Corrigé de la feuille d'exercices n°3

1. Exercices basiques

a. Ouverts, fermés

Exercice 1.

Déterminer si les ensembles suivants sont ouverts ou fermés :

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < |x-1| < 1\} \qquad B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le x \le y\}$$
$$C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| < 1,\ |y| \le 1\} \qquad D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathbb{Q} \text{ et } y \in \mathbb{Q}\}$$
$$E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \notin \mathbb{Q} \text{ ou } \ y \notin \mathbb{Q}\} \qquad F = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 4\}.$$

Correction.

A et F sont ouverts. B est fermé, les autres ne sont ni ouverts ni fermés. Voici une preuve variant les techniques :

1. A est ouvert. En effet, si $(x,y) \in A$, alors $0 < |x-1| < 1$, c'est-à-dire que $x \neq 1$ et $0 < x < 2$. On sait alors qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $1 \notin]x-\varepsilon, x+\varepsilon[$ et $0 < x-\varepsilon < x+\varepsilon < 2$. Alors, $B((x,y),\varepsilon)$ (pour la norme infinie) est contenue dans A. A n'est pas fermé, car la suite (u_n) définie par $u_n = (1/n, 0)$ est une suite d'éléments de A qui converge vers $(0,0)$ qui n'est pas dans A.
2. B est fermé. Si (x_n, y_n) est une suite d'éléments de B qui converge vers (x,y), alors on sait que pour chaque entier n, on a $0 \le x_n \le y_n$. En passant à la limite, on en déduit que $0 \le x \le y$ et donc que $(x,y) \in B$. B n'est pas ouvert : dans toute boule contenant $(0,0)$, il y a des points qui ne sont pas dans B (les points du type $(-\varepsilon, 0)$ par exemple).
3. C n'est pas fermé, car si $u_n = (1-\frac{1}{n}, 1)$, (u_n) est une suite d'éléments de C qui converge vers $(1,1)$ qui n'est pas dans C. C n'est pas ouvert, car toute boule contenant le point $(0,1)$, qui est dans C, contient des éléments qui ne sont pas dans C (par exemple les points $(0, 1+\varepsilon)$).
4. D n'est pas fermé : si (r_n) est une suite de rationnels convergeant vers $\sqrt{2}$, alors la suite $(r_n, 0)$ est une suite d'éléments de D qui converge vers $(\sqrt{2}, 0)$ qui n'est pas élément de D. D n'est pas ouvert. Dans toute boule de centre $(0,0)$, qui est élément de D, il existe des éléments qui ne sont pas dans D, par exemple les éléments du type $(0, \sqrt{2}/n)$.
5. E n'est pas ouvert car son complémentaire, D, n'est pas fermé. E n'est pas fermé car son complémentaire n'est pas ouvert.
6. F est ouvert car c'est l'image réciproque de l'intervalle ouvert $]-\infty, 4[$ par la fonction continue $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = x^2 + y^2$. F n'est pas fermé, car la suite (u_n) définie par $u_n = (2-\frac{1}{n}, 0)$ est une suite d'éléments de D qui converge vers $(2,0)$ qui n'est pas élément de F.

Exercice 2.

Dans l'espace vectoriel normé $\mathbb{R}$, déterminer si les parties suivantes sont ouvertes ou fermées : $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $[0,1[$, $[0,+\infty[$, $]0,1[\cup\{2\}$, $\{1/n, n\in\mathbb{N}^*\}$, $\bigcap_{n\geq 1}]-1/n,1/n[$.

Correction.

$\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}$ sont fermés, car toute suite d'entiers naturels (resp. d'entiers relatifs) convergente a sa limite qui est un entier naturel (resp. un entier relatif). $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}$ ne sont pas ouverts. En effet, $0\in\mathbb{N}$ et aucune boule ouverte centrée en 0 n'est contenue dans $\mathbb{N}$ (une boule ouverte est ici un intervalle ouvert du type $]-\varepsilon,\varepsilon[$). $\mathbb{Q}$ n'est ni fermé, ni ouvert. Il n'est pas fermé, car par exemple il existe une suite de rationnels qui converge vers l'irrationnel $\sqrt{2}$. Il n'est pas ouvert, car par exemple tout intervalle ouvert centré en 0 contient des irrationnels. $[0,1[$ n'est pas fermé. La suite (u_n) définie par $u_n=1-\frac{1}{n}$ est contenue dans $[0,1[$, converge vers 1, mais $1\notin[0,1[$. $[0,1[$ n'est pas ouvert, car aucun intervalle ouvert centré en 0 n'est contenu dans $[0,1[$. Pour la même raison, $[0,+\infty[$ n'est pas ouvert. En revanche, $[0,+\infty[$ est fermé : pour toute suite (x_n) de réels positifs qui converge vers ℓ, alors ℓ est un réel positif. $]0,1[\cup\{2\}$ n'est pas fermé (prendre la même suite que ci-dessus), et n'est pas non plus ouvert (considérer les intervalles ouverts centrés en 2). $\{1/n, n\in\mathbb{N}^*\}$ n'est pas ouvert (considérer les intervalles ouverts centrés en 1), et n'est pas non plus fermé. En effet, la suite (x_n) définie par $x_n=\frac{1}{n}$ pour $n\geq 1$ est contenue dans cet ensemble, mais sa limite, 0, ne l'est pas. Enfin, on peut remarquer que $\bigcap_{n\geq 1}]-1/n,1/n[=\{0\}$. En effet, si $x\in\bigcap_{n\geq 1}]-1/n,1/n[$, alors pour tout $n\geq 1$, on a $-\frac{1}{n}\leq x\leq\frac{1}{n}$ et donc par passage à la limite, $x=0$. Ainsi, cet ensemble est fermé, mais pas ouvert (bien que ce soit une intersection d'ouverts !).

