Mathématiques spéciales

Corrigé de la feuille d'exercices n°10

1. Exercices basiques

Exercice 1.

Soit $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ et D l'endomorphisme de E qui à f associe f'. Déterminer les valeurs propres de D et les sous-espaces propres associés.

Correction.

f est un vecteur propre de D associé à la valeur propre $\lambda \in \mathbb{R}$ si et et seulement si $f' = \lambda f$. f est donc un multiple de la fonction $x \mapsto \exp(\lambda x)$, et la réciproque est vraie. Autrement dit, tous les réels sont des valeurs propres pour D, et $\exp(\lambda x)$ est une base de l'espace propre associé à λ.

Exercice 2.

Soit $E = \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ l'espace des suites à coefficients complexes, et ϕ l'endomorphisme de E qui à une suite (u_n) associe la suite (v_n) définie par $v_0 = u_0$ et pour tout $n \geq 1$,

$$v_n = \frac{u_n + u_{n-1}}{2}.$$

Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de ϕ.

Correction.

Soit (u_n) une valeur propre associée au vecteur propre λ. Alors on a $u_0 = \lambda u_0$ et pour tout $n \geq 1$, on a

$$\frac{u_n + u_{n-1}}{2} = \lambda u_n \iff (1 - 2\lambda)u_n = -u_{n-1}.$$

On distingue alors trois cas :

— Si $\lambda = 1$, alors on a $u_0 = u_0$ (qui n'implique plus rien sur u_0), puis pour tout $n \geq 1$, on a $u_n = u_{n-1}$. Réciproquement, toute suite constante est bien vecteur propre de ϕ pour la valeur propre 1. On en déduit que 1 est une valeur propre de ϕ dont l'espace propre associé est constitué par les suites constantes.

— Si $\lambda = 1/2$, alors le système devient $u_0 = 0$ et pour tout $n \geq 1$, $u_{n-1} = 0$ ce qui implique que (u_n) est la suite nulle et donc $1/2$ n'est pas valeur propre de ϕ.

— Dans tous les autres cas, le système devient $u_0 = 0$ et pour tout $n \geq 1$,

$$u_n = \frac{1}{2\lambda - 1} u_{n-1}.$$

Ainsi, la suite (u_n) est là-encore la suite nulle, et λ n'est pas valeur propre.

En conclusion, la seule valeur propre est 1, et les seuls vecteurs propres sont les suites constantes.

Exercice 3.

Expliquer sans calculs pourquoi la matrice suivante n'est pas diagonalisable :

$$A = \begin{pmatrix} \pi & 1 & 2 \\ 0 & \pi & 3 \\ 0 & 0 & \pi \end{pmatrix}.$$

Correction.

La matrice A étant triangulaire supérieure, ses valeurs propres sont données par les éléments de la diagonale. La seule valeur propre de A est donc π. Si A était diagonalisable, alors il existerait une matrice $P \in GL_3(\mathbb{R})$ telle que

$$A = P(\pi I_3)P^{-1}.$$

Mais puisque I_3 commute avec toutes les matrices, on aurait

$$A = \pi I_3 P P^{-1} = \pi I_3.$$

Ce n'est pas le cas : A n'est donc pas diagonalisable.

Exercice 4.

Soit A la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Démontrer que A est diagonalisable et donner une matrice P inversible et une matrice D diagonale telles que $A = PDP^{-1}$. En déduire la valeur de A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Correction.

Le calcul du polynôme caractéristique ne pose pas de problèmes, et on trouve, sous forme factorisée, $\chi_A(x) = (2-x)(4-x)^2$. On ne peut pas conclure directement que A est diagonalisable, il faut déterminer une base des sous-espaces propres associés. Pour la valeur propre 2, on résoud l'équation $AX = 2X$ avec $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. On trouve le système

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x & = & x \\ y & = & -2x \\ z & = & x \end{array} \right.$$

Ainsi, le sous-espace propre associé à la valeur propre 2 est le sous-espace vectoriel engendré par le vecteur $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Cherchons ensuite le sous-espace propre associé à la valeur propre 4.

On doit résoudre $AX = 4X$ et on trouve cette fois le système :

$$\begin{cases} x &= x \\ y &= y \\ z &= -x \end{cases}$$

Une base de l'espace propre associé à la valeur propre 4 est donc donné par (u_2, u_3), avec $u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$. Les dimensions des sous-espaces propres sont égales aux multiplicités des valeurs propres correspondantes, donc A est diagonalisable. Plus précisément on a $A = PDP^{-1}$ avec

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ et } D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Il vient alors que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $A^n = PD^nP^{-1}$. D^n est tout simplement égale à

$$D = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 4^n & 0 \\ 0 & 0 & 4^n \end{pmatrix}.$$

Après un petit calcul, on trouve que

$$P^{-1} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -2 & -2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On en déduit finalement que

$$A^n = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2^n + 4^n & 0 & 2^n - 4^n \\ 2(4^n - 2^n) & 2.4^n & 2(4^n - 2^n) \\ 2^n - 4^n & 0 & 2^n + 4^n \end{pmatrix}.$$

Exercice 5.

