Chapitre II

Topologie des espaces vectoriels normés

Table des matières

Partie A

Normes et espaces vectoriels normés

Dans cette partie, E désigne un espace vectoriel sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1. Définitions de base et premières propriétés

Définition 1. *Norme*

On appelle **norme** sur l'espace vectoriel, une application $N : E \to \mathbb{R}$ qui vérifie les axiomes suivants :

i) (Positivité) pour tout $x \in E$,
$$N(x) \geq 0;$$

ii) (Séparation) pour tout $x \in E$,
$$N(x) = 0 \text{ implique } x = 0_E;$$

iii) (Homogénéité) pour tous $x \in E$, $\lambda \in \mathbb{K}$,
$$N(\lambda x) = |\lambda| N(x);$$

iv) (Inégalité triangulaire) pour tous $x, y \in E$,
$$N(x + y) \leq N(x) + N(y).$$

Si N est une norme sur E, le couple (E, N) est appelé **espace vectoriel normé**.

Il est souvent d'usage de noter $\|\cdot\|$ d'un espace vectoriel normé et donc $\|x\|$ la norme d'un vecteur x de E.

Proposition 1.

Soit N une norme sur E. Alors $N(0_E) = 0$ et que pour tout $x \in E$, $N(-x) = N(x)$.

Exemple 1.

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ et $< \cdot, \cdot >$ un produit scalaire sur E et $\|\cdot\|$ sa norme associée (i.e. $x \mapsto \|x\| = \sqrt{< x, x >}$). La terminologie utilisée est bien justifiée : en effet, $\|\cdot\|$ est bien une norme sur E au sens de la définition 1.

Proposition 2. *Seconde Inégalité triangulaire*

Soit N une norme sur E. Pour tous $x, y \in E$ on a :

$$|N(x) - N(y)| \leq N(x-y) \leq N(x) + N(y).$$

Définition 2. *Vecteur unitaire*

Soit N une norme sur E.
On dit qu'un vecteur x de E est **unitaire** si $N(x) = 1$.

Notation 1. *Boule et sphère unité*

Soit N une norme sur E. On note :
- $S(0_E, 1) = \{x \in E \mid N(x) = 1\}$; on appelle cet ensemble **sphère unité** de E ;
- $B_f(0_E, 1) = \{x \in E \mid N(x) \leq 1\}$; on appelle cet ensemble **boule unité fermée** de E ;
- $B(0_E, 1) = \{x \in E \mid N(x) < 1\}$; on appelle cet ensemble **boule unité ouverte** de E ;

Définition 3.

Soit N une norme sur E et $x \in E$ un vecteur non nul.
On appelle **vecteur unitaire associé à** x le vecteur unitaire $\frac{1}{N(x)}x$.

Remarque 1.

Pour $x \neq 0_E$, le vecteur unitaire associé à x est clairement colinéaire à x.
Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, il n'existe que deux vecteurs unitaires colinéaires à x :

$$\frac{1}{N(x)}x \text{ et } -\frac{1}{N(x)}x.$$

Dans le cas où $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, il en a une infinité : ce sont exactement les

$$\frac{e^{it}}{N(x)}x \text{ pour } t \in [0, 2\pi[.$$

2. Premiers exemples d'espaces vectoriels normés

a. Quelques normes sur $\mathbb{K}^n$

Sur l'espace vectoriel $\mathbb{K}^n$ il existe de nombreuses normes qui permettent de le munir d'une structure d'espace vectoriel normé. En voici quelques unes parmi les plus fréquemment "rencontrées" :

Définition 4. *Normes usuelles sur $\mathbb{K}^n$*

Soit $x = (x_1, ..., x_n)$ un vecteur de $\mathbb{K}^n$. On définit :

— La **norme un**, notée $\| \cdot \|_1$:

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i| = |x_1| + ... + |x_n|.$$

— La **norme deux**, notée $\| \cdot \|_2$:

$$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2} = \sqrt{|x_1|^2 + ... + |x_n|^2}.$$

— La **norme infinie**, notée $\| \cdot \|_\infty$:

$$\|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} (|x_i|) = \max(|x_1|, ..., |x_n|).$$

On remarque immédiatement que dans le cas $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, la norme deux correspond à la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^n$.

Proposition 3.

Les normes un, deux, et infini sont bien des normes sur $\mathbb{R}^n$.

Remarque 2.

Soit $p \geq 1$ un réel. On peut généraliser l'idée des normes un et deux : on montrera en exercice que

$$x = (x_1, ..., x_n) \mapsto \|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

est une norme sur $\mathbb{K}^n$. On l'appelle la **norme** p.

b. Exemples de normes sur des espaces de suites

On considère l'espace vectoriel $\mathbb{K}^\mathbb{N}$ des suites indexées par $\mathbb{N}$ et à valeurs dans $\mathbb{K}$. On définit les normes suivantes sur certains de ses sous-espaces :

Définition 5.

— On note $\ell^1(\mathbb{N}, \mathbb{K})$ l'ensemble des suites $u = (u_n)$ de $\mathbb{K}^\mathbb{N}$ telles que la série $\sum u_n$ est absolument convergente. On définit la **norme un**, notée $\| \cdot \|_1$ sur $\ell^1(\mathbb{N}, \mathbb{K})$ par :

$$\text{Pour } u = (u_n) \in \ell^1(\mathbb{N}, \mathbb{K}), \quad \|u\|_1 = \sum_{n=0}^{\infty} |u_n|.$$

— On note $\ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{K})$ l'ensemble des suites $u = (u_n)$ de $\mathbb{K}^\mathbb{N}$ telles que la série $\sum u_n^2$ est absolument convergente. On définit la **norme deux**, notée $\|\cdot\|_2$ sur $\ell^2(\mathbb{N},\mathbb{K})$ par :

$$\text{Pour } u=(u_n)\in\ell^2(\mathbb{N},\mathbb{K}),\quad \|u\|_2=\sqrt{\sum_{n=0}^{\infty}|u_n|^2}.$$

— On note $\ell^\infty(\mathbb{N},\mathbb{K})$ l'ensemble des suites *bornée* de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. On définit la **norme infinie**, notée $\|\cdot\|_\infty$ sur $\ell^\infty(\mathbb{N},\mathbb{K})$ par :

$$\text{Pour } u=(u_n)\in\ell^\infty(\mathbb{N},\mathbb{K}),\quad \|u\|_\infty=\sup_{n\in\mathbb{N}}(|u_n|).$$

Proposition 4.

Les couples $(\ell^1(\mathbb{N},\mathbb{K}),\|\cdot\|_1)$, $(\ell^2(\mathbb{N},\mathbb{K}),\|\cdot\|_2)$, $(\ell^\infty(\mathbb{N},\mathbb{K}),\|\cdot\|_\infty)$ sont des espaces vectoriels normés.

c. Exemples de normes sur des espaces de fonctions

Soit X un ensemble non vide. On considère l'ensemble $\mathcal{F}_b(X,\mathbb{K})$ des fonctions bornées de X à valeurs dans $\mathbb{K}$. C'est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$: $\mathcal{F}_b(X,\mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(X,\mathbb{K})$, l'ensemble de toutes les fonctions de X dans $\mathbb{K}$.

Voici la norme naturelle sur $\mathcal{F}_b(X,\mathbb{K})$:

Définition 6. *Norme sur l'espace des fonctions bornées*

Soit $f\in\mathcal{F}_b(X,\mathbb{K})$. On appelle **norme infinie** de f, et on note $\|\cdot\|_\infty$ la quantité :

$$\|f\|_\infty=\sup_{x\in X}|f(x)|.$$

Proposition 5.

La norme infinie de $\mathcal{F}_b(X,\mathbb{K})$ est bien définie et c'est une norme sur $\mathcal{F}_b(X,\mathbb{K})$.

Soit $a,b\in\mathbb{R}$ avec $a<b$. On considère l'espace vectoriel $C([a,b],\mathbb{K})$ des fonctions continues de $[a,b]$ dans $\mathbb{K}$. On définit trois normes usuelles sur cet espace par analogie du cas de $\mathbb{K}^n$:

Définition 7. *Normes sur $C([a,b],\mathbb{K})$*

Soit $f\in C([a,b],\mathbb{K})$. On définit les **normes de la convergence** : **en moyenne**, **en moyenne quadratique** et **uniforme** respectivement notées $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$, par :

$$\|f\|_1=\int_a^b|f(t)|dt,\quad \|f\|_2=\sqrt{\int_a^b|f(t)|^2dt}$$

$$\text{et } \|f\|_\infty = \sup_{t\in[a,b]} |f(t)|.$$

Proposition 6.

Les normes de la convergence en moyenne, en moyenne quadratique et uniforme sont bien des normes sur $C([a,b],\mathbb{K})$.