Exercice 3.

Soit $\lambda>0$. Pour tout entier $n\geq 1$, on note B_n le disque

$$B_n=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2;\ \left(x-\frac{1}{n}\right)^2+\left(y-\frac{1}{n}\right)^2\leq\frac{\lambda^2}{n^2}\right\}.$$

1. A quelle condition sur λ a-t-on $B_{n+1}\subset B_n$.
2. Soit $B=\bigcup_{n\geq 1}B_n$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur λ pour que B soit fermé.

Correction.

1. Il est bien connu que le disque de centre A de rayon r est contenu dans le disque de centre B de rayon R si et seulement si $AA'+r\leq R$ (ce dont on peut se convaincre facilement en faisant un dessin). Ici, on en déduit que $B_{n+1}\subset B_n$ si et seulement si

$$\sqrt{2\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)^2}\leq\frac{\lambda}{n}-\frac{\lambda}{n+1}$$

c'est-à-dire si et seulement si $\lambda\geq\sqrt{2}$.

2. Si $\lambda\geq\sqrt{2}$, les ensembles sont emboités les uns dans les autres et $B=B_1$ qui est fermé. Si $\lambda<\sqrt{2}$, alors on vérifie facilement que $(0,0)$ n'est élément d'aucun ensemble B_n. Or, la

suite des centres de B_n, $\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$, est contenue dans B et converge vers $(0,0)$ qui n'est pas dans B. Donc B n'est pas fermé. Ainsi, on a prouvé que B est fermé si et seulement si $\lambda \geq \sqrt{2}$.

Exercice 4.

Soit E un espace vectoriel normé, et A et B deux parties de E. On définit :

$$A + B = \{z \in E;\ \exists x \in A,\ \exists y \in B,\ z = x + y\}.$$

1. Démontrer que si A est ouvert, alors $A + B$ est ouvert.
2. Démontrer que les parties $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ xy = 1\}$ et $B = \{0\} \times \mathbb{R}$ sont fermées.
3. Démontrer que $A + B$ n'est pas fermée.

Correction.

1. Remarquons que :
$$A + B = \bigcup_{b \in B} A + b.$$
La réunion d'une famille (quelconque) d'ouverts étant un ouvert, il suffit de prouver que $A + \{b\} =$ est ouvert pour chaque b de B. Soit $z \in A + \{b\}$, $z = x + b$ avec $x \in A$. Puisque A est ouvert, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B(x, \varepsilon) \subset A$. Mais alors, $B(z, \varepsilon) = B(x + b, \varepsilon) \subset A + b$. En effet, si y est élément de cette boule, $N((y - b) - x) < \varepsilon$, et donc $y - b = a$ avec $a \in B(x, \varepsilon) \subset A$. D'où $y = a + b \in A + \{b\}$.
2. Soit $(u_n) = (x_n, y_n)$ une suite d'éléments de A, convergeant vers $u = (x, y)$. Alors pour tout entier n, on a $x_n y_n = 1$ et donc en passant à la limite, $xy = 1$ ce qui prouve que $u \in A$. Par la caractérisation séquentielle des fermés, on en déduit que A est fermé. B est lui-aussi fermé, en utilisant une démonstration tout à fait similaire, ou parce que le produit cartésien de deux fermés est un fermé.
3. Considérons la suite $(u_n) = (1/n, 1)$. Alors c'est une suite d'éléments de $A + B$ car elle s'écrit $u_n = a_n + b_n$ avec $a_n = (1/n, n) \in A$ et $b_n = (0, 1 - n) \in B$. Elle converge vers $(0, 1)$, qui n'est pas un élément de $A + B$ car tout élément de $A + B$ a sa première coordonnée non nulle.

Exercice 5.

Soit E un espace vectoriel normé et F un sous-espace vectoriel de E. On suppose que F est ouvert. Démontrer que $F = E$.

Correction.

Si F est ouvert, alors puisque $0 \in F$, il existe $r > 0$ tel que $B(0, r) \subset F$. Mais alors, prenons $x \in E$, $x \neq 0$. Alors $y = \frac{rx}{2\|x\|}$ a pour norme $r/2$, c'est donc un élément de F. Puisque F est stable par multiplication par un scalaire, $x = \frac{2\|x\|}{r} y$ est élément de F et donc $F = E$.

Exercice 6.

Soit E un espace vectoriel normé et A, B deux parties de E. On suppose que $\inf_{x\in A, y\in B}\|x-y\|>0$. Démontrer qu'il existe deux ouverts U et V de E tels que $A\subset U$, $B\subset V$ et $U\cap V=\varnothing$.

Correction.

Posons $\delta=\inf_{x\in A,y\in B}\|x-y\|>0$ et soit $U=\bigcup_{a\in A}B(a,\delta/3)$, $V=\bigcup_{b\in B}B(b,\delta/3)$. Alors U et V sont deux ouverts comme réunion (quelconque) d'ouverts. De plus, il est clair que $A\subset U$ et que $B\subset V$. Enfin, si $x\in U$ et $y\in V$, alors il existe $a\in A$ et $b\in B$ avec $\|x-a\|<\delta/3$ et $\|y-b\|<\delta/3$. De plus, on sait que $\|a-b\|\geq\delta$. Il vient en utilisant l'inégalité triangulaire :

$$\|x-y\|\geq\|a-b\|-\|a-x\|-\|b-y\|\geq\delta-\frac{\delta}{3}-\frac{\delta}{3}=\frac{\delta}{3}>0.$$

Ainsi, on a bien $x\neq y$ et $U\cap V=\varnothing$.

b. Intérieur, adhérence, frontière

Exercice 7.

