Corrigé de la feuille d'exercices n°4

1. Exercices basiques

Exercice 1.

Déterminer si les ensembles suivants sont ouverts ou fermés :

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < |x-1| < 1\} \qquad B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq y\}$$
$$C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| < 1,\ |y| \leq 1\} \qquad D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathbb{Q} \text{ et } y \in \mathbb{Q}\}$$
$$E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \notin \mathbb{Q} \text{ ou } \ y \notin \mathbb{Q}\} \qquad F = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 4\}.$$

Correction.

A et F sont ouverts. B est fermé, les autres ne sont ni ouverts ni fermés. Voici une preuve variant les techniques :

1. A est ouvert. En effet, si $(x,y) \in A$, alors $0 < |x-1| < 1$, c'est-à-dire que $x \neq 1$ et $0 < x < 2$. On sait alors qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $1 \notin]x-\varepsilon, x+\varepsilon[$ et $0 < x-\varepsilon < x+\varepsilon < 2$. Alors, $B((x,y),\varepsilon)$ (pour la norme infinie) est contenue dans A. A n'est pas fermé, car la suite (u_n) définie par $u_n = (1/n, 0)$ est une suite d'éléments de A qui converge vers $(0,0)$ qui n'est pas dans A.
2. B est fermé. Si (x_n, y_n) est une suite d'éléments de B qui converge vers (x,y), alors on sait que pour chaque entier n, on a $0 \leq x_n \leq y_n$. En passant à la limite, on en déduit que $0 \leq x \leq y$ et donc que $(x,y) \in B$. B n'est pas ouvert : dans toute boule contenant $(0,0)$, il y a des points qui ne sont pas dans B (les points du type $(-\varepsilon, 0)$ par exemple).
3. C n'est pas fermé, car si $u_n = (1-\frac{1}{n}, 1)$, (u_n) est une suite d'éléments de C qui converge vers $(1,1)$ qui n'est pas dans C. C n'est pas ouvert, car toute boule contenant le point $(0,1)$, qui est dans C, contient des éléments qui ne sont pas dans C (par exemple les points $(0, 1+\varepsilon)$.
4. D n'est pas fermé : si (r_n) est une suite de rationnels convergeant vers $\sqrt{2}$, alors la suite $(r_n, 0)$ est une suite d'éléments de D qui converge vers $(\sqrt{2}, 0)$ qui n'est pas élément de D. D n'est pas ouvert. Dans toute boule de centre $(0,0)$, qui est élément de D, il existe des éléments qui ne sont pas dans D, par exemple les éléments du type $(0, \sqrt{2}/n)$.
5. E n'est pas ouvert car son complémentaire, D, n'est pas fermé. E n'est pas fermé car son complémentaire n'est pas ouvert.
6. F est ouvert car c'est l'image réciproque de l'intervalle ouvert $]-\infty, 4[$ par la fonction continue $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = x^2 + y^2$. F n'est pas fermé, car la suite (u_n) définie par $u_n = (2 - \frac{1}{n}, 0)$ est une suite d'éléments de D qui converge vers $(2,0)$ qui n'est pas élément de F.

Exercice 2.

Soient U et V deux ouverts denses d'un espace vectoriel normé E. Démontrer que $U \cap V$ reste dense.

Correction.

Soit $a \in E$ et $\varepsilon > 0$. Il s'agit de prouver que $B(a,\varepsilon) \cap U \cap V$ est non-vide. Mais U est dense dans E, et donc il existe $u \in U \cap B(a,\varepsilon)$. Puisque $U \cap B(a,\varepsilon)$ est ouvert, il existe $\delta > 0$ tel que $B(u,\delta) \subset U \cap B(a,\varepsilon)$. Maintenant, puisque V est dense, il existe $v \in V \cap B(u,\delta)$. Alors $v \in B(a,\varepsilon) \cap U \cap V$. Remarquons que l'hypothèse V ouvert est inutile. On aurait pu se contenter de supposer que U est un ouvert dense et que V est dense.

Exercice 3.

Démontrer que les deux ensembles suivants sont ouverts :

$$F = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2 < \exp(\sin y) - 12\right\}, \qquad G = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; -1 < \ln(x^2+1) < 1\}.$$

Correction.