Remarque 3.

On verra dans la suite du chapitre, que la norme infinie sur $C([a,b],\mathbb{K})$ peut-être obtenue comme norme *induite* par la norme infinie sur $\mathcal{F}_b([a,b],\mathbb{K})$ via l'inclusion $C([a,b],\mathbb{K}) \subset \mathcal{F}_b([a,b],\mathbb{K})$.

3. Distance associée à une norme

La norme d'un espace vectoriel normé E est une manière d'associer une *longueur* à chaque vecteur de E. Du point de vue *affine* i.e. si on se place dans un espace affine dirigé par E, une manière de mesurer la distance entre deux points M et N devient alors clair : il suffit de regarder la longueur - la norme - du vecteur $\overrightarrow{MN}$ qui "sépare" ces deux points.

Définition 8. *Distance associée à une norme*

Soit N une norme sur E. On appelle **distance associée à** N l'application $d : E \times E \to \mathbb{R}_+$ définie par :

$$\text{pour } (x,y) \in E^2, \quad d(x,y) = N(y-x).$$

Proposition 7. *Seconde inégalité triangulaire*

Soit N une norme sur E. Alors la distance d associée à N vérifie, pour tous $x,y,z \in E$:

$$|d(x,y) - d(y,z)| \leq d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z).$$

Définition 9. *Distance à une partie*

Soit N une norme sur E, d sa distance associée, A une partie non vide de E et $x \in E$. On appelle **distance de** x **à** A et on note $d(x,A)$, la quantité :

$$d(x,A) = \inf\{d(x,a) \mid a \in A\}.$$

On peut également définir la distance entre deux parties de E :

Définition 10. *Distance entre deux parties*

Soit N une norme sur E, d sa distance associée et A, B des parties non vides de E. On appelle **distance de** A **à** B et on note $d(A, B)$, la quantité :

$$d(A, B) = \inf\{d(a, b) \mid (a, b) \in A \times B\}.$$

4. Boules et sphères associées à une distance

On généralise dans ce paragraphe la notion de cercle/sphère, disque/boule bien connue dans les espaces euclidiens de dimension 2 et 3 qui nous apparaissent naturels. Comme pour la sphère et la boule unité d'une norme, la forme des sphères et boules que nous allons considérer peut être tout-à-fait contre-intuitive vis-a-vis de la terminologie et de nos habitudes.

Notation 2. *Boule et sphère unité*

Soit N une norme sur E, d sa norme associée, $x_0 \in E$ et r un réel strictement positif. On note :

— $S(x_0, r) = \{x \in E \mid d(x, x_0) = r\}$; on appelle cet ensemble **sphère** de centre x_0 et de rayon r ;

— $B_f(x_0, r) = \{x \in E \mid d(x, x_0) \leq r\}$; on appelle cet ensemble **boule fermée** de centre x_0 et de rayon r ;

— $B(x_0, r) = \{x \in E \mid d(x, x_0) < r\}$; on appelle cet ensemble **boule ouverte** de centre x_0 et de rayon r ;

Remarque 4.

On peut remarquer que $S(x_0, r) = B_f(x_0, r) \smallsetminus B(x_0, r)$.

Proposition 8.

Soit N une norme sur E. Toute boule (ouverte ou fermée) est une partie convexe de E.

5. Parties bornées, applications bornées

a. Parties bornées

Définition 11. *Partie bornée*

Soit N une norme sur E et A une partie de E. On dit que A est **bornée** s'il existe un réel positif R tel que :

$$\text{pour tout } x \in A, \quad N(x) \leq R.$$

Proposition 9.

Soit N une norme sur E, d sa distance associée et A une partie de E. Les propositions suivantes sont équivalentes :

i) A est bornée ;

ii) il existe $R \geq 0$ tel que $A \subset B_f(0_E, R)$;

iii) il existe $x_0 \in E$ et $R \geq 0$ tels que $A \subset B_f(x_0, R)$;

iv) il existe $R \geq 0$ tel que pour tous $x, y \in A$, $d(x, y) \leq R$.

Définition 12.

Soit N une norme sur E et A une partie non vide et bornée de E. On appelle **diamètre** de A et on note $\mathrm{diam}(A)$, le réel positif :

$$\mathrm{diam}(A) = \sup_{(x,y)\in A^2} d(x, y).$$

Remarque 5.

Si une partie A d'un espace vectoriel normé E n'est pas bornée, alors, par convention, on dira que $\mathrm{diam}(A) = +\infty$.

b. Applications et suites bornées

Définition 13. *Application bornée*

Soit N une norme sur E et X un ensemble non vide. Une fonction $f : X \to E$ est dite **bornée** si $f(X)$ est une partie bornée de E i.e. s'il existe $R \in \mathbb{R}_+$ tel que, pour tout $x \in X$:

$$N(f(x)) \leq R.$$

Remarque 6. *Suite bornée*

Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans E peut être vue comme l'application $f : \mathbb{N} \to E$ telle que $f(n) = u_n$ pour $n \in \mathbb{N}$. La définition précédente s'applique donc également aux suites i.e. une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée s'il existe $R \in \mathbb{R}_+$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$N(u_n) \leq R.$$

On peut généraliser la structure de l'espace vectoriel normé $\mathcal{F}_b(X, \mathbb{K})$ vue dans la paragraphe 2 au cas des fonctions à valeurs dans E bornées :

Définition-Proposition 14.

Soit N une norme sur E et X un ensemble non vide. L'ensemble $\mathcal{F}_b(X,E)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ et l'application $\|\cdot\|_\infty$ appelée **norme infinie** définie par :

$$\text{pour } f \in \mathcal{F}_b(X,E), \quad \|f\|_\infty = \sup_{x\in X} N(f(x)),$$

est une norme sur $\mathcal{F}_b(X,E)$.

6. Constructions d'espaces vectoriels normés

a. Opérations sur les normes

Proposition 10.

Soit N, N' deux normes sur E et $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$. Alors :
- $N + N' : x \mapsto N(x) + N'(x)$ est une norme sur E.
- $\alpha N : x \mapsto \alpha N(x)$ est une norme sur E.

b. Composition par une fonction injective

Proposition 11.

Soit F un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$, N une norme sur E et u une application linéaire *injective* de F dans E. Alors l'application $N' : F \to \mathbb{R}_+$ définie par :

$$N' = N \circ u : x \mapsto N(u(x)),$$

est une norme sur F.

c. Application : normes sur $\mathbb{K}[X]$

On considère l'espace vectoriel $\mathbb{K}[X]$ des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ à une indéterminée. Grâce à la proposition précédente, on va munir $\mathbb{K}[X]$ de plusieurs structures d'espace vectoriel normé à partir des exemples que l'on a étudiés dans le paragraphe 2).

Exemple 2.

Soit P un polynôme de $\mathbb{K}[X]$. On note $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ la suite de ses coefficients (on rappelle que cette suite est stationnaire en 0) et on notera $t \mapsto P(t)$ la fonction polynomiale associée à P.

Normes provenant des espaces de suites : Les applications $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$ sont des normes sur $\mathbb{K}[X]$ où :

$$\|P\|_1 = \sum_{i=1}^{+\infty} |a_i| \quad \|P\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{+\infty} |a_i|^2} \text{ et } \|P\|_\infty = \sup_{i\in\mathbb{N}} |a_i|.$$

Normes provenant des espaces de fonctions : Soit $a < b$ des réels. Les applications $\mathcal{N}_1$, $\mathcal{N}_2$ et $\mathcal{N}_\infty$ sont des normes sur $\mathbb{K}[X]$ où :

$$\mathcal{N}_1(P) = \int_a^b |P(t)|dt \quad \mathcal{N}_2(P) = \sqrt{\int_a^b |P(t)|^2 dt} \text{ et } \mathcal{N}_\infty(P) = \sup_{t\in[a,b]} |P(t)|.$$

d. Normes induites

Étant donné une sous-espace F de l'espace vectoriel E muni d'une norme, on utilise la restriction à F de cette dernière pour munir d'une structure d'espace vectoriel normé :

Définition-Proposition 15. *Norme induite*

Soit N une norme sur E et F un sous-espace vectoriel de E. Alors la restriction de N à F est une norme sur F.

Cette restriction est appelée **norme induite** sur F par N.

Remarque 7.

Pour désigner la norme induite sur F, on utilisera en général la même notation que pour la norme sur E.

Exemple 3.

