\}.$$
Le but de cet exercice est d'étudier la compacité et la connexité par arcs de $O_n(\mathbb{R})$.

Partie A : Compacité

1. On munit l'espace vectoriel E de la norme $\|\cdot\|$ associée au produit scalaire canonique sur E c'est-à dire, pour $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}, B = (b_{ij})_{1\leq i,j\leq n} \in E$,
$$(A|B) = \mathrm{Tr}({}^tAB) \quad \text{et} \quad \|A\| = \sqrt{(A|A)}.$$
   a. Soit $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n} \in E$. Montrer que :
$$\|A\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{ki}^2}.$$
   b. Montrer que $O_n(\mathbb{R})$ est une partie bornée de $(E, \|\cdot\|)$.
2. Dans cette question, on munit l'espace vectoriel E de la norme infinie $\|\cdot\|_\infty$, c'est-à dire, pour $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n} \in E$,
$$\|A\|_\infty = \max_{1\leq i,j\leq n}(|a_{ij}|).$$
et on munit $E \times E$ de la norme produit.

a. Montrer que l'application $D : E \to E \times E$ définie par :

$$D : M \mapsto (M, M)$$

est une application linéaire continue sur E.

b. Montrer que l'application $\varphi : E \times E \to E$ définie par :

$$\varphi : (M, N) \mapsto {}^tMN$$

est une application bilinéaire continue sur $E \times E$ muni de la norme produit.

c. En utilisant les questions 2.a et 2.b, montrer que l'application $f : E \to E$ telle que

$$f : M \mapsto {}^tMM$$

est une application continue sur E.

d. En déduire que $O_n(\mathbb{R})$ est une partie fermée de $(E, \|\cdot\|_\infty)$.

3. Déduire des questions 1. et 2. que $O_n(\mathbb{R})$ est une partie compacte de E (et ce pour n'importe quelle norme sur E).

Partie B : Connexité par arcs

1. Soit $M \in O_n(\mathbb{R})$. Quelle(s) valeur(s) peut prendre $\det(M)$? Donner des exemples de matrices de $O_n(\mathbb{R})$ pour chacune des valeurs trouvées.
2. En déduire que $O_n(\mathbb{R})$ n'est pas connexe par arcs. *On rappelle que l'application* $\det : E \to \mathbb{R}$ *est continue sur* E *(pour n'importe quelle norme).*

Correction.

Partie A : Compacité

1. a. Soit $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n} \in E$. On a :

$${}^tAA = \left(\sum_{k=1}^{n} a_{ki} a_{kj} \right)_{1 \leq i,j \leq n},$$

donc

$$\|A\|^2 = \mathrm{Tr}({}^tAA) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} a_{ki}^2.$$

b. Pour tout $M \in O_n(\mathbb{R})$, on a :

$$\|M\| = \sqrt{\mathrm{Tr}({}^tMM)} = \sqrt{\mathrm{Tr}(I_n)} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} 1} = \sqrt{n}.$$

Par suite, $O_n(\mathbb{R})$ est borné dans $(E, \|\cdot\|)$.

2. a. Pour tous $M, N \in E$ et tous $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, on a :

$$D(\lambda M + \mu N) = (\lambda M + \mu N, \lambda M + \mu N) = \lambda(M, M) + \mu(N, N) = \lambda D(M) + \mu D(N).$$

donc D est une application linéaire de E dans E^2. Or E est un espace vectoriel normé de dimension finie (égale à n^2), donc, D étant linéaire, elle est continue (et ce pour n'importe quelle norme).
Si on avait oublié l'argument précédent, on pouvait montrer que, pour tout $M \in E$, on a (en notant $\|\cdot\|_{E^2}$ la norme produit sur E) :

$$\|D(M)\|_{E^2} = \|(M,M)\|_{E^2} = \max(\|M\|_\infty, \|M\|_\infty) = \|M\|_\infty.$$

Ainsi, D est une application linéaire continue sur E.

