Mathématiques spéciales

Feuille d'exercices n°3

1. Exercices basiques

a. Ouverts, fermés

Exercice 1.

Déterminer si les ensembles suivants sont ouverts ou fermés :

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < |x-1| < 1\} \qquad B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq y\}$$
$$C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| < 1,\ |y| \leq 1\} \qquad D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathbb{Q} \text{ et } y \in \mathbb{Q}\}$$
$$E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \notin \mathbb{Q} \text{ ou } \ y \notin \mathbb{Q}\} \qquad F = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 < 4\}.$$

Exercice 2.

Dans l'espace vectoriel normé $\mathbb{R}$, déterminer si les parties suivantes sont ouvertes ou fermées : $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $[0,1[$, $[0,+\infty[$, $]0,1[\cup\{2\}$, $\{1/n, n \in \mathbb{N}^*\}$, $\bigcap_{n\geq 1}]-1/n, 1/n[$.

Exercice 3.

Soit $\lambda > 0$. Pour tout entier $n \geq 1$, on note B_n le disque

$$B_n = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ \left(x - \frac{1}{n}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{n}\right)^2 \leq \frac{\lambda^2}{n^2}\right\}.$$

1. A quelle condition sur λ a-t-on $B_{n+1} \subset B_n$.
2. Soit $B = \bigcup_{n\geq 1} B_n$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur λ pour que B soit fermé.

Exercice 4.

Soit E un espace vectoriel normé, et A et B deux parties de E. On définit :

$$A + B = \{z \in E;\ \exists x \in A,\ \exists y \in B,\ z = x + y\}.$$

1. Démontrer que si A est ouvert, alors $A + B$ est ouvert.
2. Démontrer que les parties $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ xy = 1\}$ et $B = \{0\} \times \mathbb{R}$ sont fermées.
3. Démontrer que $A + B$ n'est pas fermée.

Exercice 5.

Soit E un espace vectoriel normé et F un sous-espace vectoriel de E. On suppose que F est ouvert. Démontrer que $F = E$.

Exercice 6.

Soit E un espace vectoriel normé et A, B deux parties de E. On suppose que $\inf_{x\in A, y\in B} \|x-y\| > 0$. Démontrer qu'il existe deux ouverts U et V de E tels que $A \subset U$, $B \subset V$ et $U \cap V = \varnothing$.

b. Intérieur, adhérence, frontière

Exercice 7.

Déterminer l'intérieur et l'adhérence des parties de $\mathbb{R}^2$ suivantes :

$$\begin{array}{rcl} A &=& \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2;\ x>0\right\} \\ B &=& \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2;\ xy=1\right\} \\ C &=& \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2;\ xy>1\right\} \\ D &=& \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2\leq 2\right\} \setminus \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid (x-1)^2+y^2<1\right\}. \end{array}$$

Exercice 8.

Soit E un espace vectoriel normé. Montrer que l'adhérence d'une boule ouverte est la boule fermée de même rayon.

Exercice 9.

Soit E un espace vectoriel normé, et V un sous-espace vectoriel de E.

1. Montrer que $\bar{V}$ est un sous-espace vectoriel de E.
2. Montrer que si $\overset{\circ}{V} \neq \varnothing$, alors $V = E$.
3. Application : soit H un hyperplan de E. Démontrer que H est ou bien fermé ou bien dense dans E.

Exercice 10.

On considère sur E l'espace vectoriel des fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ les deux normes suivantes :

$$\|f\|_\infty = \sup_{t\in[0,1]} |f(t)| \text{ et } \|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)|dt.$$

On note $F = \{f \in E;\ f(0) = 0\}$. Déterminer l'adhérence de F dans E pour chacune des deux normes précédentes.

2. Exercices d'entraînement

a. Ouverts, fermés

Exercice 11.

Soit $\lambda > 0$. Pour tout entier $n \geq 1$, on note B_n le disque

$$B_n = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ \left(x - \frac{1}{n}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{n}\right)^2 \leq \frac{\lambda^2}{n^2}\right\}.$$

1. A quelle condition sur λ a-t-on $B_{n+1} \subset B_n$.
2. Soit $B = \bigcup_{n\geq 1} B_n$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur λ pour que B soit fermé.

Exercice 12.

Soit E un espace vectoriel normé, et A et B deux parties de E. On définit :

$$A + B = \{z \in E;\ \exists x \in A,\ \exists y \in B,\ z = x + y\}.$$

1. Démontrer que si A est ouvert, alors $A + B$ est ouvert.
2. Démontrer que les parties $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ xy = 1\}$ et $B = \{0\} \times \mathbb{R}$ sont fermées.
3. Démontrer que $A + B$ n'est pas fermée.

Exercice 13.