- La valeur absolue sur $\mathbb{R}$ est la norme induite par le module sur $\mathbb{C}$.
- Soit $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$. La norme de la convergence uniforme sur $C([a,b],\mathbb{K})$ est la norme induite par la norme infinie sur $\mathcal{F}_b([a,b],\mathbb{K})$.

e. Normes produits

On peut définir une norme naturelle sur un produit fini d'espaces vectoriels normés :

Définition-Proposition 16. *Norme produit*

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(E_1, N_1), ..., (E_n, N_n)$ des espaces vectoriels normés sur $\mathbb{K}$.
On pose $E = E_1 \times ... \times E_n$. Alors l'application $N : E \to \mathbb{R}_+$, appelée **norme produit**, et définie, pour $x = (x_1, ..., x_n) \in E$, par :

$$N(x) = \max(N_1(x_1), ..., N_n(x_n)),$$

est une norme sur E.

Partie B

Suites dans un espace vectoriel normé

Dans cette partie, $(E, \|\cdot\|)$ désigne un espace vectoriel normé sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1. Suites convergentes

Définition 17. *Suite convergente*

Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans E. On dit que u est **convergente** (dans $(E, \|\cdot\|)$) s'il existe un élément $\ell \in E$ tel que la suite à valeurs réelles $(\|u_n - \ell\|)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.
Dans ce cas on dit que la suite u **converge vers** ℓ.

Si une suite ne converge pas, on dit qu'elle est **divergente**.

Remarque 8.

Autrement dit, pour d la distance associée à $\|\cdot\|$, une suite (u_n) à valeurs dans E converge vers ℓ si la suite réelle $(d(u_n, \ell))_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0.

Proposition 12.

Soit u une suite à valeurs dans E. Si u converge, alors il existe un *unique* ℓ tel que u converge vers ℓ.

Notation 3.

Pour une suite $u = (u_n)$ à valeurs dans E qui converge vers $\ell \in E$, on notera indifféremment :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell \text{ ou } \lim u = \ell \text{ ou } u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell.$$

Remarque 9.

Même si les notations précédentes ne le laissent pas entendre, la notion de convergence et de limite de suite dans un espace vectoriel normé dépend très fortement de la norme sous-jacente.

Notation 4.

On note :
- $c(E)$ l'ensemble des suites à valeurs dans E convergentes ;
- $c_0(E)$ l'ensemble des suites à valeurs dans E qui convergent vers 0 ;
- $\ell^\infty(\mathbb{N}, E) = \mathcal{F}_b(\mathbb{N}, E)$ l'ensemble des suites à valeurs dans E bornées.

Remarque 10.

Comme on l'a vu dans la partie précédente, $\ell^\infty(E) = \mathcal{F}_b(\mathbb{N}, E)$ muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$ est un espace vectoriel normé. On rappelle que pour $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^\infty(E)$,

$$\|u\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} \|u_n\|.$$

2. Opérations algébriques sur les suites convergentes

a. Combinaisons linéaires

Proposition 13. *Combinaison linéaire*

Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des suites à valeurs dans E.
Si u converge vers $\ell \in E$ et v converge vers $\ell' \in E$ alors pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, la suite $\lambda u + \mu v$ converge vers $\lambda\ell + \mu\ell'$.

Corollaire 1.

Une combinaison linéaire de suites à valeurs dans E convergentes est convergente.

Corollaire 2.

Les ensembles de suites $c(E)$ et $c_0(E)$ sont des espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$ (munis de l'addition canonique des suites et de la multiplication canonique par les scalaires).

Proposition 14.

Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans E. Si u converge vers ℓ alors la suite à valeurs réelles $(\|u_n\|)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\|\ell\|$.

Corollaire 3.

Toute suite convergente est bornée. Autrement dit, $c(E) \subset \ell^\infty(E)$.

b. Suites à valeurs dans un produit fini d'espaces vectoriels normés

Comme on l'a vu dans la partie précédente, on peut munir un produit fini d'espaces vectoriels normés de la norme produit. C'est-à-dire, pour $k \in \mathbb{N}^*$ et $(E_1, \|\cdot\|_{(1)}), ..., (E_k, \|\cdot\|_{(k)})$ des espaces vectoriels normés, on considère la norme $\|\cdot\|$ définie, pour $x = (x_1, ..., x_k) \in \prod_{i=1}^{k} E_i$, par :

$$\|x\| = \max_{1 \leq i \leq k} \|x_i\|_{(i)}.$$

Proposition 15.

Soit $k \in \mathbb{N}^*$ et $(E_1, \|\cdot\|_{(1)}), ..., (E_k, \|\cdot\|_{(k)})$ des espaces vectoriels normés. On munit le produit $E = \prod_{i=1}^{k} E_i$ de ces espaces de la norme produit notée $\|\cdot\|$.

Soit $u = \left((u_n^{(1)})_{n\in\mathbb{N}}, ..., (u_n^{(k)})_{n\in\mathbb{N}}\right)$ une suite à valeurs dans E. La suite u converge vers $(\ell^{(1)}, ..., \ell^{(k)})$ dans E si, et seulement si, pour tout $i \in \{1, ..., k\}$, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}^{(i)}$ converge vers $\ell^{(i)}$ dans E_i.

Exemple 4.

Une suite à valeurs dans $\mathbb{K}^n$ converge (pour la norme infinie) si, et seulement si, chacune des n suites de ses coordonnées converge.

c. Relations de comparaisons

Dans ce paragraphe, on étend, pour des suites à valeurs vectorielles, les notations de Landau, "o" et "O" vues dans le cadre de l'analyse réelle (et complexe).

Définition 18. *Domination et négligeabilité*

Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans E et $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs réelles positives.

1. On dit que u est **dominée** par a en $+\infty$ s'il existe $M \in \mathbb{R}_+$ et il existe $N \in \mathbb{N}$ tels que pour tout $n \geq N$:
$$\|u_n\| \leq M a_n.$$
On note alors $u = O(a)$ ou $u_n = O(a_n)$.

2. On dit que u est **négligeable** devant a en $+\infty$ si pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ et il existe $N \in \mathbb{N}$ tels que pour tout $n \geq N$:
$$\|u_n\| \leq \varepsilon a_n.$$
On note alors $u = o(a)$ ou $u_n = o(a_n)$.

On peut alors comparer les suites à valeurs dans E entre elles :

Définition 19. *Domination, négligeabilité et équivalence*

Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des suites à valeurs dans E.

1. On dit que u est **dominée** par v en $+\infty$ et on note $u = O(v)$ ou $u_n = O(v_n)$ si :
$$u_n = O(\|v_n\|).$$
2. On dit que u est **négligeable** devant v en $+\infty$ et on note $u = o(v)$ ou $u_n = o(v_n)$ si :
$$u_n = o(\|v_n\|).$$
3. On dit que u **équivaut** à v en $+\infty$ et on note $u \sim v$ ou $u_n \sim v_n$ si :
$$u_n - v_n = o(\|v_n\|).$$

Remarque 11.

La relation $\sim$ est une relation d'équivalence entre les suites à valeurs dans E. On pourra donc employer la terminologie : "u et v sont équivalentes en $+\infty$" si la suite u équivaut à la suite v en $+\infty$.

3. Suites extraites et valeurs d'adhérence

On emploie ici la même terminologie que pour les suites à valeurs réelles ou complexes :

Définition 20. *Suite extraite / sous-suite*

Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans E et $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ une fonction strictement croissante. On appelle **suite extraite** ou **sous-suite** de la suite u, la suite
$$(u_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}.$$

Remarque 12.

La fonction φ - *la fonction extractrice* - est souvent notée de la façon suivante : pour $k \in \mathbb{N}$, $n_k := \varphi(k)$. Ainsi, on désignera souvent par $(u_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ une sous-suite de u.

Proposition 16.

Soit u une suite à valeurs dans E et $\ell \in E$. La suite u converge vers ℓ si, et seulement si, **toute** sous-suite de u converge vers ℓ.

Définition 21. *Valeur d'adhérence*

Soit u une suite à valeurs dans E et $x \in E$. On dit que x est une **valeur d'adhérence** de u s'il existe une sous-suite de u qui converge vers x.

Exemple 5.

- Les nombres 1 et -1 sont des valeurs d'adhérence de la suite $u = ((1 - \frac{1}{n})(-1)^n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.
- le nombre complexe i est une valeur d'adhérence de la suite $v = (e^{\frac{in\pi}{4}})_{n \in \mathbb{N}}$.

Proposition 17.

Soit u une suite à valeurs dans E. Si u converge alors u possède une unique valeur d'adhérence.

Remarque 13.

- La contraposée de la proposition précédente nous donne une manière de prouver qu'une suite est divergente, c'est-à-dire :
  Si u possède au moins deux valeurs d'adhérence distinctes, alors u diverge.
- Attention, la réciproque de la proposition précédente est fausse ! Il existe des suites divergentes qui ne possèdent qu'une seule valeur d'adhérence, comme le montre l'exercice suivant.

