

Feuille d'exercices n°7

1. Exercices basiques**a. Ordre d'un élément dans un groupe****Exercice 1.**

Quel est l'ordre de $\bar{9}$ dans $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$?

Exercice 2.

Soit G un groupe et $x \in G$ d'ordre n . Quel est l'ordre de x^2 ?

Exercice 3.

Soit G un groupe dont tous les éléments (sauf l'élément neutre) sont d'ordre au plus deux. Démontrer que G est abélien.

Exercice 4.

Dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les droites \mathcal{D} et \mathcal{D}' d'équations paramétriques respectives

$$\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 3 - 2t \\ z = 5 - t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x = 4 - 3t' \\ y = 5 - 8t' \\ z = 7 - t' \end{cases} \quad t' \in \mathbb{R}.$$

1. Les droites \mathcal{D} et \mathcal{D}' sont-elles coplanaires ?
2. Vérifier que le point $A(2, 3, 5)$ est un point de \mathcal{D} . Soit M' un point quelconque de \mathcal{D}' . Quel est le lieu du point I , milieu de $[AM']$, lorsque M' décrit la droite \mathcal{D}' .
3. On considère un point M de \mathcal{D} et un point M' de \mathcal{D}' . Quel est le lieu du milieu du segment $[MM']$ lorsque M et M' décrivent respectivement les droites \mathcal{D} et \mathcal{D}' .

b. Anneaux, sous-anneaux, idéaux**Exercice 5.**

Un élément x d'un anneau A est dit nilpotent s'il existe un entier $n \geq 1$ tel que $x^n = 0$. On suppose que A est commutatif, et on fixe x, y deux éléments nilpotents.

1. Montrer que xy est nilpotent.
2. Montrer que $x + y$ est nilpotent.

3. Montrer que $1_A - x$ est inversible.
4. Dans cette question, on ne suppose plus que A est commutatif. Soit $u, v \in A$ tels que uv est nilpotent. Montrer que vu est nilpotent.

Exercice 6.

On dit qu'un anneau A est un anneau de Boole si, pour tout $x \in A$, $x^2 = x$. On fixe A un tel anneau.

1. Démontrer que, pour tout $x \in A$, $x = -x$.
2. Montrer que A est commutatif.

Exercice 7.

Soit $(G, +)$ un groupe commutatif. On note $\text{End}(G)$ l'ensemble des endomorphismes de G sur lequel on définit la loi $+$ par $f + g : G \rightarrow G$, $x \mapsto f(x) + g(x)$. Démontrer que $(\text{End}(G), +, \circ)$ est un anneau.

Exercice 8.

Soit $A = \left\{ \frac{m}{n}; m \in \mathbb{Z}, n \in 2\mathbb{N} + 1 \right\}$ (c'est-à-dire que A est l'ensemble des rationnels à dénominateur impair). Démontrer que $(A, +, \times)$ est un anneau. Quels sont ses éléments inversibles?

Exercice 9.

Pour $d \in \mathbb{N}$, on note $A_d = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2; y - x \in d\mathbb{Z}\}$.

1. Démontrer que, pour tout $d \in \mathbb{N}$, A_d est un sous-anneau de \mathbb{Z}^2 .
2. Réciproquement, soit A un sous-anneau de \mathbb{Z}^2 . Démontrer que $H = \{x \in \mathbb{Z}; (x, 0) \in A\}$ est un sous-groupe de \mathbb{Z} .
3. En déduire qu'il existe $d \in \mathbb{N}$ tel que $A = A_d$.

Exercice 10.

Soit $(A, +, \times)$ un anneau commutatif et M une partie de A . On appelle annulateur de M l'ensemble des $x \in A$ tels que $xy = 0$ pour tout $y \in M$. Démontrer que l'annulateur de M est un idéal de $(A, +, \times)$.

Exercice 11.

On appelle nilradical d'un anneau commutatif $(A, +, \times)$ l'ensemble de ses éléments nilpotents, c'est-à-dire l'ensemble des $x \in A$ pour lesquels il existe $n \geq 1$ de sorte que $x^n = 0$. Démontrer que le nilradical de A est un idéal de A .