b. Pour tous $A, M, N \in E$ et tous $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, on a :

$$\varphi(\lambda M + \mu N, A) \mapsto {}^t\lambda M + \mu NA = \lambda {}^tMA + \mu {}^tNA = \lambda\varphi(M,A) + \mu\varphi(N,A)$$

et

$$\varphi(A, \lambda M + \mu N) \mapsto {}^tA(\lambda M + \mu N) = \lambda {}^tAM + \mu {}^tAN = \lambda\varphi(A,M) + \mu\varphi(A,N),$$

donc φ est une application bilinéaire. Or E est un espace vectoriel normé de dimension finie (égale à n^2), donc, φ étant bilinéaire sur $E \times E$, elle est continue (et ce pour n'importe quelle norme).
Si on avait oublié l'argument précédent, on pouvait montrer que, pour tous $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}, B = (b_{ij})_{1\leq i,j\leq n} \in E$, on a :

$$\begin{aligned}
\|\varphi(A,B)\|_\infty &= \|{}^tAB\|_\infty \\
&= \left\| \left(\sum_{k=1}^{n} a_{ki} b_{kj} \right)_{1\leq i,j\leq n} \right\|_\infty \\
&= \max_{1\leq i,j\leq n} \left| \sum_{k=1}^{n} a_{ki} b_{kj} \right| \\
&\leq \max_{1\leq i,j\leq n} \left(\sum_{k=1}^{n} \underbrace{|a_{ki}|}_{\leq \|A\|_\infty} \underbrace{|b_{kj}|}_{\leq \|B\|_\infty} \right) \\
&\leq \max_{1\leq i,j\leq n} \left(\sum_{k=1}^{n} \|A\|_\infty \|B\|_\infty \right) \\
\|\varphi(A,B)\|_\infty &\leq n\|A\|_\infty \|B\|_\infty.
\end{aligned}$$

Donc φ est une application bilinéaire continue sur E^2.

c. On remarque que :

$$f = \varphi \circ D$$

donc f est une application continue sur E comme composée d'applications continues.

d. On a :

$$O_n(\mathbb{R}) = \{M \in E \mid {}^tMM = I_n\} = \{M \in E \mid f(M) = I_n\} = f^{-1}(\{I_n\})$$

Or f est continue sur E et $\{I_n\}$ est un fermé de E donc $O_n(\mathbb{R})$ est un fermé de E comme image réciproque d'un fermé par une application continue.

3. E est une espace vectoriel de dimension finie égale à n^2 donc toutes les normes sont équivalentes sur E. Ainsi, d'après la questions 1.b., $O_n(\mathbb{R})$ est bornée dans E pour toute norme et d'après la question 2.d, $O_n(\mathbb{R})$ est fermé dans E pour toute norme. De plus, en dimension finie les fermés bornés sont compacts, donc il en résulte que $O_n(\mathbb{R})$ est une partie compacte de E.

Partie B : Connexité par arcs

1. Soit $M \in O_n(\mathbb{R})$. On a, pour tout $A, B \in E$, $\det({}^tA) = \det(A)$ et $\det(AB) = \det(A)\det(B)$, donc, on obtient :

$$\det(M)^2 = \det({}^tM)\det(M) = \det({}^tMM) = \det(I_n) = 1.$$

   Ainsi, $\det(M) \in \{\pm 1\}$.
   De plus, on $\det(I_n) = 1$ et $\begin{vmatrix} -1 & 0_{1,n-1} \\ 0_{n-1,1} & I_{n-1} \end{vmatrix} = -1$ et ces deux matrices sont orthogonales.

2. D'après la question précédente, $\det(O_n(\mathbb{R})) = \{-1, 1\}$. Or l'image directe d'une partie connexe par arcs par une application continue est connexe par arcs, donc, comme det est continue sur E et $\{-1, 1\}$ n'est pas connexe par arcs, $O_n(\mathbb{R})$ n'est as connexe par arcs.