Partie C

Topologie d'un espace vectoriel normé

Dans cette partie, $(E, \|\cdot\|)$ désigne un espace vectoriel normé sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1. Ouverts

Définition 22. *Partie ouverte*

Soit U une partie de E. On dit que U est un **ouvert** ou une **partie ouverte** de $(E, \|\cdot\|)$ si pour tout $x \in U$, il existe $r > 0$ tel que $B_f(x, r) \subset U$.

Remarque 14.

On peut remplacer la boule fermée $B_f(x, r)$ par la boule ouverte $B(x, r)$ dans la définition.

On justifie ici la terminologie de boule *ouverte* employée dans ce chapitre.

Proposition 18.

Une boule ouverte est un ouvert de E.

Exemple 6.

- L'espace E et l'ensemble vide $\emptyset$ sont des ouverts de E.
- Le sous-ensemble $A = \{(a,b) \mid a < \frac{1}{3}\}$ de $\mathbb{R}^2$ muni de la norme deux est un ouvert.

Proposition 19.

- La réunion d'une famille **quelconque** d'ouverts de E est un ouvert de E.
- L'intersection d'une famille **finie** d'ouverts est un ouvert.

2. Fermés

Définition 23. *Fermé*

Soit F une partie de E. On dit que F est un **fermé** ou une **partie fermée** de $(E, \|\cdot\|)$ si son complémentaire F^c est un ouvert de E.

Exemple 7.

- L'espace E et l'ensemble vide $\emptyset$ sont des fermés de E.
- Le sous-ensemble $B = \{(a,b) \mid a \geq \frac{1}{3}\}$ de $\mathbb{R}^2$ muni de la norme deux est un fermé.

Proposition 20.

Une boule fermée est un fermé de E.

Proposition 21.

- L'intersection d'une famille **quelconque** de fermés de E est un fermé de E.
- La réunion d'une famille **finie** de fermés de E est un fermé de E.

Remarque 15.

Comme pour les intersections d'ouverts, une réunion quelconque de fermés n'est pas fermée en général : on peut considérer par exemple la famille de fermés $\left(\left[\frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n}\right]\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

3. Voisinages

Définition 24. *Voisinage*

Soit $x_0 \in E$ et V une partie de E. On dit que V est un **voisinage de** x_0 s'il existe $r > 0$ tel que
$$B(x_0, r) \subset V.$$
On note $\mathcal{V}(x_0)$ l'ensemble des voisinages de x_0.

Remarque 16.

On peut remplacer la boule ouverte $B(x_0, r)$ par la boule fermée $B_f(x_0, r)$ dans la définition.

Proposition 22.

Soit U une partie de E. Alors U est ouvert si, et seulement si, U est un voisinage de chacun de ses points.

Proposition 23.

Soit $x_0 \in E$.
- L'intersection d'une famille **finie** de voisinages de x_0 est un voisinage de x_0.
- Tout ensemble contenant un voisinage de x_0 est un voisinage de x_0.
- La réunion d'une famille **quelconque** de voisinages de x_0 est un voisinage de x_0.

4. Topologie d'un espace produit

Proposition 24.

Soit $k \in \mathbb{N}^*$, $(E_1, N_1), \ldots, (E_k, N_k)$ des espaces vectoriels normés. On considère $E = \prod_{i=1}^{k} E_i$ muni de la norme produit $\| \cdot \|$. Soit $U_1 \subset E_1$,...,$U_k \subset E_k$.
Si, pour tout $1 \leq i \leq k$, U_i est un ouvert de E_i, alors $U_1 \times \ldots \times U_k$ est un ouvert de E.

5. Intérieur

Définition 25. *Point intérieur et intérieur d'une partie*

Soit $A \subset E$.

Soit $x \in E$. On dit que x est un **point intérieur** à A si A est un voisinage de x i.e. s'il existe $r > 0$ telle que $B(x, r) \subset A$.

On appelle **intérieur** de A l'ensemble noté $\mathring{A}$ des points intérieurs à A.

Remarque 17.

— Si x est un point intérieur à A, alors $x \in A$ d'après la définition. Donc $\mathring{A} \subset A$.
— Si A, B sont des parties de E avec $A \subset B$, alors $\mathring{A} \subset \mathring{B}$. La réciproque est fausse.

Exemple 8.

— Soit $a, b \in \mathbb{R}$. Alors $\widehat{[a,b]}^{\circ} =]a, b[$.
— Soit $A = \{(a, b) \mid a \geq \frac{1}{3}\} \subset \mathbb{R}^2$. Alors $\mathring{A} = \{(a, b) \mid a > \frac{1}{3}\}$.

Proposition 25.

Soit $A \subset E$.
— $\mathring{A}$ est le plus grand ouvert inclus dans A.
— A est ouvert si, et seulement si, $A = \mathring{A}$.

6. Adhérence

Définition 26. *Point adhérent et adhérence d'une partie*

Soit $A \subset E$.
Soit $x \in E$. On dit que x est un **point adhérent** à A si, pour tout $r > 0$,

$$B(x, r) \cap A \neq \emptyset.$$

On appelle **adhérence** de A l'ensemble noté $\overline{A}$ des points adhérents à A.

Remarque 18.

— Pour tout $A \subset E$, $A \subset \overline{A}$.
— Si A, B sont des parties de E avec $A \subset B$, alors $\overline{A} \subset \overline{B}$. La réciproque est fausse.

Exemple 9.

— Soit $a, b \in \mathbb{R}$. Alors $\overline{]a, b[} = [a, b]$.
— Soit $A = \{(a, b) \mid a > \frac{1}{3}\} \subset \mathbb{R}^2$. Alors $\overline{A} = \{(a, b) \mid a \geq \frac{1}{3}\}$.

Proposition 26.

Soit $A \subset E$. Alors :

$$\left(\overline{A}\right)^c = \widehat{A^c}^{\circ}, \quad \overline{A} = \left(\widehat{A^c}^{\circ}\right)^c \quad \text{et} \quad \mathring{A} = \left(\overline{(A^c)}\right)^c$$

Proposition 27.

Soit $A \subset E$.
- $\overline{A}$ est le plus petit fermé contenant A.
- A est fermé si, et seulement si, $A = \overline{A}$.

7. Frontière

Définition 27. *Frontière d'une partie*

Soit $A \subset E$.
On appelle **frontière** de A l'ensemble noté $\mathrm{Fr}(A)$ (ou ∂A) défini par :

$$\mathrm{Fr}(A) = \overline{A} \setminus \mathring{A}.$$

Exemple 10.

- La frontière de $[a, b[$ est la paire $\{a, b\}$.
- La frontière de $A = \{(a, b) \mid a < \frac{1}{3}\}$ dans $\mathbb{R}^2$ muni de la norme euclidienne, est l'ensemble $\mathrm{Fr}(A) = \{(a, b) \mid a = \frac{1}{3}\}$.

8. Caractérisation séquentielle des fermés

a. Caractérisation séquentielle des points adhérents.

Proposition 28. *Caractérisation séquentielle des points adhérents*

Soit $A \subset E$ et $x \in E$.
L'élément x appartient à $\overline{A}$ si, et seulement si, il existe une suite à valeurs dans A qui converge vers x.

b. Caractérisation séquentielle des fermés.

Théorème 1. *Caractérisation séquentielle des fermés*

Soit $A \subset E$
La partie A est fermée si, et seulement si, la limite de toute suite convergente à valeurs dans A appartient à A.

9. Densité

Définition 28. *Densité*

Soit A une partie de E. On dit qu'une partie D de A est **dense** dans A si $A \subset \overline{D}$.

Proposition 29.

Soit $A \subset E$ et $D \subset A$. On a équivalence entre :

i) D est dense dans A ;

ii) pour tout $a \in A$ et pour tout $r > 0$, il existe $x \in D$ tel que $\|x - a\| \leq r$;

iii) pour tout $a \in A$, il existe une suite d'éléments de D qui converge vers a.

Exemple 11.

— L'ensemble $\mathbb{R}^*$ est dense dans $\mathbb{R}$.
— L'intervalle $]a, b[$ est dense dans $[a, b]$.

10. Ouverts, fermés et voisinages relatifs

Définition 29. *Ouvert relatif, fermé relatif et voisinage relatif*

Soit $A \subset E$.

— Soit $U \subset E$. On dit que U est un **ouvert relatif** de A s'il existe un ouvert U' de E tel que $U = U' \cap A$.
— Soit $F \subset E$. On dit que F est un **fermé relatif** de A s'il existe un fermé F' de E tel que $F = F' \cap A$.
— Soit $x_0 \in E$ et $V \subset E$. On dit que V est un **voisinage de x_0 relatif** de A s'il existe un voisinage V' de x_0 dans E tel que $V = V' \cap A$.