Exercice 12.

Soit A un anneau commutatif.

1. On suppose que A n'admet que les idéaux triviaux $\{0\}$ et A . Démontrer que A est un corps.
2. On suppose que A est intègre et qu'il n'admet qu'un nombre fini d'idéaux. Démontrer que A est un corps.

Exercice 13.

Soit (I_n) une suite croissante d'idéaux de $\mathbb{K}[X]$, où \mathbb{K} est un corps. Démontrer que la suite (I_n) est stationnaire.

Exercice 14.

Pour $1 \leq i, j \leq n$, on note $E_{i,j}$ la matrice élémentaire ayant tous ses coefficients nuls, sauf le coefficient de la i -ème ligne et de la j -ème colonne qui vaut 1.

1. Rappeler la formule donnant $E_{i,j}E_{k,l}$.
2. Soit $M = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Que vaut $E_{i,j}M$? $ME_{k,l}$.
3. Démontrer que les seuls idéaux de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ sont $\{0\}$ et $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

2. Exercices d'entraînement**a. Ordre d'un élément dans un groupe****Exercice 15.**

Soit G un groupe de cardinal $2n$.

1. Démontrer que la relation \mathcal{R} définie sur G par

$$x\mathcal{R}y \iff x = y \text{ ou } x = y^{-1}$$

est une relation d'équivalence sur G .

2. En déduire que G admet des éléments d'ordre deux.

Exercice 16.

Soient G et H deux groupes.

1. Montrer que si g est un élément d'ordre p de G et h un élément d'ordre q de H , alors (g, h) est d'ordre $\text{ppcm}(p, q)$ dans $G \times H$.
2. On suppose que G et H sont cycliques. Démontrer que $G \times H$ est cyclique si et seulement si les ordres de G et H sont premiers entre eux.

b. Anneaux, sous-anneaux, idéaux

Exercice 17.

Soit \mathbb{D} l'ensemble des nombres décimaux,

$$\mathbb{D} = \left\{ \frac{n}{10^k}; n \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{N} \right\}.$$

Démontrer que $(\mathbb{D}, +, \times)$ est un anneau. Quels sont ses éléments inversibles ?

Exercice 18.

On considère $\mathbb{Z}[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2}; a, b \in \mathbb{Z}\}$.

1. Montrer que $(\mathbb{Z}[\sqrt{2}], +, \times)$ est un anneau.
2. On note $N(a + b\sqrt{2}) = a^2 - 2b^2$. Montrer que, pour tous x, y de $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$, on a $N(xy) = N(x)N(y)$.
3. En déduire que les éléments inversibles de $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ sont ceux s'écrivant $a + b\sqrt{2}$ avec $a^2 - 2b^2 = \pm 1$.

Exercice 19.

Soit A un anneau. On appelle caractéristique de A l'ordre de 1_A dans le groupe additif $(A, +)$. Dans la suite, on supposera que A est de caractéristique finie n .

1. Démontrer que, pour tout $x \in A$, $nx = 0$.
2. Démontrer que si A est intègre, n est un nombre premier.
3. Démontrer que si A est intègre et commutatif, alors $x \mapsto x^n$ est un morphisme d'anneaux.

Exercice 20.

Soit $(A, +, \times)$ un anneau commutatif. Si I et J sont deux idéaux de A , on note

$$\begin{aligned} I + J &= \{i + j; i \in I, j \in J\} \\ I.J &= \{i_1j_1 + \cdots + i_nj_n; n \geq 1, i_k \in I, j_k \in J\} \end{aligned}$$

On dit que deux idéaux I et J sont étrangers si $I + J = A$.

1. Montrer que $I + J$ et $I.J$ sont encore des idéaux de A .
2. Montrer que $I.J \subset I \cap J$.
3. Montrer que $(I + J).(I \cap J) \subset I.J$.
4. Montrer que si I et J sont étrangers, alors $I.J = I \cap J$.