Déterminer l'intérieur et l'adhérence des parties de $\mathbb{R}^2$ suivantes :

$$\begin{aligned}
A &= \big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2;\ x>0\big\}\\
B &= \big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2;\ xy=1\big\}\\
C &= \big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2;\ xy>1\big\}\\
D &= \big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\mid x^2+y^2\leq 2\big\}\setminus\big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\mid (x-1)^2+y^2<1\big\}.
\end{aligned}$$

Correction.

1. Remarquons d'abord que A est une partie ouverte (c'est le demi-plan droit strict) : si $(x,y)\in A$, alors $B((x,y),x/2)$ est contenue dans A. Ainsi, $\mathring{A}=A$. D'autre part, on a $\bar{A}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2;\ x\geq 0\}$. En effet, si (x_n,y_n) est une suite de A qui converge vers (x,y), alors par passage à la limite $x\geq 0$, ce qui prouve que $\bar{A}\subset\{(x,y)\in\mathbb{R}^2;\ x\geq 0\}$. Réciproquement, soit $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ tel que $x\geq 0$. Alors, si $x>0$, $(x,y)\in A\subset\bar{A}$ et si $x=0$, alors prenons la suite (x_n,y_n) définie par $x_n=x+\frac{1}{n}$, $y_n=y$. (x_n,y_n) est une suite de A qui converge vers (x,y), ce qui démontre l'inclusion réciproque.
2. On montre facilement que B est fermé, et donc que $\bar{B}=B$. D'autre part, $\mathring{B}=\varnothing$. En effet, si $(x,y)\in B$, il existe une suite (x_n,y_n) qui n'est pas dans B et qui converge vers x, par exemple $x_n=x+\frac{1}{n}$ et $y_n=y$, on a $x_ny_n=1+\frac{y}{n}\neq 1$ puisque $y\neq 0$.
3. On remarque d'abord que cet ensemble est ouvert (le plus facile est de dire qu'il s'agit de l'image réciproque de l'ouvert $]1,+\infty[$ par l'application continue $\phi(x,y)=xy$). Ainsi, $\mathring{C}=C$. D'autre part, par une démonstration semblable à la démonstration effectuée pour A, on démontre que $\bar{C}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2;\ xy\geq 1\}$.
4. On va écrire l'ensemble D autrement :

$$D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\mid x^2+y^2\leq 2\}\cap\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\mid (x-1)^2+y^2\geq 1\}.$$

Remarquons que D est fermé, et donc $\bar{D} = D$. D'autre part, l'intérieur de l'intersection vaut l'intersection des intérieurs. On a donc :

$$\overset{\circ}{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 < 2\} \cap \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-1)^2+y^2 > 1\}.$$

La frontière est alors :

$$\begin{aligned} \mathrm{Fr}(D) &= \big(\{(x;y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2+y^2 \leqslant 2\} \cap \{(x;y) \in \mathbb{R}^2 | (x-1)^2+y^2 = 1\}\big) \\ &\quad \cup \big(\{(x;y) \in \mathbb{R}^2 | x^2+y^2 = 2\} \cap \{(x;y) \in \mathbb{R}^2 | (x-1)^2+y^2 \geq 1\}.\big) \end{aligned}$$

Exercice 8.

Soit E un espace vectoriel normé. Montrer que l'adhérence d'une boule ouverte est la boule fermée de même rayon.

Correction.

Soit $B = B(x,R)$ une telle boule ouverte, et $y \in \bar{B}$. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe z dans B avec $\|z-y\| \leq \varepsilon$. On en déduit par l'inégalité triangulaire que :

$$\|y-x\| \leq R+\varepsilon,$$

et donc puisque ceci est vérifié pour tout $\varepsilon > 0$, $\|z-x\| \leq R$, ce qui montre une inclusion. D'autre part, si y est dans la boule fermée de centre x et de rayon R, il suffit de se restreindre à y sur la sphère, et si ε est un réel positif, on considère :

$$z = x + (R-\varepsilon)\frac{y-x}{R}.$$

Alors, on a $\|z-x\| \leq R-\varepsilon \implies z \in B$ et $\|z-y\| \leq \varepsilon$. Ceci montre que $y \in \bar{B}$. Bien sûr, on aurait pu faire toute la preuve avec la caractérisation séquentielle, en remplaçant ε par $1/n$ avec $n \to +\infty$.

Exercice 9.

Soit E un espace vectoriel normé, et V un sous-espace vectoriel de E.

1. Montrer que $\bar{V}$ est un sous-espace vectoriel de E.
2. Montrer que si $\overset{\circ}{V} \neq \varnothing$, alors $V = E$.
3. Application : soit H un hyperplan de E. Démontrer que H est ou bien fermé ou bien dense dans E.

Correction.

1. Soit $x, y \in \bar{V}$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. x (resp. y) est limite d'une suite (x_n) (resp. (y_n)) d'éléments de V. Puisque V est un sous-espace vectoriel, la suite
$$z_n = \lambda x_n + \mu y_n$$

évolue dans V. On passe à la limite : z_n converge vers $z = \lambda x + \mu y$, qui est élément de $\bar{V}$ puisque $z_n \in V$.