Problème 1. *E3A 2006*

Notations

Soit $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a \leq 0 < b$. On note $I = [a, b]$.
$C^0(I)$ désigne l'espace vectoriel réel des fonctions continues de I dans $\mathbb{R}$; $C^1(I)$ l'espace vectoriel réel des fonctions de classe C^1 de I et on note, pour $f \in C^0(I)$:

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in I} |f(x)| \quad \|f\|_1 = \int_I |f(t)| dt \text{ et } \|f\|_2 = \sqrt{\int_I |f(t)|^2 dt}.$$

Partie I

1. Soit f dans $C^0(I)$ et c un réel strictement positif. On considère l'équation différentielle :

$$(E) \quad y' + cy = f$$

   Résoudre l'équation différentielle homogène associée à (E) puis vérifier que la fonction notée $\varphi(f)$, dérivable sur I, définie par :

$$\forall x \in I,\ \varphi(f)(x) = e^{-cx} \int_0^x e^{ct} f(t) dt,$$

   est solution de (E) et que $\varphi(f)(0) = 0$.
   On admettra que $\varphi(f)$ est l'unique solution de (E) qui s'annule en 0.

2. Exprimer $(\varphi(f))'$ en fonction de f et $\varphi(f)$ et démontrer que $\varphi(f)$ est de classe C^1 sur I.

3. Calculer $\varphi(f)$ pour :

a. $f : t \mapsto e^{-ct}$.
b. $f : t \mapsto K$ où K est un réel.
c. $f : t \mapsto t$ *on pourra penser à effectuer une intégration par parties.*

4. Prouver que l'application $\varphi : f \mapsto \varphi(f)$ est linéaire sur $C^0(I)$.

Partie II

1. Démontrer qu'il existe des réels positifs M_1 et M_2 tels que :
$$\forall f \in C^0(I), \|f\|_1 \leq M_1\|f\|_2 \leq M_2\|f\|_\infty.$$
2. Démontrer qu'il existe un réel positif M_0 tel que :
$$\forall f \in C^0(I), \|\varphi(f)\|_\infty \leq M_0\|f\|_\infty.$$
3. Démontrer qu'il existe un réel A positif tel que :
$$\forall f \in C^0(I), \forall x \in I, |\varphi(f)(x)| \leq A\|f\|_1.$$
4. Démontrer qu'il existe un réel B positif tel que :
$$\forall f \in C^0(I), \forall x \in I, |\varphi(f)(x)| \leq B\|f\|_2.$$
En déduire :
$$\exists K \in \mathbb{R}^+, \forall f \in C^0(I), \|\varphi(f)\|_2 \leq K\|f\|_2.$$
5. L'application φ de $C^0([a, b])$ dans lui-même est-elle continue
   a. lorsque $C^0([a, b])$ est muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$?
   b. lorsque $C^0([a, b])$ est muni de la norme $\|\cdot\|_1$?
   c. lorsque $C^0([a, b])$ est muni de la norme $\|\cdot\|_2$?

Correction.

1. Le problème de Cauchy $\left\{ \begin{array}{c} y' + cy = f \\ y(0) = 0 \end{array} \right.$, associé à une équation différentielle linéaire scalaire d'ordre 1 résolue en y', à coefficients continus sur I, admet une solution unique sur I qu'on peut calculer, par exemple, par la méthode de variation de la constante.
   On peut aussi remarquer que $g : x \mapsto \varphi(f)(x).e^{cx}$ est dérivable sur I et que $\forall x \in I,\ g'(x) = e^{cx}(c\varphi(f)(x) + \varphi(f)'(x) = e^{cx}f(x)$.
   Comme $g(0) = 0$: $\forall x \in I,\ g(x) = \displaystyle\int_0^x e^{ct}f(t)\,dt$; ce qui montre la formule annoncée.
2. $\varphi(f)' = f - c\varphi(f)$ est continue, donc $\varphi(f)$ est de classe C^1 sur I.
   La linéarité découle de la formule du I1 et de la linéarité de l'intégrale. On peut aussi la démontrer à l'aide du principe de superposition.