Remarque 19.

Si $A = E$, les notions *relatives* coïncident avec les définitions déjà vues d'ouverts, de fermés et de voisinages.
Mais si A est strictement inclus dans E, les ouverts, fermés et voisinages relatifs ne sont, en général, pas des ouverts, des fermés et des voisinages de E respectivement.

Partie D
Comparaison de normes

Dans toute cette partie, E est un espace vectoriel sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

On a discuté tout au long des parties précédentes, de propriétés d'ensembles ou de convergence de suites, qui ne sont pas en général invariantes par changement de norme dans notre espace E. Par exemple, on a vu dans les exercices précédents, que la suite (f_n) de $C([0,1],\mathbb{R})$ donnée, pour $n \in \mathbb{N}$, par $f_n : t \mapsto t^n$, est convergente pour la norme de la convergence en moyenne mais pas pour la norme de la convergence uniforme.

On peut alors légitimement se demander quelles conditions sur deux normes N_1 et N_2 sur E données pourraient nous permettre d'assurer que si une certaine propriété est vraie pour N_1, alors elle l'est également sur N_2.
Voici tout l'enjeu du chapitre "Comparaison de normes".

1. Domination de normes

Définition 30.

Soit N_1, N_2 des normes sur E. On dit que N_1 est **dominée** par N_2 s'il existe un réel $C > 0$ tel que $N_1 \leq CN_2$ i.e. pour tout $x \in E$:

$$N_1(x) \leq CN_2(x).$$

Dans ce cas, on dira également que la norme N_2 est **plus fine** que N_1.

Proposition 30.

Soit N_1, N_2 des normes sur E. N_1 est dominée par N_2, si, et seulement si, il existe $C > 0$ tel que pour tout $x \in E$, $N_2(x) \leq 1$ implique $N_1(x) \leq C$.

Autrement dit, N_1 est dominée par N_2, si, et seulement si, il existe $C > 0$ tel que la boule unité fermée pour la norme N_2 est incluse dans la boule fermée pour la norme N_1 de centre 0_E et de rayon C.

Exemple 12.

Sur $\mathbb{R}^2$, en examinant les boules unités des normes un, deux et infini, on peut, dans un premier temps, remarquer les relations suivantes :

la norme un est plus fine que la norme deux qui est plus fine que la norme infinie, i.e.

$$\|\cdot\|_\infty \leq \|\cdot\|_2 \leq \|\cdot\|_1.$$

Pour comprendre la terminologie de "finesse" précédente qui pourrait sembler paradoxale au premier abord, il faut étudier les conséquences de la domination en termes de boules et d'ouverts pour chaque norme :

Proposition 31.

Soit N_1,N_2 des normes sur E. On suppose que N_1 est dominée par N_2. Alors toute boule fermée pour N_1 contient une boule fermée pour N_2.

Remarque 20.

On peut remplacer les mentions "boule fermée" dans la proposition précédente par "boule ouverte" et même seulement l'une des deux.

Corollaire 4.

Soit N_1,N_2 des normes sur E. On suppose que N_1 est dominée par N_2. Alors un ouvert (resp. un fermé, resp. un voisinage d'un point $x_0 \in E$) pour la norme N_1 est un ouvert pour la norme N_2 (resp. un fermé, resp. un voisinage de x_0).

En ce qui concerne les notions d'ensemble ou d'application bornée et de convergence de suites, la norme dominante les transmet à la norme dominée :

Proposition 32.

Soit N_1,N_2 des normes sur E. On suppose que N_1 est dominée par N_2. Alors une partie bornée pour N_2 est une partie bornée pour N_1.

Corollaire 5.

Soit N_1,N_2 des normes sur E. On suppose que N_1 est dominée par N_2.

- Toute application d'un ensemble X dans E bornée pour la norme N_2, est bornée pour la norme N_1.
- Toute suite à valeurs dans E bornée pour la norme N_2 est bornée pour la norme N_1.

Proposition 33.

Soit N_1,N_2 des normes sur E. On suppose que N_1 est dominée par N_2. Si une suite à valeurs dans E converge vers $\ell \in E$ pour la norme N_2, alors elle converge vers ℓ pour la norme N_1.

Remarque 21.

Ainsi, pour montrer qu'une norme N_1 n'est pas dominée par N_2, il suffit d'exhiber une suite qui converge pour N_2 mais pas pour N_1.

2. Normes équivalentes

a. Définition

Définition 31. *Normes équivalentes*

Soit N_1, N_2 des normes sur E. On dit que N_1 et N_2 sont équivalentes s'il existe des constantes $c > 0$ et $C > 0$ telles que :

$$cN_1(x) \leq N_2(x) \leq CN_1(x).$$

Proposition 34.

Soit N_1, N_2 des normes sur E. N_1 et N_2 sont équivalentes si, et seulement si, N_1 est dominée par N_2 et N_2 est dominée par N_1.

b. Propriétés invariantes par passage à une norme équivalente

Théorème 2. *Conservation des ouverts, fermés et voisinage*

Soit N_1,N_2 des normes sur E. On suppose que N_1 et N_2 sont équivalentes.

Une partie est un ouvert (resp. un fermé, resp. un voisinage d'un point $x_0 \in E$) pour la norme N_1 si, et seulement si, elle est un ouvert pour la norme N_2 (resp. un fermé, resp. un voisinage de x_0).

Théorème 3. *Conservation du caractère borné d'une partie*

Soit N_1,N_2 deux normes sur E. On suppose que N_1 et N_2 sont équivalentes.

Une partie est bornée pour N_1 si, et seulement si, elle est bornée pour N_2.

Corollaire 6.

Soit N_1,N_2 deux normes sur E. On suppose que N_1 et N_2 sont équivalentes.

— Une application d'un ensemble X dans E est bornée pour la norme N_1 si, et seulement si, est bornée pour la norme N_2.

— Une suite à valeurs dans E bornée pour la norme N_1 si, et seulement si, elle est bornée pour la norme N_2.

Théorème 4. *Conservation de la convergence d'une suite*

Soit N_1,N_2 des normes sur E. On suppose que N_1 et N_2 sont équivalentes. Une suite à valeurs dans E converge vers $\ell \in E$ pour la norme N_1 si, et seulement si, elle converge vers ℓ pour la norme N_2.

c. Exercices types

Exercice 1. *Banque CCP 37*

On note E l'espace vectoriel des applications continues de $[0;1]$ dans $\mathbb{R}$.

On pose : $\forall\, f \in E,\ N_\infty(f) = \sup_{x\in[0;1]} |f(x)|$ et $N_1(f) = \int_0^1 |f(t)|\mathrm{d}t$.

1. (a) Démontrer que N_∞ et N_1 sont deux normes sur E.
   (b) Démontrer qu'il existe $k > 0$ tel que, pour tout f de E, $N_1(f) \leq kN_\infty(f)$.
   (c) Démontrer que tout ouvert pour la norme N_1 est un ouvert pour la norme N_∞.
2. Démontrer que les normes N_1 et N_∞ ne sont pas équivalentes.

Exercice 2.

On considère l'espace vectoriel $E = C^1([0,1],\mathbb{R})$ des fonctions de classe C^1 de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ et la norme $\|\cdot\|_\infty$ sur E.

1. Pour $f \in E$, on pose :
$$N(f) = |f(0)| + \|f'\|_\infty$$
Montrer que N est une norme sur E.
2. Pour $f \in E$, on pose :
$$N'(f) = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$$
Montrer que N' est une norme sur E.
3. Montrer que N et N' sont équivalentes.
4. Les normes N et N' sont-elles équivalentes à $\|\cdot\|_\infty$?

Partie E

Limites et continuité

Dans toute cette partie, $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ désignent deux espaces vectoriels normés sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
Quand on considérera une partie A incluse dans E, on supposera toujours - sans le dire - que A est non vide.

1. Limite d'une application

a. Généralités

Définition 32. *Limite*

Soit $A \subset E$, $f : A \to F$ une application, $a \in \overline{A}$ et $\ell \in F$.
On dit que f **admet pour** ℓ **limite en** a ou **tend vers** ℓ **en** a si :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall x \in A, \quad \|x - a\|_E \leq \delta \ \Rightarrow\ \|f(x) - \ell\|_F \leq \varepsilon.$$

Proposition 35.

Soit $A \subset E$, $f : A \to F$ une application, $a \in \overline{A}$ et $\ell \in F$. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :

i) f tend vers ℓ en a ;

ii) $\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ f(B_f(a, \delta) \cap A) \subset B_f(\ell, \varepsilon)$;

iii) pour tout voisinage V de ℓ dans F, il existe un voisinage W de a dans E tel que $f(W \cap A) \subset V$.