Soit A la matrice $\begin{pmatrix} -4 & -6 & 0 \\ 3 & 5 & 0 \\ 3 & 6 & 5 \end{pmatrix}$.

1. Diagonaliser A.
2. Calculer A^n en fonction de n.
3. On considère les suites (u_n), (v_n) et (w_n) définies par leur premier terme u_0, v_0 et w_0 et les relations suivantes :
$$\begin{cases} u_{n+1} &= -4u_n - 6v_n \\ v_{n+1} &= 3u_n + 5v_n \\ w_{n+1} &= 3u_n + 6v_n + 5w_n \end{cases}$$
pour $n \geq 0$. On pose $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$. Exprimer X_{n+1} en fonction de A et X_n. En déduire u_n, v_n et w_n en fonction de n.

Correction.

1. On calcule le polynôme caractéristique de A. On trouve

$$P_A(X) = (X+1)(X-2)(X-5).$$

$A \in M_3(\mathbb{R})$ a trois valeurs propres, $-1, 2, 5$: A est donc diagonalisable. On cherche les sous-espaces propres associés. Pour -1, on a, pour $X = (x, y, z)$,

$$AX = -X \iff \left\{ \begin{array}{rcl} -3x - 6y &=& 0 \\ 3x + 6y &=& 0 \\ 3x + 6y + 6z &=& 0 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{rcl} x &=& -2y \\ y &=& y \\ z &=& 0 \end{array} \right.$$

Le vecteur $(2, -1, 0)$ est donc un vecteur propre de A associé à la valeur propre -1. On fait de même avec 2, et on trouve (par exemple) le vecteur propre $(1, -1, 1)$ et pour 5, et on trouve le vecteur propre $(0, 0, 1)$. Ainsi, en posant

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

on a $PDP^{-1} = A$. Le calcul de P^{-1} donne

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. On a $A = PDP^{-1}$, ce qui entraîne par récurrence $A = PD^nP^{-1}$. D^n se calcule facilement en mettant les coefficients de la diagonale à la puissance n. En effectuant les deux produits de matrice, on trouve finalement :

$$A^n = \begin{pmatrix} 2(-1)^n - 2^n & 2(-1)^n - 2^{n+1} & 0 \\ (-1)^{n+1} + 2^n & (-1)^{n+1} + 2^{n+1} & 0 \\ -2^n + 5^n & -2^{n+1} + 2.5^n & 5^n \end{pmatrix}.$$

3. On a $X_{n+1} = AX_n$. Par récurrence, on a $X_n = A^n X_0$. Grâce au calcul de A^n effectué à la question précédente, on trouve

$$\left\{ \begin{array}{rcl} u_n &=& (2(-1)^n - 2^n)u_0 + (2(-1)^n - 2^{n+1})v_0 \\ v_n &=& ((-1)^{n+1} + 2^n)u_0 + ((-1)^{n+1} + 2^{n+1})v_0 \\ w_n &=& (-2^n + 5^n)u_0 + (-2^{n+1} + 2.5^n)v_0 + 5^n w_0. \end{array} \right.$$

Exercice 6.

Soient f, g deux endomorphismes du $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie tels que f est diagonalisable. Démontrer que f et g commutent si et seulement si les sous-espaces propres de f sont stables par g.

Correction.

D'abord si f et g commutent, on sait que $\ker(P(f))$ est stable par g pour tout polynôme P, en particulier pour les polynômes $P(X) = X - \lambda$. Ainsi, chaque sous-espace propre de f est stable par g. Réciproquement, on suppose que g laisse stable tous les sous-espaces propres de f. Soit E_λ un tel sous-espace propre et soit $x \in E_\lambda$. Alors d'une part

$$g(f(x)) = g(\lambda x) = \lambda g(x)$$

et d'autre part, puisque $g(x) \in E_\lambda$ on a aussi

$$f(g(x)) = \lambda g(x).$$

Autrement dit, si $x \in E_\lambda$, on a $f(g(x)) = g(f(x))$. Maintenant, comme f est diagonalisable, E est somme directe des sous-espaces propres de f. Écrivant tout $x \in E$ comme somme de x_i, où $x_i \in E_{\lambda_i}$, on prouve que $f(g(x)) = g(f(x))$ et donc que g et f commutent.