Partie II

1. Vu en cours : $\forall f \in C^0(I), \|f\|_1 \leq \sqrt{b-a}\|f\|_2$ et $\|f\|_2 \leq \sqrt{b-a}\|f\|_\infty$.
2. Soit $x \in I$.
   $|\varphi(f)(x)| \leq e^{-cx} \int_{[0,x]} e^{ct}|f(t)| \; dt \leq e^{-cx} |\int_0^x e^{ct} \; dt| \|f\|_\infty = \frac{1}{c}|1-e^{-cx}| \|f\|_\infty \leq \frac{\max(|1-e^{-ca}|, |1-e^{-cb}|}{c} \|f\|_\infty$.
   Donc $\|\varphi(f)\|_\infty \leq \frac{\max(|1-e^{-ca}|, |1-e^{-cb}|)}{c} \|f\|_\infty$.
3. $|\varphi(f)(x)| \leq e^{-cx} \int_{[0,x]} e^{ct}|f(t)| \; dt \leq e^{-ca} \int_{[0,x]} e^{cb}|f(t)| \; dt \leq e^{c(b-a)} \int_{[a,b]} |f(t)| \; dt = e^{c(b-a)} \|f\|_1$.
   Par intégration, on en déduit que $\|\varphi(f)\|_1 \leq (b-a).e^{c(b-a)} \|f\|_1$.
4. En combinant les questions II 1 et 4, on obtient $|\varphi(f)(x)| \leq \sqrt{b-a} \; e^{c(b-a)} \|f\|_2$.
   On en déduit que $\|\varphi(f)\|_2 \leq \sqrt{b-a}.\sqrt{b-a} \; e^{c(b-a)} \|f\|_2$.
5. Comme φ est une application linéaire, les inégalités établies aux questions 2, 3 et 4 assurent que l'application φ de $C^0([a,b])$ dans lui-même est continue lorsque $C^0([a,b])$ est muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$, de la norme $\|\cdot\|_1$ ou de la norme $\|\cdot\|_2$.

Problème 2. *Mines 2009*

On désigne par $C([0,1])$ l'espace vectoriel des fonctions réelles continues sur $[0,1]$. Pour tout $\lambda \geq 0$, on note ϕ_λ l'élément de $C([0,1])$ défini par $\phi_\lambda(x) = x^\lambda$. Par convention on a posé $0^0 = 1$ de sorte que ϕ_0 est la fonction constante 1.
Soit $(\lambda_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite de réels ≥ 0 deux à deux distincts. On note W le sous- espace vectoriel de $C([0,1])$ engendré la famille $(\phi_{\lambda_k})_{k \in \mathbb{N}}$. Le but du problème est d'établir des critères de densité de l'espace W dans $C([0,1])$. On définit les normes suivantes sur $C([0,1])$:

$$N_\infty(f) = \sup_{x \in [0,1]} |f(x)| \qquad \text{et} \qquad N_2(f) = \left(\int_0^1 |f(x)|^2 \mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{2}}$$

La question préliminaire et les parties A et B sont indépendantes les unes des autres.

Question préliminaire

1. Montrer que $(\phi_\lambda)_{\lambda \geq 0}$ est une famille libre de $C([0,1])$.

Partie A : Distance d'un point à une partie d'un espace normé

Soit E un espace vectoriel normé par une norme $\|\cdot\|$. On rappelle que la distance d'un élément $x \in E$ à une partie non vide A de E est le réel noté $d(x,A)$ défini par :

$$d(x,A) = \inf_{y \in A} \|x-y\|$$

2. Montrer que $d(x,A) = 0$ si et seulement si x est adhérent à A.
3. Montrer que si $(A_n)_{n \geq 0}$ est une suite croissante de parties de E et si $A = \bigcup_{n \geq 0} A_n$ alors $d(x,A) = \lim_{n \to \infty} d(x, A_n)$.

On considère un sous-espace vectoriel V *de dimension finie* de E, et on note $B = \{y ; \|y-x\| \leq \|x\|\}$.

6. Montrer que $B \cap V$ est compacte et que $d(x, V) = d(x, B \cap V)$ pour tout $x \in E$.
7. En déduire que pour tout $x \in E$, il existe un élément $y \in V$ tel que $d(x, V) = \|x - y\|$.

Partie B : Comparaison des normes N_∞ et N_2

Pour toute partie A de $C([0,1])$, on note $\overline{A}^{\infty}$ et $\overline{A}^{2}$ les adhérences de A pour les normes N_∞ et N_2 respectivement. Pour $f \in C([0,1])$, la notation $d(f, A)$ désigne toujours la distance de f à A *relativement à la norme* N_2 (on ne considérera jamais, dans l'énoncé, la distance d'un élément à une partie relativement à la norme N_∞).