Proposition 36.

Soit $A \subset E$, $f : A \to F$ et $a \in \overline{A}$.
Si f admet une limite en a, alors cette limite est unique.

Notation 5.

Soit $A \subset E$, $f : A \to F$, $a \in \overline{A}$ et $\ell \in F$. Si f admet ℓ pour limite en a, on note :

$$\lim_{x \to a} f(x) = \ell.$$

b. Limites et infini

Dans la définition suivante, on se placera dans le cas où $F = \mathbb{R}$ pour considérer des limites infinies :

Définition. Limite infinie

Soit $A \subset E$, $f : A \to \mathbb{R}$ et $a \in \overline{A}$.

— On dit que f tend vers $+\infty$ en a, et on note $\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$, si :

$$\forall R \geq 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall x \in A, \quad \|x - a\|_E \leq \delta \ \Rightarrow \ f(x) \geq R.$$

— On dit que f tend vers $-\infty$ en a, et on note $\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$, si :

$$\forall R \geq 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall x \in A, \quad \|x - a\|_E \leq \delta \ \Rightarrow \ f(x) \leq -R.$$

Pour cette définition, on se place dans le cas où $A = E = \mathbb{R}$ pour considérer des limites en $\pm\infty$:

Définition. Limite en $\pm\infty$

Soit $f : \mathbb{R} \to F$ et $\ell \in F$

— On dit que f tend vers ℓ en $+\infty$, et on note $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \ell$, si :

$$\forall \varepsilon \geq 0,\ \exists R > 0,\ \forall x \in \mathbb{R}, \quad x \geq R \ \Rightarrow \ \|f(x) - \ell\|_F \leq \varepsilon.$$

— On dit que f tend vers ℓ en $-\infty$, et on note $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \ell$, si :

$$\forall \varepsilon \geq 0,\ \exists R > 0,\ \forall x \in \mathbb{R}, \quad x \leq -R \ \Rightarrow \ \|f(x) - \ell\|_F \leq \varepsilon.$$

On considère désormais le cas où A n'est pas bornée et $\|x\| \to +\infty$:

Définition.

Soit $A \subset E$ une partie non bornée, $f : A \to F$ et $\ell \in F$.
On dit que f **tend vers** ℓ **quand** $\|x\|$ **tend vers** $+\infty$, et on note $\lim\limits_{\|x\| \to +\infty} f(x) = \ell$ si :

$$\forall \varepsilon \geq 0,\ \exists R > 0,\ \forall x \in A, \quad \|x\|_E \geq R \ \Rightarrow\ \|f(x) - \ell\|_F \leq \varepsilon.$$

c. Caractérisation séquentielle de la limite

Théorème 5. *Caractérisation séquentielle de la limite*

Soit $A \subset E$, $f : A \to F$, $a \in \overline{A}$ et $\ell \in F$.
Alors f tend vers ℓ en a si, et seulement si, pour tout suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans A telle que $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a$,

$$f(u_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell.$$

Autrement dit, f tend vers ℓ en a si, et seulement si, pour tout suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans A qui converge vers a, la suite $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans F converge vers ℓ.

2. Propriétés des limites

a. Opérations algébriques

Proposition 37. *Espace vectoriel des fonctions convergentes*

Soit $A \subset E$ et $a \in \overline{A}$. L'ensemble des fonctions de A dans F qui admettent une limite en a est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$, et l'application qui à f associe sa limite en a est linéaire.

Proposition 38.

Soit $A \subset E$, $a \in \overline{A}$, $f : A \to F$, $\varphi : A \to \mathbb{K}$, $\ell \in F$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.
Si $\lim_{x\to a} f(x) = \ell$ et $\lim_{x\to a} \varphi(x) = \lambda$, alors l'application $\varphi.f : A \to F$ définie par :

$$(\varphi.f) : x \mapsto \varphi(x)f(x)$$

admet pour limite $\lambda\ell$ en a.

b. Espace produit

On considère dans ce paragraphe F_1 et F_2, deux espaces vectoriels normés sur $\mathbb{K}$ et l'espace vectoriel $F = F_1 \times F_2$ muni de la norme produit.

Proposition 39.

Soit $A \subset E$, $a \in \overline{A}$, $\ell = (\ell_1, \ell_2) \in F_1 \times F_2$ et $f = (f_1, f_2) : A \to F_1 \times F_2$.
Alors $\lim_{x\to a} f(x) = \ell$ si, et seulement si, $\lim_{x\to a} f_1(x) = \ell_1$ et $\lim_{x\to a} f_2(x) = \ell_2$.

c. Limite d'une composée

Proposition 40. *Limite d'une application composée*

Soit $(E, \|\cdot\|_E), (F, \|\cdot\|_F), (G, \|\cdot\|_G)$ des espaces vectoriels normés sur K ; $A \subset E$, $B \subset F$; $a \in \overline{A}$, $b \in \overline{B}$ et $\ell \in G$.
Soit $f : A \to F$ et $g : B \to G$. Si $f(A) \subset B$, $\lim_{x\to a} f(x) = b$ et $\lim_{y\to b} g(y) = \ell$, alors

$$\lim_{x\to a} g \circ f(x) = \ell.$$

3. Applications continues

a. Continuité locale

Définition 33. *Application continue en un point*

Soit $A \subset E$, $a \in A$ et $f : A \to F$.
On dit que f est **continue en** a si f admet une limite en a et $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.

Théorème 6. *Caractérisation séquentielle de la continuité*

Soit $A \subset E$, $a \in A$ et $f : A \to F$.
L'application f est continue en a si, et seulement si, pour toute suite (x_n) à valeurs dans A qui converge vers a,

$$f(x_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(a).$$

b. Continuité globale

Définition 34. *Application continue*

Soit $A \subset E$ et $f : A \to F$.
On dit que f est **continue sur** A si f est continue en tout point de A.

Notation 6.

Soit $A \subset E$. On note $C(A, F)$ l'ensemble des applications continues de A dans F.

c. Propriétés des applications continues

Les propositions suivantes découlent des propriétés des limites (paragraphe 2) établies précédemment.

Proposition 41. *Combinaisons linéaires*

Soit $A \subset E$. L'ensemble $C(A, F)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.

Proposition 42. *Continuité d'une application dans un produit*

Soit $A \subset E$, F_1, F_2 des espaces vectoriels normés et on considère $F = F_1 \times F_2$ muni de la norme produit.

Soit $f = (f_1, f_2)$ une application de A dans F. Alors f est continue sur A si, et seulement si, f_1 et f_2 sont continues sur A.

Remarque 22.

En raisonnant par récurrence, on montre que le résultat précédent est toujours valable pour un produit fini $F_1 \times ... \times F_n$ de n espaces vectoriels normés ($n \in \mathbb{N}^*$).

Proposition 43. *Composition d'applications continues*

La composée de deux applications continues est continue.

Théorème 7. *Continuité et densité*

Soit $A \subset E$, D une partie dense dans A et $f, g : A \to F$ des applications continues sur A.
Si pour tout $x \in D$, $f(x) = g(x)$ (i.e. $f_{|D} = g_{|D}$) alors $f = g$.

4. Applications lipschitziennes

Définition 35.

Soit $k \in \mathbb{R}_+$, $A \subset E$ et $f : A \to F$.
On dit que f est **k-lipschitzienne** ou **lipschitzienne de rapport** k si, pour tout $x, y \in A$:

$$\|f(x) - f(y)\|_F \leq k\|x - y\|_E.$$

On dit que f est **lipschitzienne** s'il existe $k \in \mathbb{R}_+$ tel que f est lipschitzienne de rapport k.

Exemple 13.

— Une norme est une application 1-lipschitzienne.

— Soit $((E_1, \|\cdot\|_1), ..., (E_n, \|\cdot\|_n))$ des espaces vectoriels normés et $E = E_1 \times ... \times E_n$ muni de la norme produit. Les applications coordonnées $(i = 1, ..., n)$:

$$\varphi_i : \left| \begin{array}{ccc} E & \to & E_i \\ x = (x_1, ..., x_n) & \mapsto & x_i \end{array} \right.$$

sont 1-lipschitziennes.

— Soit $A \subset E$. L'application $\left| \begin{array}{ccc} E & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & d(x, A) \end{array} \right.$ est 1-lipschitzienne.

Remarque 23.

La notion de fonction lipschitzienne est invariante par passage à des normes équivalentes (sur l'espace de départ ou celui d'arrivée). Par contre, la constante peut tout de même changer.

Proposition 44.

Toute application lipschitzienne est continue.

5. Continuité et topologie

Théorème 8.

Soit $A \subset E$ et $f : A \to F$. On suppose f continue sur A.