Posons $f(x,y) = x^2 - \exp(\sin y) + 12$. Alors f est continue sur $\mathbb{R}^2$, et $F = f^{-1}(]-\infty, 0[)$. Comme $]-\infty, 0[$ est ouvert, F est ouvert comme image réciproque d'un ouvert par une application continue. De même, posons $g(x,y) = \ln(x^2+1)$. Alors g est continue et $G = g^{-1}(]-1,1[)$ est ouvert comme image réciproque de l'ouvert $]-1,1[$ par g.

Exercice 4.

Soit $E = \mathbb{R}[X]$ l'espace vectoriel des polynômes. On définit sur E trois normes par, si $P = \sum_{i=0}^{p} a_i X^i$:

$$N_1(P) = \sum_{i=0}^{p} |a_i|,\ N_2(P) = \left(\sum_{i=0}^{p} |a_i|^2\right)^{1/2},\ N_\infty(P) = \max_i |a_i|.$$

Vérifier qu'il s'agit de 3 normes sur $\mathbb{R}[X]$. Sont-elles équivalentes deux à deux ?

Correction.

La démonstration qu'il s'agit de normes suit en tout point celle classique concernant les mêmes normes sur $\mathbb{R}^n$. Supposons que $N_1(P) \leq CN_\infty(P)$. Prenons $P_n = 1 + X + \cdots + X^n$. Alors $N_1(P_n) = n+1 \leq C$, ce qui est impossible pour n grand. Si $N_2(P) \leq CN_\infty(P)$, pour le même polynôme P_n, on a $N_2(P_n) = \sqrt{n+1} \leq C$, ce qui est toujours impossible. Enfin, la même suite de polynômes, et le même raisonnement, prouve qu'une inégalité $N_1(P_n) \leq CN_2(P_n)$ est tout aussi impossible. Remarquons que la preuve que ces trois normes ne sont pas équivalentes repose sur le fait que $\mathbb{R}[X]$ est de dimension infinie.

Exercice 5.

Soit $E = \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$. On définit les normes $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$ par

$$\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)|dt,\ \|f\|_2 = \left(\int_0^1 |f(t)|^2\right)^{1/2} \text{ et } \|f\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|.$$

Démontrer que ces trois normes ne sont pas équivalentes deux à deux.

Correction.

Considérons, pour $n \geq 1$, $f_n(x) = x^n$. On a alors

$$\|f_n\|_\infty = 1,\ \|f_n\|_2 = \frac{1}{\sqrt{2n+1}} \text{ et } \|f_n\|_1 = \frac{1}{n+1}.$$

Si $\|\cdot\|_\infty$ et $\|\cdot\|_2$ étaient équivalentes, il existerait $A, B > 0$ tels que, pour tout n,

$$A \leq \frac{\|f_n\|_2}{\|f_n\|_\infty} \leq B.$$

Mais $\frac{\|f_n\|_2}{\|f_n\|_\infty} = \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$ et un tel encadrement est impossible (on obtiendrait à la limite $A \leq 0$).

Exercice 6.

Sur $E = \mathbb{R}[X]$, on définit N_1 et N_2 par

$$N_1(P) = \sum_{k=0}^{+\infty} |P^{(k)}(0)| \text{ et } N_2(P) = \sup_{t\in[-1,1]} |P(t)|.$$

1. Démontrer que N_1 et N_2 sont deux normes sur E.
2. Étudier pour chacune des deux normes la convergence de la suite (P_n) définie par $P_n = \frac{1}{n}X^n$.
3. Les deux normes sont-elles équivalentes ?

Correction.