6. Montrer que pour tout $f \in C([0,1])$, $N_2(f) \leq N_\infty(f)$. En déduire que pour toute partie A de $C([0,1])$, on a $\overline{A}^{\infty} \subset \overline{A}^{2}$.

On considère l'ensemble $V_0 = \{f \in C([0,1]); f(0) = 0\}$, et on rappelle que ϕ_0 désigne la fonction constante 1.

7. Montrer que $\phi_0 \in \overline{V_0}^{2}$.
8. En déduire que V_0 est dense dans $C([0,1])$ pour la norme N_2, mais n'est *pas* dense pour la norme N_∞.
9. Montrer que si V est un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel normé, alors son adhérence $\overline{V}$ est également un espace vectoriel.

   Pour les questions suivantes, on admettra *le théorème de Weierstrass : pour tout $f \in C([0,1])$ et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $N_\infty(P - f) \leq \varepsilon$ ou autrement dit, pour tout $f \in C([0,1])$, il existe une suite de polynômes qui converge vers f pour la norme N_∞.*

10. Montrer qu'un sous-espace vectoriel V de $C([0,1])$ est dense pour la norme N_∞ si et seulement si pour tout entier $m \geq 0$, $\phi_m \in \overline{V}^{\infty}$.
11. En déduire qu'un sous-espace vectoriel V de $C([0,1])$ est dense pour la norme N_2 si et seulement si pour tout entier $m \geq 0$, $\phi_m \in \overline{V}^{2}$.

Correction.

Question préliminaire

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(\lambda_k)_{1 \leq k \leq n}$ tels que $0 \leq \lambda_1 < \lambda_2 < .... < \lambda_n$ et $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \phi_{\lambda_k} = 0$.

   Raisonnons par récurrence.

   On a pour tout $x \in]0,1]$, $\lambda_1 + \sum_{k=2}^{n} \lambda_k x^{\lambda_k - \lambda_1} = 0$, puis en tendant x vers 0, on obtient que $\lambda_1 = 0$.

   Soit $m \in [[1, n-1]]$, supposons que pour tout $k \in [[1, m]]$, $\lambda_k = 0$ alors $\sum_{k=m+1}^{n} \lambda_k \phi_{\lambda_k} = 0$ et donc pour tout $x \in]0,1]$, $\lambda_{m+1} + \sum_{k=m+2}^{n} \lambda_k x^{\lambda_k - \lambda_{m+1}} = 0$, puis en tendant x vers 0, on obtient que $\lambda_{m+1} = 0$. Ainsi pour tout $k \in [[1, n]]$, $\lambda_k = 0$ puis la famille $(\phi_{\lambda_k})_{1 \leq k \leq n}$ est une famille libre de $C([0,1])$.

Enfin la famille $(\phi_\lambda)_{\lambda\geq 0}$ est une famille libre de $C([0,1])$.

Partie A : Distance d'un point à une partie d'un espace normé

Soit E un espace vectoriel normé par une norme $\|\cdot\|$. On rappelle que la distance d'un élément $x \in E$ à une partie non vide A de E est le réel noté $d(x,A)$ défini par :

$$d(x,A) = \inf_{y\in A} \|x-y\|$$

2.

$d(x,A)=0 \Longleftrightarrow \forall \varepsilon>0\ \exists a \in A\,, \|x-a\|<\varepsilon \Longleftrightarrow \forall\varepsilon>0\ \ B(x,\varepsilon)\cap A\neq\emptyset \Longleftrightarrow x$ est adhérent à A.