Soit E un espace vectoriel normé et A, B deux parties de E. On suppose que $\inf_{x\in A, y\in B} \|x-y\| > 0$. Démontrer qu'il existe deux ouverts U et V de E tels que $A \subset U$, $B \subset V$ et $U \cap V = \varnothing$.

b. Intérieur, adhérence, frontière

Exercice 14.

Soit E l'espace vectoriel des fonctions continues sur $[0,1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, muni de $\|\cdot\|_\infty$. On note D l'ensemble des fonctions de E qui sont dérivables et P l'ensemble des fonctions de E qui sont polynomiales. Déterminer l'intérieur de D et de P.

Exercice 15.

Soient A, B deux parties d'un espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|)$.

1. On suppose $A \subset B$. Démontrer que $\mathring{A} \subset \mathring{B}$ et que $\bar{A} \subset \bar{B}$.
2. Démontrer que $(A \cap B)^\circ = \mathring{A} \cap \mathring{B}$ et que $\mathring{A} \cup \mathring{B} \subset (A \cup B)^\circ$, mais que l'inclusion peut être stricte.

3. Comparer $\overline{A \cap B}$ et $\bar{A} \cap \bar{B}$, puis $\overline{A \cup B}$ et $\bar{A} \cup \bar{B}$.

Exercice 16.

Soit C une partie convexe d'un espace vectoriel normé. Démontrer que l'adhérence de C est convexe, puis que l'intérieur de C est convexe.

Exercice 17.

Donner un exemple d'ensemble A tel que A, l'adhérence de A, l'intérieur de A, l'adhérence de l'intérieur de A et l'intérieur de l'adhérence de A sont des ensembles distincts deux à deux.

3. Exercices d'approfondissement

a. Ouverts, fermés

Exercice 18.

Dans cet exercice, la notation (x, y) désigne le segment $[x, y]$ ou le segment $[y, x]$ suivant l'ordre de x et de y. On considère U un ouvert de $\mathbb{R}$. On définit une relation sur les éléments de U par

$$x \mathcal{R} y \iff (x, y) \subset U.$$

1. Démontrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence. Pour $x \in U$, on note $C(x)$ la classe d'équivalence de x.
2. Démontrer que $C(x)$ est un intervalle.
3. Démontrer que $C(x)$ est un intervalle ouvert.
4. En déduire que U est réunion d'intervalles ouverts deux à deux disjoints.

Exercice 19.

Soit E l'espace vectoriel des suites bornées, muni de la norme $\|u\|_\infty = \sup_{n \in \mathbb{N}} |u_n|$. Déterminer si les ensembles suivants sont fermés ou non :

$$A = \{\text{suites croissantes}\}, \;\; B = \{\text{suites convergeant vers } 0\}.$$

b. Intérieur, adhérence, frontière

Exercice 20.

Soit A une partie d'un espace vectoriel normé E. On rappelle que la frontière de A est l'ensemble $\mathrm{Fr}(A) = \bar{A} \setminus \overset{\circ}{A} = \bar{A} \cap \overline{C_E A}$. Montrer que :

1. $\mathrm{Fr}(A) = \{x \in E \mid \forall \epsilon > 0, B(x, \epsilon) \cap A \neq \emptyset \text{ et } B(x, \epsilon) \cap C_E A \neq \emptyset\}$.
2. $\mathrm{Fr}(A) = \mathrm{Fr}(C_E A)$.
3. A est fermé si et seulement si $\mathrm{Fr}(A)$ est inclus dans A.
4. A est ouvert si et seulement si $\mathrm{Fr}(A) \cap A = \emptyset$.
5. Montrer que si A est fermé, alors $\mathrm{Fr}(\mathrm{Fr}(A)) = \mathrm{Fr}(A)$.

Exercice 21.

Soit E un espace vectoriel normé Soit A une partie non vide et bornée de E. On définit $\mathrm{diam}(A) = \sup\{\|y - x\|, x, y \in A\}$.

1. Démontrer que $\bar{A}$ et $\mathrm{Fr}(A)$ sont également bornés.
2. Comparer $\mathrm{diam}(A)$, $\mathrm{diam}(\mathring{A})$ et $\mathrm{diam}(\bar{A})$ lorsque $\mathring{A}$ est non vide.
3. (a) Montrer que $\mathrm{diam}(\mathrm{Fr}(A)) \leq \mathrm{diam}(A)$.
   (b) Soit x un élément de A, et u un élément de E avec $u \neq 0$. On considère l'ensemble $X = \{t \geq 0 \mid x + tu \in A\}$. Montrer que $\sup X$ existe.
   (c) En déduire que toute demi-droite issue d'un point x de A coupe $\mathrm{Fr}(A)$.
   (d) En déduire que $\mathrm{diam}(\mathrm{Fr}(A)) = \mathrm{diam}(A)$.