1. On vérifie d'abord que ces deux quantités sont bien définies. En particulier, la somme apparaissant dans $N_1(P)$ est en réalité une somme finie. Prenons ensuite P, Q dans E et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors, pour tout $k \geq 0$,

$$|(P+Q)^{(k)}(0)| \leq |P^{(k)}(0)| + |Q^{(k)}(0)|$$

et donc, en passant à la somme $N_1(P+Q) \leq N_1(P) + N_1(Q)$. On a clairement $N_1(\lambda P) = |\lambda| N_1(P)$. Enfin, si $N_1(P) = 0$, alors 0 est une racine de multiplicité infinie de P, ce qui entraîne que $P = 0$. Passons maintenant à N_2. On a, pour tout $t \in [-1,1]$,

$$|(P+Q)(t)| \leq |P(t)| + |Q(t)| \leq N_2(P) + N_2(Q).$$

En passant au sup pour $t \in [-1,1]$, on en déduit que

$$N_2(P+Q) \leq N_2(P) + N_2(Q).$$

Il est clair que $N_2(\lambda P) = |\lambda| N_2(P)$, et si $N_2(P) = 0$, alors P admet une infinité de racines, donc $P = 0$. Ainsi, N_2 est également une norme sur E.

2. On a

$$N_1(P_n) = (n-1)! \text{ et } N_2(P_n) = \frac{1}{n}.$$

Ainsi, la suite (P_n) converge vers 0 pour N_2, mais n'est pas bornée et donc ne converge pas pour N_1.

3. Les normes ne peuvent pas être équivalentes, sinon une suite convergente pour une norme serait une suite convergente pour l'autre norme.

2. Exercices d'entraînement

Exercice 7.

Soit $a \geq 0$. Pour $P \in \mathbb{R}[X]$, on définit

$$N_a(P) = |P(a)| + \int_0^1 |P'(t)| dt.$$

1. Démontrer que N_a est une norme sur $\mathbb{R}[X]$.
2. Soit $a, b \geq 0$ avec $a < b$ et $b > 1$. Démontrer que N_a et N_b ne sont pas équivalentes.
3. Démontrer que si $(a,b) \in [0,1]^2$, alors N_a et N_b sont équivalentes.

Correction.

1. La seule difficulté est de vérifier que $N_a(P) = 0 \implies P = 0$. Mais si $N_a(P) = 0$, on a à la fois $|P(a)| = 0$ et $\int_0^1 |P'(t)| dt = 0$. Or, $|P'|$ est une fonction continue, positive, d'intégrale nulle sur $[0,1]$. Donc $P' = 0$ sur $[0,1]$. Comme P' est un polynôme, ceci entraîne que $P' = 0$ ou encore que P est un polynôme constant. Puisque $P(a) = 0$, on en déduit que P est identiquement nul.
2. Supposons que N_a et N_b sont équivalentes. Alors, il existe deux constantes $C_1 > 0$ et $C_2 > 0$ tels que, pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$, on a :

$$C_1 N_a(P) \leq N_b(P) \leq C_2 N_a(P).$$

Pour $n \geq 0$, soit $P(X) = X^n$. On a

$$N_a(P) = a^n + n \int_0^1 t^{n-1} dt = a^n + 1 \text{ et } N_b(P) = b^n + 1.$$

On en déduit alors que, pour tout $n \geq 0$,

$$b^n + 1 \leq C_2(a^n + 1) \iff 1 + \frac{1}{b^n} \leq C_2 \left(\frac{a}{b}\right)^n + \frac{C_2}{b^n}.$$

Or, le membre de droite tend vers 1 et le membre de gauche vers 0. On obtient en passant à la limite $1 \leq 0$, ce qui est absurde. L'hypothèse de départ est donc fausse, et N_a et N_b ne sont pas équivalentes.

3. Supposons par exemple $a \leq b$. Alors
$$P(b) - P(a) = \int_a^b P'(t)dt \leq \int_0^1 |P'(t)|dt.$$
Ainsi,
$$|P(b)| \leq |P(a)| + \int_0^1 |P'(t)|dt \leq N_a(P).$$
Il vient
$$N_b(P) \leq N_a(P) + \int_0^1 |P'(t)|dt \leq 2N_a(P).$$
On a de la même façon
$$|P(a)| \leq |P(b)| + \int_0^1 |P'(t)|dt \leq N_b(P)$$
et donc
$$N_a(P) \leq 2N_b(P).$$
Les deux normes sont bien équivalentes.

Exercice 8.

Soit $E = \mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R})$. Pour $f \in E$, on pose
$$N(f) = \left(f^2(0) + \int_0^1 (f'(t))^2 dt\right)^{1/2}.$$

1. Démontrer que N est une norme sur E.
2. Démontrer que, pour tout $f \in E$, $\|f\|_\infty \leq \sqrt{2}N(f)$.
3. Les deux normes N et $\|\cdot\|_\infty$ sont elles équivalentes ?