2. Soit $a \in V$ et $\varepsilon > 0$ tel que $B(a, \varepsilon) \subset V$. Soit $x \in B(0, \varepsilon)$. Puisque $x + a \in B(a, \varepsilon) \subset V$ et que V est un espace vectoriel, on a $x \in V$. D'où $B(0, \varepsilon) \subset V$. Si maintenant $x \neq 0$ est dans E, alors $z = \frac{\varepsilon x}{2\|x\|}$ est dans $B(0, \varepsilon)$, donc dans V, et puisque V est un sous-espace vectoriel, c'est aussi le cas de x.
3. Soit H un hyperplan de E. Alors $\bar{H}$ est un sous-espace vectoriel de E et $H \subset \bar{H}$. Par définition d'un hyperplan (sous-espace vectoriel maximal pour l'inclusion), alors ou bien $H = \bar{H}$ et H est fermé, ou bien $\bar{H} = E$ et H est dense.

Exercice 10.

On considère sur E l'espace vectoriel des fonctions continues de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$ les deux normes suivantes :

$$\|f\|_\infty = \sup_{t \in [0,1]} |f(t)| \text{ et } \|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)| dt.$$

On note $F = \{f \in E;\ f(0) = 0\}$. Déterminer l'adhérence de F dans E pour chacune des deux normes précédentes.

Correction.

Introduisons $L(f) = f(0)$. Alors, pour tout $f \in E$, $|L(f)| \leq \|f\|_\infty$. Ainsi, la forme linéaire L est continue de $(E, \|\cdot\|_\infty)$ dans $(\mathbb{R}, |\cdot|)$. Puisque $F = L^{-1}(\{0\})$, F est un fermé de E pour $\|\cdot\|_\infty$. Ceci ne fonctionne plus avec la norme $\|\cdot\|_1$, et on va au contraire prouver que F est dense dans E pour cette norme. Pour cela, fixons $f \in E$ et, pour $n \geq 1$, considérons f_n la fonction de E qui est égale à f sur $[1/n, 1]$ et qui est affine sur $[0, 1/n]$, avec de plus $f_n(0) = 0$ de sorte que $f_n \in F$. Alors on a

$$\|f_n - f\|_1 = \int_0^{1/n} |f_n(t) - f(t)| dt.$$

Mais, pour tout $t \in [0, 1/n]$, $|f(t)| \leq \|f\|_\infty$. De même, pour tout $t \in [0, 1/n]$, on a

$$|f_n(t)| \leq |f_n(1/n)| = |f(1/n)| \leq \|f\|_\infty.$$

Ainsi,

$$\|f_n - f\|_1 \leq \int_0^{1/n} \big(|f(t)| + |f_n(t)|\big) dt \leq \frac{2\|f\|_\infty}{n}.$$

On a bien $f_n \to f$ pour la norme $\|\cdot\|_1$, et F est dense dans E.

2. Exercices d'entraînement

a. Ouverts, fermés

Exercice 11.

Soit $\lambda > 0$. Pour tout entier $n \geq 1$, on note B_n le disque

$$B_n = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ \left(x - \frac{1}{n}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{n}\right)^2 \leq \frac{\lambda^2}{n^2}\right\}.$$

1. A quelle condition sur λ a-t-on $B_{n+1} \subset B_n$.
2. Soit $B = \bigcup_{n\geq 1} B_n$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur λ pour que B soit fermé.

Correction.

1. Il est bien connu que le disque de centre A de rayon r est contenu dans le disque de centre B de rayon R si et seulement si $AA' + r \leq R$ (ce dont on peut se convaincre facilement en faisant un dessin). Ici, on en déduit que $B_{n+1} \subset B_n$ si et seulement si
$$\sqrt{2\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)^2} \leq \frac{\lambda}{n} - \frac{\lambda}{n+1}$$
c'est-à-dire si et seulement si $\lambda \geq \sqrt{2}$.
2. Si $\lambda \geq \sqrt{2}$, les ensembles sont emboités les uns dans les autres et $B = B_1$ qui est fermé. Si $\lambda < \sqrt{2}$, alors on vérifie facilement que $(0,0)$ n'est élément d'aucun ensemble B_n. Or, la suite des centres de B_n, $\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$, est contenue dans B et converge vers $(0,0)$ qui n'est pas dans B. Donc B n'est pas fermé. Ainsi, on a prouvé que B est fermé si et seulement si $\lambda \geq \sqrt{2}$.

Exercice 12.

Soit E un espace vectoriel normé, et A et B deux parties de E. On définit :

$$A + B = \{z \in E;\ \exists x \in A,\ \exists y \in B,\ z = x + y\}.$$

1. Démontrer que si A est ouvert, alors $A + B$ est ouvert.
2. Démontrer que les parties $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ xy = 1\}$ et $B = \{0\} \times \mathbb{R}$ sont fermées.
3. Démontrer que $A + B$ n'est pas fermée.

Correction.

1. Remarquons que :
$$A + B = \bigcup_{b \in B} A + b.$$
La réunion d'une famille (quelconque) d'ouverts étant un ouvert, il suffit de prouver que $A + \{b\} =$ est ouvert pour chaque b de B. Soit $z \in A + \{b\}$, $z = x + b$ avec $x \in A$. Puisque A est ouvert, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B(x, \varepsilon) \subset A$. Mais alors, $B(z, \varepsilon) = B(x + b, \varepsilon) \subset A + b$. En effet, si y est élément de cette boule, $N((y - b) - x) < \varepsilon$, et donc $y - b = a$ avec $a \in B(x, \varepsilon) \subset A$. D'où $y = a + b \in A + \{b\}$.

