Mathématiques spéciales

# Feuille d'exercices n°5

## 1. Exercices basiques

### a. Continuité des applications linéaires

**Exercice 1.**

Déterminer si l'application linéaire $T : (E, N_1) \to (F, N_2)$ est continue dans les cas suivants :

1. $E = \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ muni de $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)|dt$ et $T : (E, \|.\|_1) \to (E, \|.\|_1),\ f \mapsto fg$ où $g \in E$ est fixé.
2. $E = \mathbb{R}[X]$ muni de $\|\sum_{k\geq 0} a_k X^k\| = \sum_{k\geq 0} |a_k|$ et $T : (E, \|.\|) \to (E, \|.\|)$, $P \mapsto P'$.
3. $E = \mathbb{R}_n[X]$ muni de $\|\sum_{k=0}^n a_k X^k\| = \sum_{k=0}^n |a_k|$ et $T : (E, \|.\|) \to (E, \|.\|)$, $P \mapsto P'$.
4. $E = \mathbb{R}[X]$ muni de $\|\sum_{k\geq 0} a_k X^k\| = \sum_{k\geq 0} k!|a_k|$ et $T : (E, \|.\|) \to (E, \|.\|)$, $P \mapsto P'$.
5. $E = \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ muni de $\|f\|_2 = \left(\int_0^1 |f(t)|^2 dt\right)^{1/2}$, $F = \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ muni de $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)|dt$ et $T : (E, \|.\|_2) \to (F, \|.\|_1),\ f \mapsto fg$ où $g \in E$ est fixé.

**Exercice 2.**

Soit $E = \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$. Pour $f \in E$, on pose

$$\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)|dt,$$

dont on admettra qu'il s'agit d'une norme sur $E$. Soit $\phi$ l'endomorphisme de $E$ défini par

$$\phi(f)(x) = \int_0^x f(t)dt.$$

1. Justifier la terminologie : "$\phi$ est un endomorphisme de $E$."
2. Démontrer que $\phi$ est continue.
3. Pour $n \geq 0$, on considère $f_n$ l'élément de $E$ défini par $f_n(x) = ne^{-nx}$, $x \in [0,1]$. Calculer $\|f_n\|_1$ et $\|\phi(f_n)\|_1$.
4. On pose $\|\|\phi\|\| = \sup_{f\neq 0_E} \frac{\|\phi(f)\|_1}{\|f\|_1}$. Déterminer $\|\|\phi\|\|$.

**Exercice 3.**

Soit $E = \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ muni de $\|\cdot\|_\infty$. On pose

$$A = \left\{ f \in E;\ f(0) = 0 \text{ et } \int_0^1 f(t)dt \geq 1 \right\}.$$

Démontrer que $A$ est une partie fermée de $E$.

**Exercice 4.**

Soit $E$ un espace préhilbertien muni de la norme associée au produit scalaire. Démontrer que l'orthogonal de toute partie $A$ de $E$ est un fermé de $E$.

**Exercice 5.**

Soit $N_1$ et $N_2$ deux normes sur l'espace vectoriel $E$. Montrer que $N_1$ et $N_2$ sont équivalentes si et seulement si $Id : (E, N_1) \to (E, N_2)$ et $Id : (E, N_2) \to (E, N_1)$ sont continues.

## b. Compacité

**Exercice 6.**

Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

1. L'image réciproque d'un compact par une application continue est un compact.

**Exercice 7.**

Déterminer si les ensembles suivants sont, ou ne sont pas, compacts :

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2 + y^4 = 1\} \qquad B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2 + y^5 = 2\}$$
$$C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2 + xy + y^2 \leq 1\} \quad D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2 + 8xy + y^2 \leq 1\}$$
$$E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ y^2 = x(1-2x)\}.$$

**Exercice 8.**

Soit $E = \mathcal{C}([0, 2\pi])$ muni de la norme $\| \cdot \|_2$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $f_n(x) = e^{inx}$.

1. Calculer $\|f_n - f_p\|_2$ pour $p, n \in \mathbb{N}$.
2. En déduire que $\bar{B}(0,1)$ n'est pas compacte.

**Exercice 9.**

Soit $K$ une partie compacte d'un espace vectoriel normé $E$ contenu dans la boule unité ouverte. Démontrer qu'il existe $r < 1$ tel que $K$ soit contenu dans $\bar{B}(0, r)$.