Correction.

1. Posons, pour $f, g \in E$, $\phi(f,g) = f(0)g(0) + \int_0^1 f'(t)g'(t)dt$. Il est clair que $N(f) = \sqrt{\phi(f,f)}$ et donc il suffit de démontrer que ϕ est un produit scalaire. C'est clairement une forme bilinéaire, symétrique et positive. De plus, si $\phi(f,f) = 0$, alors $f(0) = 0$ et $\int_0^1 (f'(t))^2 dt = 0$. Puisque $(f')^2$ est une fonction continue et positive sur $[0,1]$, et d'intégrale nulle, f' est identiquement nulle sur $[0,1]$. Ainsi, $f' = 0$ donc f est constante, et comme $f(0) = 0$, f est la fonction nulle. ϕ est une forme bilineaire symétrique définie positive, et donc N est une norme.

2. Soit $x \in [0,1]$. Alors on écrit
$$f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t)dt.$$
On en déduit que
$$|f(x)| \leq |f(0)| + \int_0^x |f'(t)|dt.$$
D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans l'intégrale, on tire
$$\begin{aligned} |f(x)| &\leq |f(0)| + \left(\int_0^x |f'(t)|^2\right)^{1/2} \left(\int_0^x 1^2 dt\right)^{1/2} \\ &\leq |f(0)| + \left(\int_0^1 |f'(t)|^2 dt\right)^{1/2}. \end{aligned}$$
On applique ensuite (encore !) l'inégalité de Cauchy-Schwarz, mais cette fois dans $\mathbb{R}^2$. On en déduit que
$$|f(x)| \leq \left(|f(0)|^2 + \int_0^1 (f'(t))^2 dt\right)^{1/2} \times \left(1^2+1^2\right)^{1/2}.$$
Prenant le sup pour $x \in [0,1]$, on en déduit bien que
$$\|f\|_\infty \leq \sqrt{2}N(f).$$
3. Il est facile de vérifier que $\|x^n\|_\infty = 1$ tandis que $N(x^n) = \frac{n}{\sqrt{2n-1}}$. Ainsi, les deux normes ne peuvent pas être équivalentes.

Exercice 9.

Soit $E = \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ et $F = \{f \in E;\ f(0) = 0\}$.

1. On munit E de la norme $\|f\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|$. Démontrer que F est fermé dans $(E, \|\cdot\|_\infty)$.
2. On munit E de la norme $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(x)|$. Démontrer que F est dense dans $(E, \|\cdot\|_1)$.

Correction.

1. Le forme linéaire $\phi(f) = f(0)$ est continue pour cette norme puisque $|\phi(f)| \leq \|f\|_\infty$. On en déduit que F est fermé puisque $F = \phi^{-1}(\{0\})$ est l'image réciproque d'un fermé par une application continue.
2. Soit $g \in E$. On va construire une suite (f_n) de F telle que $\|f_n - g\|_1 \to 0$. Pour cela, soit $n \geq 1$ et soit f_n la fonction définie par $f(t) = g(t)$ pour $t \in [1/n, 1]$ et $f(t) = tg(1/n)/(1/n)$ si $t \in [0, 1/n]$ (c'est-à-dire que sur $[0,1/n]$, f est la fonction linéaire qui vaut $g(1/n)$ en $1/n$). Alors $f \in F$ et
$$\|f_n - g\|_1 = \int_0^{1/n} |f_n(t) - g(t)|dt \leq \int_0^{1/n} |f(t)|dt + \int_0^{1/n} |g(t)|dt.$$

Mais si $t \in [0, 1/n]$, alors $|f(t)| \leq |g(1/n)| \leq \|g\|_\infty$. On en déduit que

$$\|f_n - g\|_1 \leq 2 \int_0^{1/n} \|g\|_\infty dt \leq \frac{2\|g\|_\infty}{n}.$$

Ceci prouve que F est dense dans $(E, \|\cdot\|_1)$.

Exercice 10.