2. Soit $(u_n) = (x_n, y_n)$ une suite d'éléments de A, convergeant vers $u = (x, y)$. Alors pour tout entier n, on a $x_n y_n = 1$ et donc en passant à la limite, $xy = 1$ ce qui prouve que $u \in A$. Par la caractérisation séquentielle des fermés, on en déduit que A est fermé. B est lui-aussi fermé, en utilisant une démonstration tout à fait similaire, ou parce que le produit cartésien de deux fermés est un fermé.
3. Considérons la suite $(u_n) = (1/n, 1)$. Alors c'est une suite d'éléments de $A + B$ car elle s'écrit $u_n = a_n + b_n$ avec $a_n = (1/n, n) \in A$ et $b_n = (0, 1 - n) \in B$. Elle converge vers $(0, 1)$, qui n'est pas un élément de $A + B$ car tout élément de $A + B$ a sa première coordonnée non nulle.

Exercice 13.

Soit E un espace vectoriel normé et A, B deux parties de E. On suppose que $\inf_{x\in A, y\in B} \|x-y\| > 0$. Démontrer qu'il existe deux ouverts U et V de E tels que $A \subset U$, $B \subset V$ et $U \cap V = \varnothing$.

Correction.

Posons $\delta = \inf_{x\in A, y\in B} \|x - y\| > 0$ et soit $U = \bigcup_{a\in A} B(a, \delta/3)$, $V = \bigcup_{b\in B} B(b, \delta/3)$. Alors U et V sont deux ouverts comme réunion (quelconque) d'ouverts. De plus, il est clair que $A \subset U$ et que $B \subset V$. Enfin, si $x \in U$ et $y \in V$, alors il existe $a \in A$ et $b \in B$ avec $\|x - a\| < \delta/3$ et $\|y - b\| < \delta/3$. De plus, on sait que $\|a - b\| \geq \delta$. Il vient en utilisant l'inégalité triangulaire :

$$\|x - y\| \geq \|a - b\| - \|a - x\| - \|b - y\| \geq \delta - \frac{\delta}{3} - \frac{\delta}{3} = \frac{\delta}{3} > 0.$$

Ainsi, on a bien $x \neq y$ et $U \cap V = \varnothing$.

b. Intérieur, adhérence, frontière

Exercice 14.

Soit E l'espace vectoriel des fonctions continues sur $[0, 1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, muni de $\|\cdot\|_\infty$. On note D l'ensemble des fonctions de E qui sont dérivables et P l'ensemble des fonctions de E qui sont polynomiales. Déterminer l'intérieur de D et de P.

Correction.

On va prouver que l'intérieur de D est vide. Pour cela, prenons $f \in D$ et construisons une suite de fonctions f_n dans D^c qui converge vers f pour $\|\cdot\|$. Pour cela, considérons $g(x) = |x - \frac{1}{2}|$, de sorte que $\|g\|_\infty = \frac{1}{2}$. Mais alors, posons

$$f_n(x) = f(x) + \frac{1}{n} g(x).$$

Alors $\|f_n - f\|_\infty = \frac{1}{n}\|g\|_\infty \leq \frac{1}{2n} \to 0$. Et de plus, f_n n'est pas dérivable en $1/2$ car g ne l'est pas alors que f l'est. Donc $f_n \in D^c$, ce qui achève la preuve que l'intérieur de D est vide. Puisque $P \subset D$, l'intérieur de P est vide lui aussi.

Exercice 15.

Soient A, B deux parties d'un espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|)$.

1. On suppose $A \subset B$. Démontrer que $\mathring{A} \subset \mathring{B}$ et que $\bar{A} \subset \bar{B}$.
2. Démontrer que $(A \cap B)^\circ = \mathring{A} \cap \mathring{B}$ et que $\mathring{A} \cup \mathring{B} \subset (A \cup B)^\circ$, mais que l'inclusion peut être stricte.
3. Comparer $\overline{A \cap B}$ et $\bar{A} \cap \bar{B}$, puis $\overline{A \cup B}$ et $\bar{A} \cup \bar{B}$.

Correction.

1. Si $x \in \mathring{A}$, alors A est voisinage de x. Puisque $A \subset B$, B est aussi voisinage de x et $x \in \mathring{B}$. D'autre part, si $x \in \bar{A}$, il existe une suite (x_n) de A qui converge vers x. Mais (x_n) est aussi une suite de B et donc $x \in \bar{B}$.
2. D'une part, on a $A \cap B \subset A$ et $A \cap B \subset B$, donc par la question précédente, on a $(A \cap B)^\circ \subset \mathring{A}$ et $(A \cap B)^\circ \subset \mathring{B}$ d'où $(A \cap B)^\circ \subset \mathring{A} \cap \mathring{B}$. Réciproquement, si $x \in \mathring{A} \cap \mathring{B}$, il existe $r_1 > 0$ tel que $B(x, r_1) \subset A$ et il existe $r_2 > 0$ tel que $B(x, r_2) \subset B$. Posons $r = \min(r_1, r_2) > 0$. Alors $B(x, r) \subset A \cap B$ et donc $x \in (A \cap B)^\circ$. De la même façon, de $A \subset A \cup B$ et $B \subset A \cup B$, on tire $\mathring{A} \cup \mathring{B} \subset (A \cup B)^\circ$. Prenons maintenant $A = [0, 1]$ et $B = [1, 2]$. Alors $\mathring{A} =]0, 1[$, $\mathring{B} =]1, 2[$ et $(A \cup B)^\circ =]0, 2[$. En particulier, $1 \in (A \cup B)^\circ$ alors que $1 \notin \mathring{A} \cup \mathring{B}$.
3. De la même façon qu'à la question précédente, en utilisant le résultat de la première question, on a $\overline{A \cap B} \subset \bar{A} \cap \bar{B}$ et $\bar{A} \cup \bar{B} \subset \overline{A \cup B}$. La première inclusion peut être stricte. En effet, prenons $A =]0, 1[$ et $B =]1, 2[$, de sorte que $A \cap B = \varnothing$ alors que $\bar{A} \cap \bar{B} = \{1\}$. La seconde inclusion est une égalité. Prenons $x \in \overline{A \cup B}$. Alors x est limite d'une suite (x_n) à valeurs dans $A \cup B$. Mais ou bien il y a une infinité de termes de (x_n) qui sont dans A, ou bien il y a une infinité de termes de (x_n) qui sont dans B. Dans le premier cas, $x \in \bar{A}$ et dans le second, $x \in \bar{B}$. Dans tous les cas, $x \in \bar{A} \cup \bar{B}$. Remarquons que l'on aurait aussi pu déduire les résultats de cette question à partir des résultats de la question précédente en passant au complémentaire, puisque $(\bar{A})^c = (A^c)^\circ$ etc...