Exercice 7.

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et u, v deux endomorphismes de E.

1. Démontrer que si $u \circ v = v \circ u$, alors $\mathrm{Im}(u)$ et $\ker(u)$ sont stables par v. La réciproque est-elle vraie ?
2. On suppose désormais que u est un projecteur. Démontrer que $u \circ v = v \circ u$ si et seulement si $\ker(u)$ et $\mathrm{Im}(u)$ sont stables par v.

Correction.

1. Commençons par prouver que $\mathrm{Im} u$ est stable par v. Soit $y \in \mathrm{Im}(u)$, $y = u(x)$ avec $x \in E$. Alors $v(y) = v(u(x)) = u(v(x)) \in \mathrm{Im}(u)$. Prenons ensuite $z \in \ker(u)$. Alors $u(z) = 0$ et $u(v(z)) = v(u(z)) = 0$ et donc $v(z) \in \ker(u)$. La réciproque est fausse. En effet, si u et v sont tous les deux des automorphismes, il est clair que $\ker(u) = \{0\}$ et $\mathrm{Im}(u) = E$ sont stables car v est bijective. Mais il n'y a aucune raison pour que u et v commutent. Donnons un exemple, en prenant pour u et v les automorphismes de $\mathbb{R}^2$ dont les matrices dans la base canonique sont respectivement
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$
On vérifie aisément que $AB \neq BA$.
2. Puisque u est un projecteur, on sait que $E = \ker(u) \oplus \mathrm{Im}(u)$. Prenons $x \in E$ et écrivons le $x = y + z$ dans cette décomposition. Alors
$$u(v(x)) = u(v(y)) + u(v(z)).$$
Mais $v(y) \in \ker(u)$ et donc $u(v(y)) = 0$ et $v(z) \in \mathrm{Im}(u)$ et donc $u(v(z)) = v(z)$. D'autre part,
$$v(u(x)) = v(0 + z) = v(z).$$
On a donc bien $u \circ v = v \circ u$.

Exercice 8.

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension $n \geq 2$, et soit $f \in \mathcal{L}(E)$ de rang 1.

1. On suppose que f est diagonalisable. Démontrer que $f \circ f$ n'est pas l'endomorphisme nul.
2. Réciproquement, on suppose que $f \circ f$ n'est pas l'endomorphisme nul, et on note $u \in E$ tel que $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{vect}(u)$.
   (a) Démontrer que u est un vecteur propre associé à une valeur propre non nulle.
   (b) En déduire que f est diagonalisable.

Correction.

1. On sait, puisque le rang de f est 1, et donc que la dimension de son noyau est $n-1$, que 0 est valeur propre de f d'ordre $n-1$. Si f est diagonalisable, alors il existe une base de vecteurs propres pour f et donc il existe $x \in E$ vecteur propre associé à une valeur propre non nulle. Mais si $f(x) = \lambda x$, avec $\lambda \neq 0$, alors $f \circ f(x) = \lambda^2 x$ avec $\lambda^2 \neq 0$, et donc $f \circ f$ n'est pas l'endomorphisme nul.
2. (a) On a $f(u) \in \mathrm{Im}(f) = \mathrm{vect}(u)$, et donc il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $f(u) = \lambda u$. Si λ était égal à 0, alors, puisque pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $f(x) = \lambda_x u$ pour un certain $\lambda_x \in \mathbb{R}$, on aurait $f \circ f(x) = 0$, et donc $f \circ f = 0$, ce qui n'est pas le cas. Donc $\lambda \neq 0$.
   (b) Notons $\lambda \neq 0$ tel que $f(u) = \lambda u$. Alors λ est valeur propre de f, et son espace propre est de dimension au moins égale à 1. De plus, 0 est valeur propre de f, et son espace propre est de dimension égale à $n-1$. La somme des dimensions des espaces propres étant supérieure ou égale à n (et donc en réalité égale à n), f est diagonalisable.

2. Exercices d'entraînement

Exercice 9.

Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite stochastique si ses coefficients sont des réels positifs ou nuls et si la somme des coefficients de chacune de ses lignes est égale à 1.

1. Démontrer que si $\lambda \in \mathbb{C}$ est une valeur propre de A, alors $|\lambda| \leq 1$.
2. Démontrer que 1 est valeur propre et donner un vecteur propre associé.

Correction.