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que

$$\forall x, y \in \mathbb{R},\ f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{1}{2}\big(f(x) + f(y)\big).$$

1. Démontrer que $\mathcal{D} = \{p/2^n;\ p \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{N}\}$ est dense dans $\mathbb{R}$.
2. Démontrer que si f s'annule en 0 et en 1, alors $f = 0$.
3. Conclure que dans le cas général, f est affine.

Correction.

1. Soit $x \in E$ et posons $x_n = \frac{\lfloor 2^n x \rfloor}{2^n}$. Alors on a, par définition de la partie entière,

$$2^n x_n \leq 2^n x \leq 2^n x_n + 1 \iff x - \frac{1}{2^n} \leq x_n \leq x.$$

   Par le théorème des gendarmes, (x_n) converge vers x et donc $\mathcal{D}$ est dense dans $\mathbb{R}$.
2. Commençons par prouver par récurrence double sur $p \in \mathbb{N}$ que $f(p) = 0$ pour tout $p \in \mathbb{N}$. En effet, on a bien $f(0) = f(1) = 0$. De plus, si $f(p-2) = f(p-1) = 0$, alors en appliquant la propriété avec $x = p-2$ et $y = p$, on a

$$f(p-1) = \frac{1}{2} f(p) + \frac{1}{2} f(p-1),$$

   ce qui implique $f(p) = 0$. De plus, f est impaire. En effet, si $x \in \mathbb{R}$ et si on applique la propriété avec $y = -x$, alors $f(x) + f(-x) = 0$ ce qui prouve bien que f est impaire. Ainsi, pour tout $p \in \mathbb{Z}$, on a $f(p) = 0$. Prouvons maintenant par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que $f(p/2^n) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. C'est vrai pour $n = 0$, et si c'est vrai au rang n, alors appliquons la propriété avec $x = 0$ et $y = p/2^n$. Alors $f\left(\frac{p}{2^{n+1}}\right) = 0$ ce qui prouve que la propriété est vraie au rang $n+1$. Ainsi, on a prouvé que $f(x) = 0$ pour tout $x \in \mathcal{D}$. Puisque $\mathcal{D}$ est dense et que f est continue, on en déduit que $f = 0$.
3. Soit g la fonction affine telle que $f(0) = g(0)$ et $f(1) = g(1)$ et posons $h = f - g$. Alors h vérifie la propriété et vérifie également que $h(0) = h(1) = 0$. On en déduit que h est identiquement nulle, puis que $f = g$ est affine.

Exercice 11.

Soit A une partie bornée d'un espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|)$. On note $\mathcal{L}$ l'espace vectoriel des applications lipschitziennes de A dans E.

1. Démontrer que les éléments de $\mathcal{L}$ sont des fonctions bornées.
2. Pour $f \in \mathcal{L}$, on pose
$$K_f = \{k \in \mathbb{R}_+;\ \forall (x,y) \in A^2,\ \|f(x) - f(y)\| \leq k\|x - y\|\}.$$
Démontrer que K_f admet une borne inférieure. Dans la suite, on notera C_f cette borne inférieure.
3. Justifier que $C_f \in K_f$.
4. Démontrer que si $f, g \in \mathcal{L}$, alors $C_{f+g} \leq C_f + C_g$.
5. Pour $a \in A$, on note $N_a(f) = \|f(a)\| + C_f$. Démontrer que N_a est une norme sur $\mathcal{L}$.
6. Soient $a \neq b \in A$. Les normes N_a et N_b sont-elles équivalentes ?

Correction.