3. Supposons que $(A_n)_{n\geq 0}$ est une suite croissante de parties de E telle que $A=\bigcup\limits_{n\geq 0} A_n$.
   Soit $x\in E$.
   Posons pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\alpha_n=d(x,A_n)$ et $\beta=d(x,A)$.
   Puisque $(A_n)_{n\geq 0}$ est une suite croissante et $A=\bigcup\limits_{n\geq 0} A_n$, alors $(\alpha_n)_{n\geq 0}$ est une suite décroissante minorée par β, donc la suite $(\alpha_n)_{n\geq 0}$ converge vers un réel α, on a $\beta\leq\alpha$.
   Soit $\varepsilon>0$, il existe $y\in A$ tel que $\beta\leq\|y-x\|<\beta+\varepsilon$
   $y\in A$ donc il existe $n_o\in\mathbb{N}$ tel que $y\in A_{n_0}$ et alors $\alpha_{n_0}\leq\|y-x\|<\beta+\varepsilon$.
   donc $\alpha<\beta+\varepsilon$.
   On fait tendre ε vers 0, on a $\alpha\leq\beta$.
   Enfin $d(x,A)=\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} d(x,A_n)$.

   On considère un sous-espace vectoriel V de *dimension finie* de E, et on note $B=\{y\in E;\ \|y-x\|\leq\|x\|\}$.

4. On a la partie B est un fermé de E et $B\subset\overline{B}(0,2\|x\|)$ donc B est bornée.
   Ainsi $B\cap V$ fermée bornée de V qui est de dimension finie, donc $B\cap V$ est compacte.
   Soit $x\in E$, on a $B\cap V\subset V$ donc $d(x,V)\leq d(x,B\cap V)$.
   Soit $y\in V$,
   si $y\in B$ alors $y\in B\cap V$ et donc $d(x,B\cap V)\leq d(x,y)$.
   si $y\notin B$ alors $\|y-x\|>\|x\|=\|x-0\|\geq d(x,B\cap V)$ car $0\in B\cap V$
   donc pour tout $y\in V$, $d(x,B\cap V)\leq d(x,y)$, donc $d(x,B\cap V)\leq d(x,V)$.
   Ainsi $d(x,B\cap V)=d(x,V)$.

5. On a l'application $\begin{array}{ccc} B\cap V & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ y & \longmapsto & \|y-x\| \end{array}$ est continue sur le compact $B\cap V$, donc bornée et atteint sa borne inférieure sur $B\cap V$, alors il existe $y\in B\cap V$ tel que $d(x,B\cap V)=\|x-y\|$.
   D'après la question **4)** $d(x,V)=d(x,B\cap V)$ donc $d(x,V)=\|x-y\|$.

B. Comparaison des normes N_∞ et N_2.

6. Soit $f \in C([0,1])$, on a

$$N_2(f) = \left(\int_0^1 |f(x)|^2\, dx\right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\int_0^1 N_\infty(f)^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} = N_\infty(f).$$

Soit A une partie de $C([0,1])$ et $f \in \overline{A}^{\infty}$ alors il existe une suite $(f_n)_{n\geq 0}$ d'éléments de A telle que $\lim_{n\to+\infty} N_\infty(f_n - f) = 0$.

Comme $0 \leq N_2(f_n - f) \leq N_\infty(f_n - f)$ alors $\lim_{n\to+\infty} N_2(f_n - f) = 0$ et donc $f \in \overline{A}^{2}$.

Ainsi $\overline{A}^{\infty} \subset \overline{A}^{2}$.

On considère l'ensemble $V_0 = \{f \in C([0,1]);\ f(0) = 0\}$

7. ϕ_0 désigne la fonction constante 1.
On considère la suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 1}$ de $C([0,1])$ définie par :

$$\forall n \geq 1\ ,\ \ f_n(x) = \begin{cases} n.x & \text{si} \quad x \in \left[0, \frac{1}{n}\right] \\ 1 & \text{si} \quad x \in \left[\frac{1}{n}, 1\right] \end{cases}$$

On a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n \in V_0$.

$$(N_2(f_n - \phi_0))^2 = \int_0^{\frac{1}{n}} |f_n(x) - 1|^2\, dx = \frac{1}{3n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

donc $\phi_0 \in \overline{V_0}^{2}$.

8. Soit $g \in C([0,1])$ et f la fonction définie sur $[0,1]$ par $f(x) = g(x) - g(0)$ pour tout $x \in [0,1]$, donc $f \in V_0$ et $g = f + g(0)\phi_0$.