Exercice 16.

Soit C une partie convexe d'un espace vectoriel normé. Démontrer que l'adhérence de C est convexe, puis que l'intérieur de C est convexe.

Correction.

Soit $x, y \in \bar{C}$, et $t \in [0, 1]$. x (resp. y) est limite d'une suite (x_n) (resp. (y_n)) d'éléments de C. Puisque C est convexe, la suite

$$z_n = tx_n + (1 - t)x_n$$

est dans C. On passe à la limite : la suite (z_n) converge vers $tx + (1-t)y$, et cette limite est dans $\bar{C}$. D'où $tx + (1-t)y \in \bar{C}$, ensemble qui est donc convexe. Prouvons maintenant le résultat concernant l'intérieur. Soit $x, y \in \mathring{C}$, $x \neq y$, et soit $z \in]x, y[$. Alors il existe une (unique) homothétie de centre x qui envoie y sur z (une homothétie de centre x est une application de la forme $w \mapsto x + \lambda(w - x)$. Cette homothétie transforme la boule de centre y et de rayon δ en la boule de centre z et de rayon $\lambda\delta$. Soit $\delta > 0$ tel que $B(y, \delta) \subset C$ et soit $w \in B(z, \lambda\delta)$. Alors $w = h(u)$, avec u un point de $B(y, \delta)$, et h l'homothétie précédemment considérée. En particulier,w est sur le segment $[x, u]$ et est donc un élément de C. Autrement dit, on vient de prouver que $B(z,\lambda\delta)\subset C$, ce qui prouve $z\in\overset{\circ}{C}$. $\overset{\circ}{C}$ est convexe.

Exercice 17.

Donner un exemple d'ensemble A tel que A, l'adhérence de A, l'intérieur de A, l'adhérence de l'intérieur de A et l'intérieur de l'adhérence de A sont des ensembles distincts deux à deux.

Correction.

On va considérer une partie de $\mathbb{R}$. Un singleton est d'intérieur vide, et un intervalle ouvert a pour adhérence l'intervalle fermé : on considère donc d'abord :

$$B=\{0\}\cup]1,2[.$$

Si l'on veut ensuite que l'intérieur de l'adhérence de A soit différent de A, il est judicieux que 2 soit dans l'intérieur de l'adhérence de A, et pour cela on colle un intervalle ouvert de l'autre côté de A. On pose alors :

$$A=\{0\}\cup]1,2[\cup]2,3[.$$

On a :

$$\overset{\circ}{A}=]1,2[\cup]2,3[,$$
$$\bar{A}=\{0\}\cup[1,3],$$
$$Int(\bar{A})=]1,3[,$$
$$Adh(\overset{\circ}{A})=[1,3],$$

ce qui prouve bien que tous ces ensembles sont différents.

3. Exercices d'approfondissement

a. Ouverts, fermés

Exercice 18.

Dans cet exercice, la notation (x,y) désigne le segment $[x,y]$ ou le segment $[y,x]$ suivant l'ordre de x et de y. On considère U un ouvert de $\mathbb{R}$. On définit une relation sur les éléments de U par

$$x\mathcal{R}y\iff(x,y)\subset U.$$

1. Démontrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence. Pour $x\in U$, on note $C(x)$ la classe d'équivalence de x.
2. Démontrer que $C(x)$ est un intervalle.
3. Démontrer que $C(x)$ est un intervalle ouvert.
4. En déduire que U est réunion d'intervalles ouverts deux à deux disjoints.

Correction.

Dans cet exercice, on utilisera plusieurs fois que pour tous $a, b, c \in \mathbb{R}$, alors $(a, c) \subset (a, b) \cup (b, c)$.

1. La réflexion est clairement symétrique et réflexive. De plus, elle est transitive. Si $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}z$, alors $(x, y) \subset U$ et $(y, z) \subset U$. Puisque $(x, z) \subset (x, y) \cup (y, z) \subset U$, on a bien $x\mathcal{R}z$ et la relation est transitive.
2. Soient a, b deux éléments de $C(x)$. Il suffit de démontrer que $(a, b) \subset C(x)$. Mais $(a, x) \subset U$ et $(b, x) \subset U$ et donc $(a, b) \subset U$. En particulier, prenons $y \in (a, b)$. Alors $(a, y) \subset U$ et $(a, x) \subset U$ et donc $(a, x) \subset U$, ce qui prouve que $y \in C(x)$ et donc que $C(x)$ est un intervalle.
3. Notons $y = \sup C(x)$. Si $y \in C(x)$, alors l'intervalle $[x, y] \subset U$. Mais puisque U est ouvert, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $[y, y + \varepsilon] \subset U$. Mais alors $[x, y + \varepsilon] \subset U$ et donc $y + \varepsilon \in C(x)$, ce qui contredit la définition de y. On démontre de même que $\inf C(x) \notin C(x)$. Puisque $C(x)$ est un intervalle, on a $]\inf C(x), \sup C(x)[= C(x)$, qui est un intervalle ouvert, donc un ouvert.
4. U est réunion disjointe des classes d'équivalence pour la relation $\mathcal{R}$. Ces classes d'équivalence sont des intervalles ouverts d'après la question précédente. Donc U est réunion disjointe d'intervalles ouverts. En utilisant le fait que $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$, et que $\mathbb{Q}$ est dénombrable, on pourrait en fait démontrer que U est une réunion dénombrable d'intervalles ouverts disjoints.