1. Soit $f \in \mathcal{L}$. Il existe donc $K \in \mathbb{R}_+$ tel que, pour tous $x, y \in A$, $\|f(x) - f(y)\| \leq K\|x - y\|$. Fixons $a \in A$. Alors, pour tout $x \in A$, on a par l'inégalité triangulaire
$$\|f(x)\| \leq \|f(a)\| + \|f(x) - f(a)\| \leq \|f(a)\| + K\|x - a\| \leq \|f(a)\| + K\mathrm{diam}(A).$$
Ainsi, f est bornée.
2. K_f est une partie non vide (car f est lipschitzienne) et minorée. Elle admet donc une borne inférieure.
3. Soit (k_n) une suite de K_f qui converge vers C_f. Alors, pour tous $x, y \in A$, on a
$$\|f(x) - f(y)\| \leq k_n\|x - y\|.$$
On fait tendre n vers l'infini et on a
$$\|f(x) - f(y)\| \leq C_f\|x - y\|$$
ce qui entraîne bien que $C_f \in K_f$.
4. Fixons $x, y \in A$. Alors on a par l'inégalité triangulaire
$$\|(f+g)(x) - (f+g)(y)\| \leq \|f(x) - f(y)\| + \|g(x) - g(y)\|.$$
Puisque $C_f \in K_f$ et que $C_g \in K_g$, on a encore
$$\|(f+g)(x) - (f+g)(y)\| \leq C_f\|x - y\| + C_g\|x - y\| \leq (C_f + C_g)\|x - y\|.$$
Autrement dit, $C_f + C_g \in K_{f+g}$ et donc $C_{f+g} \leq C_f + C_g$.
5. N_a est bien à valeurs dans $\mathbb{R}_+$. Si $f = 0$, on a $N_a(f) = 0$ et réciproquement, si $N_a(f) = 0$, alors $f(a) = 0$ et pour tout $x \in A$, on a $\|f(x) - f(a)\| \leq 0\|x - a\|$, soit $f(x) = f(a) = 0$. La fonction est bien identiquement nulle. De plus, si $f, g \in \mathcal{L}$, alors on a
$$N_a(f+g) = |f(a) + g(a)| + C_{f+g} \leq |f(a)| + |g(a)| + C_f + C_g = N_a(f) + N_a(g).$$
Comme de plus, $C_{\lambda f} = |\lambda| C_f$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ (pourquoi ?), on a également que $N_a(\lambda f) = |\lambda| N_a(f)$.

6. Par symétrie du rôle joué par a et b, il suffit de trouver une constante $M > 0$ telle que $N_b(f) \leq MN_a(f)$ pour tout $f \in \mathcal{L}$ et même, en faisant attention à la forme de N_a et de N_b, il suffit de prouver que $|f(b)| \leq M(|f(a)| + C_f)$. Mais,

$$\|f(b)\| \leq \|f(a)\| + \|f(b) - f(a)\| \leq \|f(a)\| + C_f\|b - a\| \leq \|f(a)\| + \mathrm{diam}(A)C_f \leq MN_a(f)$$

où $M = \max(\mathrm{diam}(A), 1)$. Ainsi, les deux normes sont équivalentes.

3. Exercices d'approfondissement

Exercice 12.

Soient (u_n) et (v_n) deux suites de nombres réels telles que

$$u_n \to +\infty,\ v_n \to +\infty,\ u_{n+1} - u_n \to 0.$$

1. Soit $\varepsilon > 0$ et $n_0 \in \mathbb{N}$ tels que, pour tout $n \geq n_0$, $|u_{n+1} - u_n| \leq \varepsilon$. Démontrer que, pour tout $a \geq u_{n_0}$, il existe $n \geq n_0$ tel que $|u_n - a| \leq \varepsilon$.
2. En déduire que $\{u_n - v_p;\ n, p \in \mathbb{N}\}$ est dense dans $\mathbb{R}$.
3. Montrer que l'ensemble $\{\cos(\ln n);\ n \geq 1\}$ est dense dans $[-1, 1]$.

Correction.

1. Posons $A = \{n \in \mathbb{N}; u_n \leq a\}$. Alors A est une partie non-vide (car $n_0 \in A$) et majorée (car (u_n) tend vers $+\infty$) de $\mathbb{N}$. A admet donc un plus grand élément n. Mais alors, $u_n \leq a$, et $u_{n+1} > a$. De plus, $u_{n+1} \leq u_n + \varepsilon$ et donc $u_n \geq a - \varepsilon$. On en déduit que $|u_n - a| \leq \varepsilon$.
2. Soit $x \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon > 0$. Soit $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $u_{n+1} - u_n \leq \varepsilon$ pour tout $n \geq n_0$. Soit $p \in \mathbb{N}$ tel que $x + v_p \geq u_{n_0}$. Posons $a = x + v_p$. Alors il existe un entier $n \in \mathbb{N}$ tel que $|u_n - a| \leq \varepsilon$. Ceci signfie que $|(u_n - v_p) - x| \leq \varepsilon$, ce qui prouve la densité de $\{u_n - v_p;\ n, p \in \mathbb{N}\}$ dans $\mathbb{R}$.
3. Posons $u_n = \ln(n)$ et $v_p = 2p\pi$. Alors les hypothèses s'appliquent à (u_n) et (v_n) puisque