On a $\phi_0 \in \overline{V_0}^{2}$ donc il existe une suite $(\varphi_n)_{n\geq 0}$ d'éléments de V_0 telle que $\lim_{n\to+\infty} N_2(\varphi_n - \phi_0) = 0$.
donc $\lim_{n\to+\infty} N_2(g(0)\varphi_n - g(0)\phi_0) = |g(0)| \lim_{n\to+\infty} N_2(\varphi_n - \phi_0) = 0$.
Posons pour tout $n \in \mathbb{N}$ $\ g_n = f + g(0)\varphi_n$, on a $g_n \in V_0$ et $\lim_{n\to+\infty} N_2(g_n - g) = 0$.

Donc $g \in \overline{V_0}^{2}$ et alors V_0 est dense dans $C([0,1])$ pour la norme N_2.

On a $\phi_0 \notin \overline{V_0}^{\infty}$, en effet , sinon il existe une suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 0}$ de V_0 qui converge uniformément vers ϕ_0.
En particulier $(f_n)_{n\geq 0}$ converge simplement vers ϕ_0 sur $[0,1]$ et donc $\phi_0(0) = \lim_{n\to+\infty} f_n(0) = 0$ ce qui est absurde.
Donc V_0 n'est pas dense dans $C([0,1])$ pour la norme N_∞.

9. Supposons que V est un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel normé.

On a $V \subset \overline{V}$ donc $\overline{V} \neq \varnothing$.

Soient x et y deux éléments de $\overline{V}$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, il existe deux suites $(x_n)_{n\geq 0}$ et $(y_n)_{n\geq 0}$ d'éléments de V qui convergent respectivement vers x et y.

On a la suite $(x_n + \lambda y_n)_{n\geq 0}$ d'éléments de V converge vers $x + \lambda y$.

Donc $x + \lambda y \in \overline{V}$ et alors $\overline{V}$ est également un espace vectoriel.

10. Soit V un sous-espace vectoriel de $C([0,1])$.
On suppose que V est dense dans $C([0,1])$ pour la norme N_∞ alors il est clair que pour tout $m \geq 0$, $\phi_m \in \overline{V}^{\infty} = C([0,1])$.

Réciproquement supposons que pour tout $m \geq 0$, $\phi_m \in \overline{V}^{\infty}$ et soit $f \in C([0,1])$.
Soit $\varepsilon > 0$, on a d'après le théorème de Weierstrass, il existe une fonction polynomiale P définie sur $[0,1]$ telle que
$$N_\infty(P - f) \leq \varepsilon$$
Puisque pour tout $m \geq 0$, $\phi_m \in \overline{V}^{\infty}$ et $\overline{V}^{\infty}$ est un espace vectoriel , on a $P \in \overline{V}^{\infty}$ et alors f appartient à l'adhérence de $\overline{V}^{\infty}$ pour la norme N_∞ qui est égal à $\overline{V}^{\infty}$.
Ainsi V est dense dans $C([0,1])$ pour la norme N_∞.

11. Soit V un sous-espace vectoriel de $C([0,1])$.
On suppose que V est dense dans $C([0,1])$ pour la norme N_2 alors il est clair que pour tout $m \geq 0$, $\phi_m \in \overline{V}^{2} = C([0,1])$.

Réciproquement supposons que pour tout $m \geq 0$, $\phi_m \in \overline{V}^{2}$ et soit $f \in C([0,1])$.
Soit $\varepsilon > 0$, on a d'après le théorème de Weierstrass, il existe une fonction polynomiale P définies sur $[0,1]$ telle que
$$N_\infty(P - f) \leq \varepsilon$$
D'après la question 6) on alors
$$N_2(P - f) \leq \varepsilon$$
Puisque pour tout $m \geq 0$, $\phi_m \in \overline{V}^{2}$ et $\overline{V}^{2}$ est un espace vectoriel , on a $P \in \overline{V}^{2}$ et alors f appartient à l'adhérence de $\overline{V}^{2}$ pour la norme N_2 qui est égal à $\overline{V}^{2}$.
Ainsi V est dense dans $C([0,1])$ pour la norme N_2.