**Exercice 10.**

Soient $K, L$ deux compacts disjoints d'un espace vectoriel normé $E$. Démontrer que $d(K,L) = \inf_{x\in K,\ y\in L} \|y-x\| > 0$.

**Exercice 11.**

Soit $F$ un fermé, et $C$ un compact de $\mathbb{R}^n$. On note $G = F + C = \{x+y;\ x\in F \text{ et } y \in C\}$. Montrer que $G$ est fermé.

**Exercice 12.**

Soit $\mathcal{C} = \{(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n;\ x_1+\dots+x_n = 1,\ x_1\geq 0,\dots,x_n\geq 0\}$. Soit également $f:\mathcal{C}\to\mathbb{R}^+$ une fonction continue telle que $f(x)>0$ pour tout $x\in\mathcal{C}$. Démontrer que $\inf_{x\in\mathcal{C}} f(x) > 0$.

**Exercice 13.**

Soit $f:\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}$ une fonction continue telle que $\lim_{\|x\|\to\infty} f(x) = +\infty$. Montrer que $f$ admet un minimum.

**Exercice 14.**

Soit $A$ une partie compacte d'un espace vectoriel normé, $f : A\to\mathbb{R}$. On suppose que $f$ est localement bornée : pour tout $x\in A$, il existe $r>0$ et $M>0$ tels que, pour tout $y\in B(x,r)\cap A$, $|f(y)|\leq M$. Démontrer que $f$ est bornée sur $A$ tout entier.

### c. Connexité par arcs

**Exercice 15.**

Soit $E$ un espace vectoriel normé et $A$, $B$ deux parties connexes par arcs de $E$.

1. Démontrer que $A\times B$ est connexe par arcs.
2. En déduire que $A+B$ est connexe par arcs.
3. L'intérieur de $A$ est-il toujours connexe par arcs ?

**Exercice 16.**

Soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille de parties connexes par arcs de l'espace vectoriel normé $E$ telles que $\bigcap_{i\in I} A_i \neq \varnothing$. Démontrer que $\bigcup_{i\in I} A_i$ est connexe par arcs.

**Exercice 17.**

Soit $I$ un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$. On souhaite démontrer à l'aide de la connexité par arcs le résultat classique suivant : si $f$ est continue et injective, alors $f$ est strictement monotone. Pour cela, on pose $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x > y\}$ et $F(x,y) = f(x) - f(y)$, pour $(x,y) \in C$.

1. Démontrer que $F(C)$ est un intervalle.
2. Conclure.

**Exercice 18.**

On dit que deux parties $A$ et $B$ de deux espaces vectoriels normés $E$ et $F$ sont homéomorphes s'il existe une bijection $f : A \to B$ telle que $f$ et $f^{-1}$ soient continues.

1. Démontrer que $\mathbb{R}^2 \backslash \{0\}$ est connexe par arcs.
2. Démontrer que $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^2$ ne sont pas homéomorphes.
3. Démontrer que $[0,1]$ et le cercle trigonométrique ne sont pas homéomorphes.

## 2. Exercices d'entraînement

### a. Continuité

**Exercice 19.**

La fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x,y) \mapsto xy$ est-elle uniformément continue ?

### b. Continuité des applications linéaires

**Exercice 20.**

Soit $E = \mathbb{R}[X]$, muni de la norme $\|\sum_i a_i X^i\| = \sum_i |a_i|$.

1. Est-ce que l'application linéaire $\phi : (E, \|.\|) \to (E, \|.\|)$, $P(X) \mapsto P(X+1)$ est continue sur $E$ ?
2. Est-ce que l'application linéaire $\psi : (E, \|.\|) \to (E, \|.\|)$, $P(X) \mapsto AP$, où $A$ est un élément fixé de $E$, est continue sur $E$ ?

**Exercice 21.**

Soit $E$ l'espace vectoriel des suites $(a_n)_{n\geq 1}$ de nombres complexes telle que $\sum_{n\geq 1} |a_n|$ converge. On pose, pour $a = (a_n) \in E$,

$$\|a\| = \sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|.$$

1. Démontrer que $\|\cdot\|$ définit une norme sur $E$.
2. On pose $F = \{a \in E;\ \sum_{n\geq 1} a_n = 1\}$. $F$ est-il ouvert ? fermé ? borné ?