$$0 \leq u_{n+1} - u_n \leq \frac{1}{n}$$

d'après l'inégalité des accroissements finis. Ainsi, $\{\ln(n) - 2p\pi;\ n, p \geq 1\}$ est dense dans $\mathbb{R}$. Soit maintenant $x \in [-1, 1]$ et $\varepsilon > 0$. Il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $x = \cos(\theta)$. Il existe $n, p \geq 1$ tels que, en posant $z = \ln(n) - 2p\pi$, on a $|z - \theta| \leq \varepsilon$. Par l'inégalité des accroissements finis, on a

$$|\cos z - \cos\theta| \leq |z - \theta| \leq \varepsilon,$$

ce qui implique, par 2π-périodicité de la fonction cosinus,

$$|\cos(\ln(n)) - x| \leq \varepsilon.$$

Ainsi, $\{\cos(\ln n);\ n \geq 1\}$ est bien dense dans $[-1, 1]$.

Exercice 13.

Soit H un sous-groupe de $(\mathbb{R},+)$ non réduit à $\{0\}$.

1. Justifier l'existence de $m=\inf\{x\in H;\ x>0\}$.
2. On suppose que $m>0$. Démontrer que $m\in H$ puis que $H=m\mathbb{Z}$.
3. On suppose que $m=0$. Démontrer que H est dense dans $\mathbb{R}$.
4. En déduire que, si a et b sont deux réels non nuls, $a\mathbb{Z}+b\mathbb{Z}$ est dense dans $\mathbb{R}$ si et seulement si $\frac{a}{b}\notin\mathbb{Q}$.

Correction.

1. Il suffit de prouver que $\{x\in H;\ x>0\}$ est non-vide, puisque c'est une partie de $\mathbb{R}$ minorée. Soit $x\in H$, $x\neq 0$. Si $x>0$, c'est bon. Sinon, on considère $-x$.
2. Supposons que $m\notin H$. Alors, par définition de la borne inférieure, il existe $x\in H$ tel que $m<x<2m$. Toujours pas définition de la borne inférieure, il existe $y\in H$ tel que $m<y<x$. Mais alors, $x-y\in H$ puisque H est un groupe et $0<x-y<m$, ce qui contredit la définition de la borne inférieure. On en déduit que $m\in H$ puis, parce que H est un groupe, que $m\mathbb{Z}\subset H$. Réciproquement, prenons $x\in H$. Si $x\notin m\mathbb{Z}$, soit k l'unique entier relatif tel que $mk<x<(k+1)m$. Alors $0<x-mk<m$ et $x-mk\in H$, ce qui contredit à nouveau la définition de la borne inférieure. Donc $H=m\mathbb{Z}$.
3. Soit $a\in\mathbb{R}$ et $\varepsilon>0$. Il s'agit de prouver que $H\cap]a-\varepsilon,a+\varepsilon[\neq\varnothing$. Comme H est symétrique par rapport à l'origine, on peut toujours supposer que $a\geq 0$. On sait qu'il existe $x\in H$ tel que $0<x<\varepsilon$. Soit $n=\lfloor\frac{a}{x}\rfloor$. Alors on sait que $n\leq\frac{a}{x}<n+1$ soit $nx\leq a<(n+1)x<nx+\varepsilon$. On en tire que $a-\varepsilon<nx\leq a$ et puisque $nx\in H$, que $H\cap]a-\varepsilon,a+\varepsilon[$ est non vide. Ceci prouve bien que H est dense dans $\mathbb{R}$.
4. $a\mathbb{Z}+b\mathbb{Z}$ est ou bien dense dans $\mathbb{R}$ ou bien de la forme $m\mathbb{Z}$. S'il est de la forme $m\mathbb{Z}$ alors $a\in m\mathbb{Z}$ et $b\in m\mathbb{Z}$, donc il existe $p,q\in\mathbb{Z}$ tels que $a=mp$ et $b=mq$. Il vient $\frac{a}{b}=\frac{p}{q}\in\mathbb{Q}$. Réciproquement, si $\frac{a}{b}=\frac{p}{q}\in\mathbb{Q}$, alors on sait que
$$\begin{aligned}
x\in a\mathbb{Z}+b\mathbb{Z} &\iff \exists(k,l)\in\mathbb{Z}^2,\ x=ak+bl\\
&\iff \exists(k,l)\in\mathbb{Z}^2,\ x=b\left(\frac{a}{b}k+l\right)\\
&\iff \exists(k,l)\in\mathbb{Z}^2,\ x=b\left(\frac{p}{q}k+l\right)\\
&\iff \exists(k,l)\in\mathbb{Z}^2,\ x=\frac{b}{a}(pk+lq)\\
&\iff x\in\frac{b}{q}(p\mathbb{Z}+q\mathbb{Z}).
\end{aligned}$$
Or, $p\mathbb{Z}+q\mathbb{Z}$ est un idéal de $\mathbb{Z}$ et tous les idéaux de $\mathbb{Z}$ sont de la forme $n\mathbb{Z}$ avec $n\in\mathbb{N}^*$. Donc
$$a\mathbb{Z}+b\mathbb{Z}=\frac{bn}{a}\mathbb{Z}.$$

