Feuille d'exercices n°4

1. Exercices basiques

Exercice 1.

Déterminer si les ensembles suivants sont ouverts ou fermés :

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < |x-1| < 1\} \qquad B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq y\}$$
$$C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| < 1,\ |y| \leq 1\} \qquad D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathbb{Q} \text{ et } y \in \mathbb{Q}\}$$
$$E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \notin \mathbb{Q} \text{ ou } \ y \notin \mathbb{Q}\} \qquad F = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 4\}.$$

Exercice 2.

Soient U et V deux ouverts denses d'un espace vectoriel normé E. Démontrer que $U \cap V$ reste dense.

Exercice 3.

Démontrer que les deux ensembles suivants sont ouverts :

$$F = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2 < \exp(\sin y) - 12\right\}, \qquad G = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; -1 < \ln(x^2+1) < 1\}.$$

Exercice 4.

Soit $E = \mathbb{R}[X]$ l'espace vectoriel des polynômes. On définit sur E trois normes par, si $P = \sum_{i=0}^{p} a_i X^i$:

$$N_1(P) = \sum_{i=0}^{p} |a_i|,\ N_2(P) = \left(\sum_{i=0}^{p} |a_i|^2\right)^{1/2},\ N_\infty(P) = \max_i |a_i|.$$

Vérifier qu'il s'agit de 3 normes sur $\mathbb{R}[X]$. Sont-elles équivalentes deux à deux ?

Exercice 5.

Soit $E = \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$. On définit les normes $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$ par

$$\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)|dt,\ \|f\|_2 = \left(\int_0^1 |f(t)|^2\right)^{1/2} \text{ et } \|f\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|.$$

Démontrer que ces trois normes ne sont pas équivalentes deux à deux.

Exercice 6.

Sur $E=\mathbb{R}[X]$, on définit N_1 et N_2 par

$$N_1(P)=\sum_{k=0}^{+\infty}|P^{(k)}(0)| \text{ et } N_2(P)=\sup_{t\in[-1,1]}|P(t)|.$$

1. Démontrer que N_1 et N_2 sont deux normes sur E.
2. Étudier pour chacune des deux normes la convergence de la suite (P_n) définie par $P_n=\frac{1}{n}X^n$.
3. Les deux normes sont-elles équivalentes ?

2. Exercices d'entraînement

Exercice 7.

Soit $a\geq 0$. Pour $P\in\mathbb{R}[X]$, on définit

$$N_a(P)=|P(a)|+\int_0^1|P'(t)|dt.$$

1. Démontrer que N_a est une norme sur $\mathbb{R}[X]$.
2. Soit $a,b\geq 0$ avec $a<b$ et $b>1$. Démontrer que N_a et N_b ne sont pas équivalentes.
3. Démontrer que si $(a,b)\in[0,1]^2$, alors N_a et N_b sont équivalentes.

Exercice 8.

Soit $E=\mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R})$. Pour $f\in E$, on pose

$$N(f)=\left(f^2(0)+\int_0^1(f'(t))^2dt\right)^{1/2}.$$

1. Démontrer que N est une norme sur E.
2. Démontrer que, pour tout $f\in E$, $\|f\|_\infty\leq\sqrt{2}N(f)$.
3. Les deux normes N et $\|\cdot\|_\infty$ sont elles équivalentes ?

Exercice 9.

Soit $E=\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ et $F=\{f\in E;\ f(0)=0\}$.

1. On munit E de la norme $\|f\|_\infty=\sup_{x\in[0,1]}|f(x)|$. Démontrer que F est fermé dans $(E,\|\cdot\|_\infty)$.
2. On munit E de la norme $\|f\|_1=\int_0^1|f(x)|$. Démontrer que F est dense dans $(E,\|\cdot\|_1)$.

Exercice 10.

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que

$$\forall x, y \in \mathbb{R},\ f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{1}{2}\big(f(x) + f(y)\big).$$

1. Démontrer que $\mathcal{D} = \{p/2^n;\ p \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{N}\}$ est dense dans $\mathbb{R}$.
2. Démontrer que si f s'annule en 0 et en 1, alors $f = 0$.
3. Conclure que dans le cas général, f est affine.

Exercice 11.

Soit A une partie bornée d'un espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|)$. On note $\mathcal{L}$ l'espace vectoriel des applications lipschitziennes de A dans E.

1. Démontrer que les éléments de $\mathcal{L}$ sont des fonctions bornées.
2. Pour $f \in \mathcal{L}$, on pose

$$K_f = \{k \in \mathbb{R}_+;\ \forall (x, y) \in A^2,\ \|f(x) - f(y)\| \leq k\|x - y\|\}.$$

   Démontrer que K_f admet une borne inférieure. Dans la suite, on notera C_f cette borne inférieure.
3. Justifier que $C_f \in K_f$.
4. Démontrer que si $f, g \in \mathcal{L}$, alors $C_{f+g} \leq C_f + C_g$.
5. Pour $a \in A$, on note $N_a(f) = \|f(a)\| + C_f$. Démontrer que N_a est une norme sur $\mathcal{L}$.
6. Soient $a \neq b \in A$. Les normes N_a et N_b sont-elles équivalentes ?

3. Exercices d'approfondissement

Exercice 12.

Soient (u_n) et (v_n) deux suites de nombres réels telles que

$$u_n \to +\infty,\ v_n \to +\infty,\ u_{n+1} - u_n \to 0.$$

1. Soit $\varepsilon > 0$ et $n_0 \in \mathbb{N}$ tels que, pour tout $n \geq n_0$, $|u_{n+1} - u_n| \leq \varepsilon$. Démontrer que, pour tout $a \geq u_{n_0}$, il existe $n \geq n_0$ tel que $|u_n - a| \leq \varepsilon$.
2. En déduire que $\{u_n - v_p;\ n, p \in \mathbb{N}\}$ est dense dans $\mathbb{R}$.
3. Montrer que l'ensemble $\{\cos(\ln n);\ n \geq 1\}$ est dense dans $[-1, 1]$.

Exercice 13.

Soit H un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$ non réduit à $\{0\}$.

1. Justifier l'existence de $m = \inf\{x \in H;\ x > 0\}$.
2. On suppose que $m > 0$. Démontrer que $m \in H$ puis que $H = m\mathbb{Z}$.

3. On suppose que $m=0$. Démontrer que H est dense dans $\mathbb{R}$.
4. En déduire que, si a et b sont deux réels non nuls, $a\mathbb{Z}+b\mathbb{Z}$ est dense dans $\mathbb{R}$ si et seulement si $\frac{a}{b} \notin \mathbb{Q}$.

Exercice 14.

Soit $E=\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$. Pour $f,g\in E$, on pose $N_g(f)=\|gf\|_\infty$.

1. Donner une condition nécessaire et suffisante sur g pour que N_g soit une norme.
2. Donner une condition nécessaire et suffisante sur g pour que N_g soit équivalente à la norme infinie.