**Exercice 22.**

Soit $E$ un espace vectoriel normé et $\mathcal{L}_c(E)$ l'ensemble des applications linéaires continues sur $E$. Pour $u \in \mathcal{L}_c(E)$, on pose
$$\|u\| = \sup\{\|u(x)\|;\ \|x\| \leq 1\}.$$

1. Démontrer que ceci définit une norme sur $\mathcal{L}_c(E)$.
2. Démontrer que, pour tout $x \in E$ et tout $u \in \mathcal{L}_c(E)$, on a
$$\|u(x)\| \leq \|u\| \times \|x\|.$$
En déduire que, pour tous $u, v \in \mathcal{L}_c(E)$, alors $\|u \circ v\| \leq \|u\| \times \|v\|$.

**Exercice 23.**

Soit $E$ un espace vectoriel normé et $u \in \mathcal{L}(E)$. Démontrer que $u$ est continue si et seulement si $\{x \in E;\ \|u(x)\| = 1\}$ est fermé.

**Exercice 24.**

Soit $E$ un espace vectoriel normé et $u$ un endomorphisme de $E$ vérifiant, pour tout $x \in E$, $\|u(x)\| \leq \|x\|$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose
$$v_n = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} u^k.$$

1. Simplifier $v_n \circ (u - Id)$.
2. Montrer que $\ker(u - Id) \cap \mathrm{Im}(u - Id) = \{0\}$.
3. On suppose désormais que $E$ est de dimension finie. Démontrer que
$$\ker(u - Id) \oplus \mathrm{Im}(u - Id) = E.$$
4. Soit $p$ la projection sur $\ker(u - Id)$ parallèlement à $\mathrm{Im}(u - Id)$. Démontrer que, pour tout $x \in E$, $v_n(x) \to p(x)$.

## c. Compacité

**Exercice 25.**

Soient $K, L$ deux parties compactes d'un espace vectoriel normé $E$. On pose $K + L = \{x + y;\ x \in K,\ y \in L\}$. Démontrer que $K + L$ est une partie compacte de $E$.

**Exercice 26.**

Soit $E$ un espace vectoriel normé de dimension $n$. Si $F$ est un sous-ensemble quelconque de $E$, on appelle enveloppe convexe de $F$, et on note $\mathrm{Conv}(F)$, le plus petit sous-ensemble convexe (au sens de l'inclusion) contenant $F$. On note $\mathcal{H}$ l'ensemble des $(\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1}) \in (\mathbb{R}_+)^{n+1}$ et on admet que Conv$(F)$ est l'ensemble des combinaisons linéaires de la forme $\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_i$, où $x_1, \dots, x_{n+1} \in F$ et $(\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1}) \in \mathcal{H}$. Le but de l'exercice est de démontrer que si $K$ est une partie compacte de $E$, alors Conv$(K)$ est aussi une partie compacte de $E$.

1. Démontrer que $\mathcal{H}$ est une partie compacte de $\mathbb{R}^{n+1}$.
2. Définir une application continue $\phi : \mathbb{R}^{n+1} \times E^{n+1} \to E$ telle que $\mathrm{Conv}(K) = \phi(\mathcal{H} \times K^{n+1})$.
3. Conclure.

**Exercice 27.**

Soit $E = \mathbb{R}^d$ muni d'une norme $\|\cdot\|$, et $A$ une partie non vide de $E$. On définit la distance d'un élément $x_0$ de $E$ à une partie $A$ de $E$, notée $d(x_0, A)$, par la formule

$$d(x_0, A) = \inf_{x \in A} \|x - x_0\|.$$

1. Supposons $A$ compact. Montrer que pour tout $x_0 \in E$ il existe $y \in A$ tel que $d(x_0, A) = \|y - x_0\|$.
2. Montrer que le résultat est encore vrai si on suppose seulement que $A$ est fermé. (On remarquera que pour toute partie $B$ de $A$ on a $d(x_0, B) \geq d(x_0, A)$.)
3. Montrer que l'application qui à $x_0$ associe $d(x_0, A)$ est continue sur $E$ (sans aucune hypothèse sur $A$).
4. En déduire que si $A$ est un fermé de $E$ et $B$ un compact de $E$ tels que $A$ et $B$ sont disjoints, alors il existe une constante $\delta > 0$ telle que
$$\|a - b\| \geq \delta \qquad \forall (a, b) \in A \times B.$$
5. Montrer par un contre-exemple que le résultat est faux si on suppose seulement que $A$ et $B$ sont deux fermés disjoints.