Exercice 14.

Soit $E = \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$. Pour $f, g \in E$, on pose $N_g(f) = \|gf\|_\infty$.

1. Donner une condition nécessaire et suffisante sur g pour que N_g soit une norme.
2. Donner une condition nécessaire et suffisante sur g pour que N_g soit équivalente à la norme infinie.

Correction.

1. La seule propriété qui pose problème est de prouver que si $N_g(f) = 0$, alors $f = 0$. Si N_g n'est pas une norme, alors il existe $f \in \mathcal{C}([0,1])$, $f \neq 0$, avec $N_g(f) = 0$. Autrement, $f(x)g(x) = 0$ pour tout $x \in [0,1]$. Puisque f est continue et non-nulle, il existe un intervalle I, non réduit à un point, sur lequel f ne s'annule pas. Mais alors, on en déduit que g doit être nulle sur I. Réciproquement, si g s'annule sur un intervalle I non-réduit à un point, alors on peut construire f continue qui s'annule hors de I et tel qu'il existe $a \in I$ avec $f(a) \neq 0$ (faire un dessin et construire f comme un "pic"). On a donc $f \neq 0$ et $N_g(f) = 0$, donc N_g n'est pas une norme. Par contraposée, on en déduit que N_g est une norme si et seulement si g ne s'annule pas sur un intervalle non réduit à un point.
2. Remarquons déjà que g, continue sur le segment $[0,1]$, est bornée par une constante $M > 0$. On a donc $N_g(f) \leq M\|f\|_\infty$ pour tout $f \in E$. Supposons de plus que g ne s'annule pas. Alors, puisque $|g|$ est continue et atteint ses bornes sur $[0,1]$, il existe $\delta > 0$ tel que $|g(x)| \geq \delta$ pour tout $x \in [0,1]$. On a alors clairement $N_g(f) \geq \delta\|f\|_\infty$ et les deux normes sont équivalentes. Réciproquement, si g s'annule, prouvons que les deux normes ne sont pas équivalentes. Soit $M > 0$. On va construire $f \in E$, $f \neq 0$, tel que $\|f\|_\infty \geq MN_g(f)$. Pour cela, on sait, par continuité de g, qu'il existe un intervalle I, non-réduit à un point, et contenu dans $[0,1]$, tel que $|g(x)| \leq \frac{1}{M}$ pour tout $x \in [0,1]$. Comme à la question précédente, on peut construire f nulle en dehors de I, avec $\|f\|_\infty \leq 1$ et $f(a) = 1$ pour au moins un a de I. On a alors
$$\|f\|_\infty = 1 \text{ tandis que } N_g(f) = \sup_{x \in I} |g(x)f(x)| \leq \frac{1}{M}.$$
Ceci prouve bien l'inégalité annoncée, et les deux normes ne sont pas équivalentes. En conclusion, on a démontré que les deux normes sont équivalentes si et seulement si g ne s'annule pas.