1. Supposons que $\lambda \in \mathbb{C}$ soit une valeur propre de A et soit Z un vecteur propre non-nul associé. Soit $i \in \{1, \dots, n\}$ tel que $|z_i| = \max_{j=1,\dots,n} |z_j|$. La i-ème coordonnée de AZ est $\sum_{j=1}^n a_{i,j} z_j$ et ceci doit être égal à λz_i. Prenant les valeurs absolues et utilisant l'inégalité triangulaire, on obtient
$$|\lambda||z_i| \leq \sum_{j=1}^n a_{i,j}|z_j| \leq \sum_{j=1}^n a_{i,j}|z_i| \leq |z_i|$$
où on a utilisé aussi que $a_{i,j} \geq 0$ et que $\sum_{j=1}^n a_{i,j} = 1$. On a donc obtenu $|\lambda||z_i| \leq |z_i|$. Comme $|z_i| \neq 0$ (sinon Z serait le vecteur nul), ceci entraîne encore que $|\lambda| \leq 1$.

2. Il suffit de choisir $Z = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ pour remarquer que $AZ = Z$. Ainsi, Z est un vecteur propre pour la valeur propre 1.

Exercice 10.

Soit m un nombre réel et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2-m & m-2 & m \end{pmatrix}.$$

1. Quelles sont les valeurs propres de f ?
2. Pour quelles valeurs de m l'endomorphisme est-il diagonalisable ?
3. On suppose $m = 2$. Calculer A^k pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Correction.

1. On calcule le polynôme caractéristique de A. On a

$$\begin{aligned} \chi_A(X) &= \begin{vmatrix} 1-X & 0 & 1 \\ -1 & 2-X & 1 \\ 2-m & m-2 & m-X \end{vmatrix} =_{C_1+C_2\to C_1} \begin{vmatrix} 1-X & 0 & 1 \\ 1-X & 2-X & 1 \\ 0 & m-2 & m-X \end{vmatrix} \\ &=_{L_2-L_1\to L_2} \begin{vmatrix} 1-X & 0 & 1 \\ 0 & 2-X & 0 \\ 0 & m-2 & m-X \end{vmatrix} = (1-X)\begin{vmatrix} 2-X & 0 \\ m-2 & m-X \end{vmatrix} \\ &= (1-X)(2-X)(m-X). \end{aligned}$$

Les valeurs propres de f sont donc 1,2 et m. En particulier, si $m = 1$ ou 2, f n'admet que deux valeurs propres.

2. Si $m \neq 1$ et $m \neq 2$, f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ qui admet trois valeurs propres distinctes : f est donc diagonalisable. Si $m = 1$, le polynôme caractéristique de f est $(1-X)^2(2-X)$. f est diagonalisable si et seulement si la dimension du sous-espace propre associé à la valeur propre 1 est égale à 2. Cherchons ce sous-espace (rappelons qu'on a $m = 1$). Pour $u = (x, y, z)$, on a

$$f(u) = u \iff \left\{ \begin{array}{rcl} z &=& 0 \\ -x+y+z &=& 0 \\ x-y &=& 0 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{rcl} x &=& x \\ y &=& x \\ z &=& 0 \end{array} \right.$$

Une base de $\ker(f - I)$ est donc donnée par le vecteur $(1, 1, 0)$. L'espace est de dimension $1 \neq 2$: la matrice n'est pas diagonalisable. Supposons maintenant $m = 2$. On doit chercher cette fois la dimension de $\ker(f - 2I)$. On a, pour $u = (x, y, z)$:

$$f(u) = 2u \iff \left\{ \begin{array}{rcl} -x+z &=& 0 \\ -x+z &=& 0 \\ 0 &=& 0 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{rcl} x &=& x \\ y &=& y \\ z &=& x \end{array} \right.$$

Une base de $\ker(f-2I)$ est donnée par la famille des deux vecteurs $(1,0,1)$ et $(0,1,0)$. En particulier, $\ker(f-2I)$ est de dimension 2 et f est diagonalisable.

3. On va commencer par diagonaliser f. On a déjà cherché une base du sous-espace propre correspondant à la valeur propre 2. Pour la valeur propre 1 (attention, on travaille cette fois avec $m=2$), on a, pour $u=(x,y,z)$:

$$f(u)=u \iff \left\{\begin{array}{rcl} z &=& 0\\ -x+y+z &=& 0\\ z &=& 0\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} x &=& x\\ y &=& x\\ z &=& 0\end{array}\right.$$

Une base de $\ker(f-I)$ est donc donnée par le vecteur $(1,1,0)$. Notons $u=(1,1,0)$, $v=(0,1,0)$ et $w=(1,0,1)$. Alors (u,v,w) est une base de vecteurs propres de f et dans cette base, la matrice de f est

$$D=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}.$$

Notons P la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^3$ dans la base (u,v,w). La matrice P est donnée par

$$P=\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

et on a $A=PDP^{-1}$. On doit calculer P^{-1}. On trouve

$$P^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&-1\\-1&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

De $A=PDP^{-1}$, on déduit facilement par récurrence $A^k=PD^kP^{-1}$. Mais puisque D est diagonale, on a

$$D^k=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2^k&0\\0&0&2^k\end{pmatrix}.$$

Le calcul précédent donne finalement

$$A^k=\begin{pmatrix}1&0&2^k-1\\1-2^k&2^k&2^k-1\\0&0&2^k\end{pmatrix}.$$

Exercice 11.