**Exercice 28.**

Soit $E$ un espace vectoriel normé et $(K_n)$ une suite de parties compactes de $E$ telle que, pour chaque entier $n$, on $K_{n+1} \subset K_n$. On pose $K = \bigcap_{n \geq 1} K_n$.

1. Démontrer que $K \neq \varnothing$.
2. Soit $U$ un ouvert contenant $K$. Démontrer qu'il existe un entier $n$ tel que $K_n \subset U$.

**Exercice 29.**

Soit $\Omega$ un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Démontrer qu'il existe toujours une suite exhaustive de compacts $(K_j)_{j \geq 1}$ qui vérifie

1. $\forall j \geq 1,\ K_j \subset \Omega$
2. $\forall j \geq 1,\ K_j \subset K_{j+1}$
3. $\Omega = \cup_{j \geq 1} K_j$.

**Exercice 30.**

Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Montrer que les trois conditions suivantes sont équivalentes :

1. $\forall M > 0,\ \exists R > 0$ tel que $\|x\| > R \implies |f(x)| > M$.
2. Pour toute partie bornée $B$ de $\mathbb{R}$, $f^{-1}(B)$ est une partie bornée de $\mathbb{R}^n$.
3. Pour toute partie compacte $K$ de $\mathbb{R}$, $f^{-1}(K)$ est une partie compacte de $\mathbb{R}^n$.

**Exercice 31.**

Une fonction $f$ définie sur une partie $A \subset \mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ est dite *localement lipschitzienne* si, pour tout $x \in A$, il existe un voisinage $V_x$ de $x$ et une constante $C > 0$ telle que :

$$\forall (y,z) \in A \cap V_x,\ \|f(y) - f(z)\| \leq C\|y - z\|.$$

Montrer qu'une fonction localement lipschitzienne sur une partie compacte $K$ de $\mathbb{R}^n$ est en fait lipschitzienne.

**Exercice 32.**

Soient $A, B$ deux parties d'un espace vectoriel normé $E$, $f : A \to B$ une application et $G = \{(x, f(x));\ x \in A\}$ son graphe.

1. On suppose que $f$ est continue. Démontrer que son graphe est fermé.
2. On suppose de plus que $B$ est compact et que le graphe de $f$ est fermé. Démontrer que $f$ est continue (on pourra utiliser le théorème suivant : une suite d'éléments d'une partie compacte converge si et seulement si elle admet une unique valeur d'adhérence.)

## d. Connexité par arcs

**Exercice 33.**

Soit $E$ un espace vectoriel normé de dimension supérieure ou égale à deux (éventuellement, de dimension infinie). Démontrer que sa sphère unité $\mathcal{S}_E$ est connexe par arcs.

**Exercice 34.**

Soit $I$ un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et soit $f : I \to \mathbb{R}$ une application dérivable. Notons $A = \{(x,y) \in I \times I;\ x < y\}$.

1. Démontrer que $A$ est une partie connexe par arcs de $\mathbb{R}^2$.
2. Pour $(x,y) \in A$, posons $g(x,y) = \frac{f(y)-f(x)}{y-x}$. Démontrer que $g(A) \subset f'(I) \subset \overline{g(A)}$.
3. Démontrer que $f'(I)$ est un intervalle.

## 3. Exercices d'approfondissement

### a. Continuité

**Exercice 35.**

Soit $I$ un intervalle de $\mathbb{R}$ non réduit à un point et $f : I \to \mathbb{R}$. On dit que $f$ vérifie la propriété des valeurs intermédiaires si pour tout $(a, b) \in I^2$ avec $a < b$ et pour tout réel $\lambda$ compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = \lambda$. Démontrer que $f$ est continue sur $I$ si et seulement si $f$ vérifie la propriété des valeurs intermédiaires, et si pour tout $x \in I$, $f^{-1}(\{f(x)\})$ est fermé dans $I$.