Exercice 19.

Soit E l'espace vectoriel des suites bornées, muni de la norme $\|u\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |u_n|$. Déterminer si les ensembles suivants sont fermés ou non :

$$A = \{\text{suites croissantes}\}, \ B = \{\text{suites convergeant vers } 0\}.$$

Correction.

L'une des difficultés, dans cet exercice, vient des notations. Si on veut utiliser la caractérisation séquentielle des fermés, on va avoir besoin de suites d'éléments de E, c'est-à-dire de suites de suites. Commençons par démontrer que A est fermé. Soit $(u(k))$ une suite d'éléments de A, qui converge vers un élément $u \in E$. Chaque $u(k)$ est une suite croissante. Donc, pour tout entier $n \geq 1$, on a $u_n(k) \leq u_{n+1}(k)$. Si on fait tendre k vers $+\infty$, on en déduit que

$$u_n \leq u_{n+1}$$

et donc que la suite u est croissante. Ainsi, A est bien fermé. Démontrons que B est également fermé. Soit $(u(k))$ une suite d'éléments de B, qui converge vers un élément $u \in E$. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe un entier k tel que

$$\|u - u(k)\|_\infty \leq \varepsilon,$$

ce qui signifie que, pour tout $n \geq 1$, on a

$$|u_n - u_n(k)| \leq \varepsilon.$$

Ce k étant fixé, il existe un entier n_0 tel que, pour tout $n \geq n_0$, on a $|u_n(k)| \leq \varepsilon$. D'après l'inégalité triangulaire, pour tout $n \geq n_0$, on a

$$|u_n| \leq |u_n - u_n(k)| + |u_n(k)| \leq 2\varepsilon.$$

Ainsi, on en tire que u converge vers 0. u est un élément de B, et donc B est fermé.

b. Intérieur, adhérence, frontière

Exercice 20.

Soit A une partie d'un espace vectoriel normé E. On rappelle que la frontière de A est l'ensemble $\mathrm{Fr}(A) = \bar{A} \setminus \mathring{A} = \bar{A} \cap \overline{C_E A}$. Montrer que :

1. $\mathrm{Fr}(A) = \{x \in E \mid \forall \epsilon > 0, B(x,\epsilon) \cap A \neq \emptyset \text{ et } B(x,\epsilon) \cap C_E A \neq \emptyset\}$.
2. $\mathrm{Fr}(A) = \mathrm{Fr}(C_E A)$.
3. A est fermé si et seulement si $\mathrm{Fr}(A)$ est inclus dans A.
4. A est ouvert si et seulement si $\mathrm{Fr}(A) \cap A = \emptyset$.
5. Montrer que si A est fermé, alors $\mathrm{Fr}(\mathrm{Fr}(A)) = \mathrm{Fr}(A)$.

Correction.

1. Soit $x \in \mathrm{Fr}(A)$, et $\varepsilon > 0$. Puisque $x \in \bar{A}$, $B(x,\varepsilon) \cap A \neq \varnothing$. D'autre part, puisque $x \notin \mathring{A}$, $B(x,\varepsilon)$ n'est pas incluse dans A, ce qui se reformule en $B(x,\varepsilon) \cap C_E A \neq \varnothing$. L'inclusion réciproque se démontre en remontant simplement les étapes.
2. Si l'on remarque que le complémentaire du complémentaire de A est A lui-même, l'écriture précédente de $\mathrm{Fr}(A)$ prouve que $\mathrm{Fr}(A) = \mathrm{Fr}(C_E A)$.
3. Si A est fermé, alors $\bar{A} \subset A$, et donc $\mathrm{Fr}(A) \subset A$. Réciproquement, si $\mathrm{Fr}(A) \subset A$, soit $x \in \bar{A}$.<ul class="rien">
4. Si $x \notin \mathring{A}$, alors $x \in \mathrm{Fr}(A) \subset A$.
5. Si $x \in \mathring{A}$, alors évidemment $x \in A$. Dans tous les cas, on a prouvé que $x \in A$ et donc $\bar{A} \subset A$: A est fermé.
6. Si A est ouvert, alors $\mathring{A} = A$, et donc $\mathrm{Fr}(A) \cap A = \varnothing$. Réciproquement, si $\mathrm{Fr}(A) \cap A = \varnothing$, alors pour chaque $x \in A$, $x \notin \mathrm{Fr}(A)$, et donc $x \in \mathring{A}$ (puisqu'évidemment $x \in \bar{A}$).
7. On a $\mathrm{Fr}(\mathrm{Fr}A) = \overline{\mathrm{Fr}(A)} \cap \overline{C_E \mathrm{Fr}(A)}$. Puisque $\mathrm{Fr}(A)$ est fermé, on a encore $\mathrm{Fr}(\mathrm{Fr}A) = \mathrm{Fr}(A) \cap \overline{C_E \mathrm{Fr}(A)}$. Il suffit donc de prouver que $\mathrm{Fr}(A) \subset \overline{C_E \mathrm{Fr}(A)}$. Mais, on sait que $\mathrm{Fr}(A) \subset \overline{A} = A$ et donc, en passant au complémentaire, $C_E A \subset C_E \mathrm{Fr}(A)$. En passant à l'adhérence, on trouve
$$\mathrm{Fr}(A) \subset \overline{C_E A} \subset \overline{C_E(\mathrm{Fr}(A))}.$$

Exercice 21.