- Soit U un ouvert de F. L'image réciproque $f^{-1}(U)$ de U par f est un ouvert relatif de A.
- Soit C un fermé de F. L'image réciproque $f^{-1}(C)$ de C par f est un fermé relatif de A.

Proposition 45. *Réciproque du théorème précédent*

Soit $A \subset E$ et $f : A \to F$. Si l'image réciproque par f de tout ouvert (resp. fermé) de F est un ouvert (resp. fermé) relatif de A, alors f est continue.

Exemple 14.

— Une boule ouverte (resp. fermée) est un ouvert (resp. fermé) de E. On l'avait déjà démontré directement dans la partie B.

— L'ensemble $\{(x, y) \mid x + y > 0\}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et $\{(x, y) \mid x + y = 2\}$ est un fermé de $\mathbb{R}^2$.

6. Continuité uniforme

Définition 36. *Continuité uniforme*

Soit $A \subset E$ et $f : A \to F$. On dit que f est **uniformément continue** si :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall x, y \in A \quad \|x - y\|_E \leq \delta \ \Rightarrow\ \|f(x) - f(y)\|_F \leq \varepsilon.$$

Proposition 46.

— Toute application uniformément continue est continue.
— Toute application lipschitzienne est uniformément continue.

Remarque 24.

Attention, les réciproques des implications précédentes sont fausses :
— $f : x \mapsto e^x$ est continue mais pas uniformément continue sur $\mathbb{R}$.
— $f : x \mapsto \sqrt{x}$ est uniformément continue mais pas lipschitzienne sur $\mathbb{R}$.

7. Continuité et applications linéaires

On rappelle la notation $\mathcal{L}(E, F)$ pour désigner l'ensemble des applications linéaires de E dans F.

Théorème 9.

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :
i) f est continue ;
ii) f est continue en 0_E ;
iii) il existe $k \geq 0$ tel que, pour tout $x \in E$,

$$\|f(x)\|_F \leq k\|x\|_E.$$

iv) f est lipschitzienne.

Notation 7.

On note $\mathcal{L}_c(E, F)$ l'ensemble des applications linéaires continues de $(E, \|\cdot\|_E)$ dans $(F, \|\cdot\|_F)$.

Proposition 47.

L'ensemble $\mathcal{L}_c(E, F)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.

Proposition 48.

Soit $f \in \mathcal{L}(E,F)$. Alors f est continue si, et seulement si, l'application de $E \setminus \{0_E\}$ dans $\mathbb{R}$:

$$x \mapsto \frac{\|f(x)\|_F}{\|x\|_E}$$

est bornée sur $E \setminus \{0_E\}$.

Proposition 49.

Soit N_1, N_2 des normes sur E. Alors N_1, N_2 sont équivalentes si, et seulement si,

$$Id_E : (E, N_1) \to (E, N_2)$$

et

$$Id_E : (E, N_2) \to (E, N_1).$$

sont continues.

Partie F
Compacité

Dans toute cette partie, E désigne un espace vectoriel normé sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ muni d'une norme $\|\cdot\|$.

1. Définition

Définition 37. *Partie compacte*

Soit $A \subset E$. On dit que A est une partie **compacte** de E si toute suite à valeurs dans A possède au moins une valeur d'adhérence dans A.

Autrement dit, A est compacte si, de toute suite à valeurs dans A, on peut extraire une sous-suite qui converge dans A.

Exemple 15.

— L'ensemble vide est compact ; toute partie finie de E est compacte.

— Dans $\mathbb{R}$, les parties fermées bornées (les segments par exemple) sont compacts : il s'agit (pour "compact" au sens de la définition 37) du théorème de Bolzano-Weierstrass dans $\mathbb{R}$.

2. Propriétés

Proposition 50.

Soit $A \subset E$. Si A est compacte, alors A est fermée et bornée dans E.

Remarque 25.

Attention, la réciproque est fausse en général !

Indication.

Si une suite (u_n) vérifie qu'il existe $\eta > 0$ tel que pour tous $n, m \in \mathbb{N}$ avec $n \neq m$:

$$\|u_n - u_m\| \geq \eta,$$

alors (u_n) ne possède aucune valeur d'adhérence.
Ainsi, pour montrer qu'une partie A n'est pas compacte, il suffit d'exhiber une suite vérifiant la propriété ci-dessus.

Proposition 51.

Soit $A, B \subset E$. On suppose $B \subset A$. Si A est compacte et B est fermée, alors B est compacte.

Théorème 10.

Une suite à valeurs dans un compact est convergente, si, et seulement si, elle possède une unique valeur d'adhérence.

Proposition 52.

Soit E, F des espaces vectoriels normés et $A \subset E$, $B \subset F$. Si A est un compact de E et B un compact de F, alors $A \times B$ est un compact de $E \times F$ muni de la norme produit.

Corollaire 7.

Un produit d'une famille finie de compacts est un compact de l'espace produit muni de la norme infini.

3. Applications continues sur un compact

Dans ce paragraphe, F est un espace vectoriel normé.

Proposition 53.

Soit $A \subset E$ et $f : A \to F$ une application continue sur A. Si A est un compact de E, alors $f(A)$ est un compact de F.

Autrement dit, l'image direct d'un compact par une application continue est un compact.

Corollaire 8. *Conséquences pour $F = \mathbb{R}$*

Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$ et $f : A \to \mathbb{R}$ une application continue. Si A est compacte, alors f est bornée et atteint ses bornes.

Théorème 11. *Théorème de Heine*

Soit $A \subset E$ et $f : A \to F$ une application continue. Si A est compact, alors f est uniformément continue sur A.

Partie G

Connexité par arcs

Dans toute cette partie, E désigne un espace vectoriel normé sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ muni d'une norme $\|\cdot\|$.

1. Chemins

Définition 38. *Chemin*

Soit $x, y \in E$. On appelle **chemin d'extrémités** x **et** y ou **chemin joignant** x **à** y, toute application continue $\gamma : [0,1] \to E$ telle que $\gamma(0) = x$ et $\gamma(1) = y$.

Soit $A \subset E$ et γ un chemin d'extrémités x et y. On dit que γ est un chemin d'extrémités x et y **dans A** si $\mathrm{Im}(\gamma) \subset A$.

Exemple 16.

Pour $x, y \in E$, l'application de $[0,1]$ dans E $\gamma : t \mapsto (1-t)x + ty$ est un chemin d'extrémités x et y. On remarque que pour ce chemin, $\mathrm{Im}(\gamma) = [x, y]$ où $[x, y]$ est le segment d'extrémités x, y.

Remarque 26. *Re-paramétrisation*

Soit $x, y \in E$.

— Soit $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Si $g : [a, b] \to E$ est une application continue telle que $g(a) = x$ et $g(b) = y$ alors il existe un chemin joignant x à y.

— Si γ est un chemin joignant x à y alors $\tilde{\gamma} : t \mapsto \gamma(1-t)$ est un chemin joignant y à x.

2. Connexité par arcs et composantes connexes par arcs

Définition 39.

Soit $A \subset E$. On définit la relation binaire $\mathcal{R}$ suivante sur A : pour $x, y \in A$,

$$x \,\mathcal{R}\, y \text{ si, et seulement si, il existe un chemin d'extrémités } x \text{ et } y \text{ dans } A.$$

Proposition 54.

Soit $A \subset E$. La relation binaire $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence sur A.

Définition 40. *Composantes connexes par arcs*

Soit $A \subset E$. On appelle **composantes connexes par arcs de** A les classes d'équivalence de la relation $\mathcal{R}$.

Définition 41. *Connexité par arcs*

Soit $A \subset E$. On dit que A est **connexe par arcs** si A possède une unique composante connexe par arcs.

Proposition 55.

Soit $A \subset E$. A est connexe par arcs si pour tout couple (x, y) de points de A, il existe un chemin joignant x à y dans A.

Exemple 17.

— Soit $A \subset E$. Si C est une composante connexe par arcs de A, alors C est connexe par arcs.

— Soit $A \subset E$. Si A est convexe, alors A est connexe par arcs.

— Soit $A = \mathbb{R}^* \subset \mathbb{R}$. Alors A n'est par connexe par arcs et ses composantes connexes sont $\mathbb{R}_-^*$ et $\mathbb{R}_+^*$.

— Soit $A = \mathbb{C}^* \subset \mathbb{C}$. Alors A est connexe par arcs.

3. Parties étoilées

Définition 42. *Partie étoilée*

Soit $A \subset E$.
Soit $a \in A$. On dit que A est **étoilée en** a si, pour tout $x \in A$, $[a, x] \in A$.
On dit que A est **étoilée** s'il existe $a \in A$ tel que A est étoilée en a.

Proposition 56.

— Une partie convexe de E est étoilée en chacun de ses points.
— Une partie étoilée de E est connexe par arcs.