### b. Continuité des applications linéaires

**Exercice 36.**

Soit $E = \mathcal{C}^\infty([0, 1], \mathbb{R})$. On considère l'opérateur de dérivation $D : E \to E$, $f \mapsto f'$. Montrer que, quelle que soit la norme $N$ dont on munit $E$, $D$ n'est jamais une application linéaire continue de $(E, N)$ dans $(E, N)$.

### c. Compacité

**Exercice 37.**

Soit $E$ un espace vectoriel normé, $B$ la boule unité fermée de $E$ et $S$ la sphère unité. Démontrer que $B$ est compact si et seulement si $S$ est compact.

**Exercice 38.**

Soit $E$ un espace vectoriel de dimension finie et $K$ une partie compacte de $E$. Pour tout $r > 0$, on pose $K_r = \bigcup_{x \in K} \bar{B}(x, r)$. Démontrer que $K_r$ est une partie compacte de $E$.

**Exercice 39.**

Soit $(u_n)$ une suite de $\mathbb{R}^d$. Pour $n \geq 1$, on pose $A_n = \{u_p;\ p \geq n\}$. Démontrer que l'ensemble des valeurs d'adhérence de $(u_n)$ est :

$$V = \bigcap_{n \geq 1} \overline{A_n}.$$

En déduire que si la suite est bornée, $V$ (l'ensemble des valeurs d'adhérence) est compact.

**Exercice 40.**

Soit $(E, \|.\|)$ un espace vectoriel normé. Soit $(x_n)$ une suite convergente de $E$ et soit $x$ sa limite. Montrer que l'ensemble :

$$A = \{x\} \cup \{x_n,\ n \in \mathbb{N}\}$$

est compact.

**Exercice 41.**

Soit $E$ une partie compacte d'un espace vectoriel normé, et $f : E \to E$ une fonction continue vérifiant :

$$\forall (x,y) \in E^2,\ x \neq y \implies \|f(x) - f(y)\| < \|x - y\|.$$

1. Montrer que $f$ admet un unique point fixe (que l'on notera $\alpha$).
2. Ces résultats subsistent-ils si on suppose simplement $E$ fermé ?

**Exercice 42.**

Soit $A$ une partie compacte d'un espace vectoriel normé, et $f : A \to A$ vérifiant $\|f(x) - f(y)\| \geq \|x - y\|$ pour tous $x, y \in A$. Le but de l'exercice est de démontrer que $f$ est une isométrie surjective.

1. Soit $a, b \in A$, et $(a_n)$, $(b_n)$ les suites de $A$ définies par $a_0 = a$, $b_0 = b$, $a_{n+1} = f(a_n)$ et $b_{n+1} = f(b_n)$. Démontrer que, pour tout $\varepsilon > 0$ et tout $p \geq 1$, il existe $k \geq p$ tel que $\|a - a_k\| < \varepsilon$ et $\|b - b_k\| < \varepsilon$. En déduire que $f$ est à image dense.
2. On pose $u_n = \|a_n - b_n\|$. Montrer que $(u_n)$ est une suite stationnaire.
3. En déduire que $f$ est une isométrie.
4. Démontrer que $f$ est surjective.

## d. Connexité par arcs

**Exercice 43.**

Soit $A$ une partie d'un espace vectoriel normé $E$, et $f : A \to F$ une application continue, où $F$ est un espace vectoriel normé. On dit que $f$ est localement constante si, pour tout $a \in A$, il existe $r > 0$ tel que $f$ est constante sur $B(a, r) \cap A$. Le but de l'exercice est de démontrer que si $A$ est connexe par arcs et $f$ est localement constante, alors $f$ est constante. Pour cela, on fixe $a, b \in A$ et on considère $\phi : [0,1] \to A$ un chemin continu tel que $\phi(0) = a$ et $\phi(1) = b$. On pose $t = \sup\{s \in [0,1];\ f(\phi(s)) = f(a)\}$.

1. Démontre que $t = 1$.
2. Conclure.

**Exercice 44.**

Soient $A$ une partie connexe par arcs d'un espace vectoriel normé, et soit $B$ une partie de $A$ qui est à la fois ouverte et fermée relativement à $A$. On pose $f : A \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = 1$ si

$x \in B$ et $f(x) = 0$ si $x \notin B$.

1. Démontrer que $f$ est continue.
2. En déduire que $B = \varnothing$ ou $B = A$.