Exercice 21.

Soit p un nombre premier. On note

$$\mathbb{Z}_p = \left\{ x = \frac{m}{n}; (m, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*, p \wedge n = 1 \right\}.$$

1. Vérifier que \mathbb{Z}_p est un sous-anneau de $(\mathbb{Q}, +, \times)$.
2. Soit $k \geq 0$. On note

$$J_{p^k} = \left\{ \frac{m}{n}; (m, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*, p \wedge n = 1, p^k | m \right\}.$$

Vérifier que J_{p^k} est un idéal de \mathbb{Z}_p .

3. Réciproquement, montrer que si I est un idéal de A , il existe $k \geq 1$ tel que $I = J_{p^k}$.

3. Exercices d'approfondissement

a. Ordre d'un élément dans un groupe

Exercice 22.

Soit G un groupe abélien, x et y deux éléments de G d'ordres respectifs p et q .

1. On suppose que p et q sont premiers entre eux. Démontrer que xy est d'ordre pq .
2. Importance des hypothèses - 1 : Si $H = GL_2(\mathbb{R})$, $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$, vérifier que A et B sont d'ordre fini, mais que AB n'est pas d'ordre fini.
3. Importance des hypothèses - 2 : Si p et q ne sont pas supposés premiers entre eux, démontrer que le produit xy n'est pas nécessairement d'ordre pq , ou d'ordre $\text{ppcm}(p, q)$.
4. Une application :
 - (a) Soit d un diviseur de p . Démontrer qu'il existe un élément d'ordre d dans G .
 - (b) En déduire que G admet des éléments d'ordre $\text{ppcm}(p, q)$.
 - (c) On suppose de plus que G est fini. Démontrer que G admet un élément dont l'ordre est le ppcm de l'ordre des éléments de G .

Exercice 23.

Soit G un groupe cyclique et soit H un sous-groupe de G . Démontrer que H est cyclique.

Exercice 24.

1. Soit G un groupe et H, K deux sous-groupes de G d'ordre des entiers premiers. Démontrer que $H = K$ ou que $H \cap K = \{e\}$.
2. Démontrer que dans un groupe d'ordre 35, il existe un élément d'ordre 5 et un élément d'ordre 7.

b. Anneaux, sous-anneaux, idéaux

Exercice 25.

Soit A un anneau intègre commutatif fini. Démontrer que A est un corps.

Exercice 26.

Soit E un ensemble fini et $A = \mathcal{P}(E)$.

1. Montrer que (A, Δ, \cap) est un anneau commutatif. Est-il intègre ?
2. Soit $E' \subset E$. Démontrer que $I = \mathcal{P}(E')$ est un idéal de A .
3. Réciproquement, soit I un idéal de A . Prouver que

$$\begin{cases} \forall X \in I, \forall Y \subset X, Y \in I \\ \forall X \in I, \forall Y \in I, X \cup Y \in I. \end{cases}$$

4. En déduire qu'il existe $E' \subset E$ tel que $I = \mathcal{P}(E')$.
5. Si E est infini, démontrer que l'ensemble des parties finies de E forme un idéal de A qui n'est pas de la forme $\mathcal{P}(E')$.

Exercice 27.

Soit A un anneau commutatif (unitaire). Si I est un idéal de A , on appelle radical de I l'ensemble $\sqrt{I} = \{x \in A; \exists n \geq 1, x^n \in I\}$.

1. Montrer que \sqrt{I} est un idéal de A .
2. Soient I, J deux idéaux de A et $p \geq 1$. Montrer que

$$\sqrt{I \cdot J} = \sqrt{I \cap J} = \sqrt{I} \cap \sqrt{J}, \quad \sqrt{\sqrt{I}} = \sqrt{I} \quad \text{et} \quad \sqrt{I^p} = \sqrt{I}.$$

3. Si $A = \mathbb{Z}$ et $I = k\mathbb{Z}$, $k \geq 1$, déterminer le radical de I .