4. Parties connexes par arcs de $\mathbb{R}$

Proposition 57.

Les parties convexes de $\mathbb{R}$ sont les intervalles.

Proposition 58.

Les parties connexes par arcs de $\mathbb{R}$ sont les intervalles.

5. Image continue d'une partie connexe par arcs

Théorème 12.

Soit F un espace vectoriel normé, $A \subset E$ et $f : A \to F$ une application continue.
Si A est une partie connexe par arcs de E, alors $f(A)$ est une partie connexe par arcs de F.

Autrement dit : l'image directe d'un connexe par arcs par une application continue est connexe par arcs.

Corollaire 9. *Théorème des valeurs intermédiaires*

Soit $A \subset E$ et $f : A \to \mathbb{R}$ une application continue.
Si A est une partie connexe par arcs de E, alors $f(A)$ est un intervalle ; autrement dit, pour tous $x, y \in A$,

$$[f(x), f(y)] \subset f(A).$$

Partie H

Espaces vectoriels normés de dimension finie

Dans le cas particulier des espaces vectoriels de dimension finie, nous allons voir que la plupart des notions étudiées depuis le début du chapitre sont invariantes par changement de norme. Ainsi, en dimension finie, la topologie s'en trouve grandement simplifiée : l'étude des ouverts et fermés, de la convergence de suite, de limites ou de la continuité des fonctions,... ne dépendent pas du choix des normes !

Dans toute cette partie, n désigne un entier naturel non nul et $\mathbb{K}$ un corps égal à $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1. Équivalence des normes en dimension finie

Lemme 1.

Soit $A \subset \mathbb{K}^n$ où $\mathbb{K}^n$ est muni de la norme infini. A est compact si, et seulement si, A est fermé borné.

Théorème 13.

Dans $\mathbb{K}^n$, toutes les normes sont équivalentes.

Théorème 14.

Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Alors toutes les normes sur E sont équivalentes.

2. Conséquences topologiques

Remarque 27.

On vient de voir qu'en dimension finie, toutes les normes sont équivalentes. D'après les résultats obtenus dans le chapitre relatif à la comparaison de normes, on remarque que de nombreuses propriétés topologiques sont indépendantes de la norme choisie sur un espace vectoriel de dimension finie. Ainsi, les notions suivantes ne dépendent pas de la norme choisie :

— les ouverts, les fermés, les voisinages ;
— l'intérieur, l'adhérence, la frontière des parties ;
— les limites des suites/fonctions, la continuité des fonctions ;
— les parties bornées, compactes, connexes par arcs.

Il sera donc légitime que lorsqu'on parlera dans la suite d'un espace vectoriel normé, on ne précisera plus de quelle norme on munit cet espace et, de plus, on utilisera la norme la plus adaptée dans les démonstrations.

Proposition 59. *convergence et limites en dimension finie*

Soit E un espace vectoriel de dimension finie n sur $\mathbb{K}$, $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E, $\ell = \sum_{i=1}^{n} \ell_i e_i \in E$, A une partie d'un espace vectoriel normé quelconque et $a \in A$.

- Soit $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans E. On note $(u_k^{(1)}), \dots, (u_k^{(n)})$ les suites des coordonnées dans $\mathcal{B}$, i.e. pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$u_k = \sum_{i=1}^{n} u_k^{(i)} e_i.$$

Alors la suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans E converge vers ℓ si, et seulement si, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, la suite $(u_k^{(i)})_{k\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans $\mathbb{K}$ converge vers ℓ_i.

- Soit $f : A \to E$. On note $(f_1, ..., f_n)$ les applications coordonnées dans $\mathcal{B}$, i.e. pour tout $x \in A$:

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x) e_i.$$

Alors, l'application f admet ℓ comme limite en a si, et seulement si, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, l'application f_i admet ℓ_i comme limite en a.

3. Compacité en dimension finie

Dans cette partie, on suppose connu le théorème de Bolzano-Weierstrass dans $\mathbb{R}$ (vu en 1ere année).

Lemme 2.

Dans $\mathbb{C}$ muni du module, toute boule fermée est compacte.

Théorème 15. *Théorème de Bolzano-Weierstrass*

Soit E un espace vectoriel de dimension finie. De toute suite à valeurs dans E bornée on peut extraire une sous-suite convergente.

Autrement dit : toute suite à valeurs dans E bornée possède au moins une valeur d'adhérence.

Théorème 16.

Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Les parties compacts de E sont les parties fermées bornées.

Proposition 60.

Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Tout sous-espace vectoriel de E est fermé.

4. Continuité des applications linéaires, multilinéaires et polynomiales

a. Continuité des applications linéaires

Théorème 17.

Soit E, F des espaces vectoriels normés sur $\mathbb{K}$. Si E est de dimension finie, toute application linéaire de E dans F est continue.
Autrement dit, si E est de dimension finie, $\mathcal{L}_c(E, F) = \mathcal{L}(E, F)$.

b. Continuité des applications multilinéaires

Théorème 18.

Soit E, F, G des espaces vectoriels normés et $f : E \times F \to G$ une application bilinéaire où $E \times F$ est muni de la norme produit. On a équivalence entre les assertions suivantes :

i) f est continue sur $E \times F$;

ii) f est continue en $(0_E, 0_F)$;

iii) f vérifie : il existe $k \geq 0$ telle que pour tout $(x, y) \in E \times F$:

$$\|f(x, y)\|_G \leq k\|x\|_E.\|y\|_F.$$

Corollaire 10.

Soit E, F, G des espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$. Si E et F sont de dimension finie, toute application bilinéaire de $E \times F$ dans G est continue.

Exemple 18.

Soit E un espace euclidien, $(\cdot|\cdot)$ un produit scalaire sur E. Alors $(\cdot|\cdot) : E \times E \to \mathbb{R}$ est continue.

Théorème 19.

Soit $E_1, ..., E_m, G$ des espaces vectoriels normés sur $\mathbb{K}$ et $f : E \to G$ une application m-linéaire où $E = E_1 \times ... \times E_m$ est muni de la norme produit. On a équivalence entre les assertions suivantes :

i) f est continue sur E ;

ii) il existe $k \geq 0$ telle que pour tout $(x_1, ..., x_m) \in E$:

$$\|f(x_1, ..., x_m)\|_G \leq k\|x_1\|_{E_1}...\|x_m\|_{E_m}.$$

Corollaire 11.

Soit $E_1, ..., E_k$ et G des espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$. Si $E_1, ..., E_k$ sont de dimension finie, toute application bilinéaire de $E_1 \times ... \times E_k$ dans G est continue.

Exemple 19.

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ de dimension n et $\mathcal{B}$ une base de E. Alors l'application

$$\det_{\mathcal{B}} : E^n \to \mathbb{K}$$

est continue.

c. Continuité des fonctions polynomiales

Définition 43. *Fonction polynomiale*

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ de dimension finie n, $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_n)$ une base de E et $f : E \to \mathbb{K}$ une application.

On dit que f est une **fonction polynomiale** s'il existe une famille $(\lambda_{k_1,...,k_n})_{(k_1,...,k_n)\in\mathbb{N}^n}$ de scalaires presque tous nuls telle que pour tout $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$,

$$f(x) = \sum_{(k_1,...,k_n)\in\mathbb{N}^n} \lambda_{k_1,...,k_n} x_1^{k_1} ... x_n^{k_n}.$$

Dans ce cas, on dit que le **degré** de f est l'entier :

$$\deg(f) = \max\{k_1 + ... + k_n \mid \lambda_{k_1,...,k_n} \neq 0\}.$$

Exemple 20.

Sur $\mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique,

$$f : (x, y, z) \mapsto x^4 - y^2 z - 2z^3 + 5x^2y^2z^2$$

est une fonction polynomiale de degré 6.

Remarque 28.

Soit E un espace vectoriel de dimension n et $\mathcal{B}$ une base de E. On peut remarquer les faits suivants :

- Soit u l'isomorphisme canonique de $\mathbb{K}^n$ dans E muni de $\mathcal{B}$. Une application f est polynomiale sur E muni de $\mathcal{B}$, si et seulement si, $f \circ u$ est polynomiale sur $\mathbb{K}^n$ muni de sa base canonique.
- La définition de fonction polynomiale ne dépend pas de la base choisie.

Théorème 20.

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ de dimension finie n, $\mathcal{B}$ une base de E et $f : E \to \mathbb{K}$ une application.

Si f est polynomiale, alors f est continue sur E.

Exemple 21.

L'application

$$\det : \left| \begin{array}{ccc} M_n(\mathbb{K}) & \to & \mathbb{K} \\ M & \mapsto & \det(M) \end{array} \right.$$

est continue.