Soit E un espace vectoriel normé Soit A une partie non vide et bornée de E. On définit $\mathrm{diam}(A) = \sup\{\|y - x\|, x, y \in A\}$.

1. Démontrer que $\bar{A}$ et $\mathrm{Fr}(A)$ sont également bornés.
2. Comparer $\mathrm{diam}(A)$, $\mathrm{diam}(\mathring{A})$ et $\mathrm{diam}(\bar{A})$ lorsque $\mathring{A}$ est non vide.
3. (a) Montrer que $\mathrm{diam}(\mathrm{Fr}(A)) \leq \mathrm{diam}(A)$.
   (b) Soit x un élément de A, et u un élément de E avec $u \neq 0$. On considère l'ensemble $X = \{t \geq 0 \mid x + tu \in A\}$. Montrer que $\sup X$ existe.
   (c) En déduire que toute demi-droite issue d'un point x de A coupe $\mathrm{Fr}(A)$.

(d) En déduire que $\mathrm{diam}(\mathrm{Fr}(A)) = \mathrm{diam}(A)$.

Correction.

1. Soit M tel que $A \subset B(0, M)$. Soit $x \in \bar{A}$ et (x_n) une suite de A qui converge vers x. Alors, par passage à la limite :
$$\|x_n\| \leq M \implies \|x\| \leq M.$$
Donc $\bar{A}$ est bornée, et comme $\mathrm{Fr}(A) \subset \bar{A}$, $\mathrm{Fr}(A)$ est bornée aussi.
2. On a les inclusions :
$$\mathring{A} \subset A \subset \bar{A},$$
qui donnent clairement :
$$\mathrm{diam}(\mathring{A}) \leq \mathrm{diam}(A) \leq \mathrm{diam}(\bar{A}).$$
La première inégalité peut être stricte : en effet, si on prend $E = \mathbb{R}$, et $A = [0, 1] \cup \{2\}$, alors $\mathring{A} =]0, 1[$, et on a :
$$\mathrm{diam}(\mathring{A}) = 1, \ \mathrm{diam}(A) = 2.$$
En revanche, on a toujours $\mathrm{diam}(A) = \mathrm{diam}(\bar{A})$. En effet, pour $\varepsilon > 0$, par définition de la borne supérieure, il existe x et y dans $\bar{A}$ tels que :
$$\|x - y\| \geq \mathrm{diam}(\bar{A}) - \varepsilon.$$
Mais, par définition de l'adhérence, il existe des éléments x' et y' de A tels que :
$$\|x - x'\| \leq \varepsilon \text{ et } \|y - y'\| \leq \varepsilon.$$
On en déduit :
$$\|x' - y'\| \geq \|x - y\| - \|x' - x\| - \|y' - y\| \geq \mathrm{diam}(\bar{A}) - 3\varepsilon.$$
On a donc prouvé que, pour tout $\varepsilon > 0$, on a :
$$\mathrm{diam}(\bar{A}) \geq \mathrm{diam}(A) \geq \mathrm{diam}(\bar{A}) - 3\varepsilon.$$
Ceci prouve bien que $\mathrm{diam}(A) = \mathrm{diam}(\bar{A})$.
3. (a) Il est clair que $\mathrm{Fr}(A) \subset \bar{A} \implies \mathrm{diam}(\mathrm{Fr}(A)) \leq \mathrm{diam}\bar{A} = \mathrm{diam}A$, d'après le résultat de la question précédente.
   (b) Soit M tel que $A \subset B(0, M)$. On a alors, pour $t \in X$:
   $$\|x + tu\| \leq M \implies \|tu\| - \|x\| \leq M \implies t\|u\| \leq M + \|x\|,$$
   et dont l'ensemble X est une partie de $\mathbb{R}$ non vide et majorée par $\frac{M+\|x\|}{\|u\|}$. En particulier, sa borne supérieure existe.
   (c) Une telle demi-droite est un ensemble de la forme $\{x + tu;\ t \geq 0\}$. Soit t la borne supérieure de l'ensemble X donné par la question précédente : on va prouver que $x + tu \in \mathrm{Fr}(A)$. En effet, si $\varepsilon > 0$:<ul class=”rien”>
   (d) Il existe t_1 dans X tel que $t - \varepsilon < t_1 < t$, et donc la boule de centre $x + tu$ de rayon ε rencontre A en $x + t_1 u$.

(e) $x+(t+\varepsilon/2)u$ n'est pas dans A : c'est donc un point d'intersection du complémentaire de A et de la boule de centre $x+tu$ et de rayon ε.

(f) Soit $\varepsilon > 0$ et x, y dans A tels que

$$\|x-y\| \geq \mathrm{diam}(A) - \varepsilon.$$

On pose $u = y - x$, et X l'ensemble donné par la question (c). On note t_0 la borne sup de X. Il est clair que $t_0 \geq 1$ (puisque $1 \in X$), et d'après la question précédente, $z = x + t_0 u \in \mathrm{Fr}(A)$. Il faut ensuite trouver un deuxième point à la frontière, qu'on trouve en traçant la deuxième demi-droite : pour $v = x - y$, on considère l'ensemble des points $x + tv$. Comme auparavant, on trouve un point à la frontière z'. Il reste à conclure que :

$$z' - z = x + (t_1 v) - (x + t_0)u = (t_1 - t_0)(x - y),$$

ce qui donne :

$$\|z' - z\| \geq \|x - y\| \geq \mathrm{diam}(A) - \varepsilon.$$