Soit U la matrice

$$U=\begin{pmatrix}0&1&1&1\\1&0&1&1\\1&1&0&1\\1&1&1&0\end{pmatrix}.$$

1. Calculer U^2 et en déduire une relation simple liant U^2, U et I_4.
2. En déduire que U est diagonalisable et donner ses valeurs propres.

3. Diagonaliser U.

Correction.

1. On vérifie facilement que
$$U^2 = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$
et donc que $U^2 = 2U + 3I_4$.
2. Le polynôme $X^2 - 2X - 3$ est un polynôme annulateur de U. Il est scindé, à racines simples (-1 et 3), et donc U est diagonalisable. On peut même aller un cran plus loin et affirmer que $X^2 - 2X - 3$ est le polynôme minimal de U, puisqu'aucun polynôme de degré un n'est polynôme annulateur de U qui n'est pas multiple de I_4. Ainsi, les valeurs propres de U sont -1 et 3.
3. Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$. On commence par résoudre $UX = -X$:
$$\begin{aligned} UX = -X & \iff \left\{ \begin{array}{rcl} y+z+t & = & -x \\ x+z+t & = & -y \\ x+y+t & = & -z \\ x+y+z & = & -t \end{array} \right. \\ & \iff x+y+z+t = 0 \\ & \iff \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & -y-z-t \\ y & = & y \\ z & = & z \\ t & = & t \end{array} \right. \end{aligned}$$
Ainsi, -1 est une valeur propre de multiplicité 3, et une base de l'espace propre associé est donnée par les vecteurs $(-1,1,0,0)$, $(-1,0,1,0)$ et $(-1,0,0,1)$. Pour déterminer l'espace propre associé à la valeur propre 3, dont on sait désormais qu'il est de dimension 1, on peut résoudre $UX = 3X$. On peut aussi remarquer que la somme de chaque ligne de la matrice fait 3. Ainsi, le vecteur $(1,1,1,1)$ est vecteur propre de U pour la valeur propre 3. Il constitue une base de l'espace propre associé à la valeur propre 3.

Exercice 12.

1. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{pmatrix}$ dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que A soit diagonalisable.
2. Soient $p \geq 1$ et $\alpha_1, \dots, \alpha_{2p}$ des réels. Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_{2p}(\mathbb{R})$ tel que $a_{i,2p+1-i} = \alpha_i$ si $1 \leq i \leq 2p$ et $a_{i,j} = 0$ sinon. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que A soit diagonalisable sur $\mathbb{R}$.

Correction.

1. Le polynôme caractéristique de A est $X^2 - ab$. Si $ab > 0$, alors il se factorise en $(X - \sqrt{ab})(X + \sqrt{ab})$. Autrement dit, A admet deux valeurs propres distinctes, et donc A est diagonalisable. Si $ab = 0$, alors si $a = b = 0$, A est déjà diagonale. Si $a = 0$ et $b \neq 0$ (ou symétriquement si $b = 0$ et $a \neq 0$), la seule valeur propre de A est 0, et donc si A était diagonalisable, elle serait égale à la matrice nulle, ce qui n'est pas le cas. Donc A n'est pas diagonalisable. Enfin, si $ab < 0$, A n'admet pas de valeurs propres, et donc A n'est pas diagonalisable. En résumé, on a prouvé que A est diagonalisable si et seulement si $a = b = 0$ ou $ab > 0$.
2. Soit $(e_1, \dots, e_{2p})$ la base canonique de $\mathbb{R}^{2p}$ et soit $E_i = \mathrm{Vect}(e_i, e_{2p+1-i})$, pour $1 \leq i \leq p$. On a $Ae_i = \alpha_{2p+1-i}e_{2p+1-i}$ et $Ae_{2p+1-i} = \alpha_i e_i$. Chaque sous-espace E_i est donc stable par A, et de plus $\mathbb{R}^{2p} = E_1 \oplus E_2 \oplus \dots \oplus E_p$. A est donc diagonalisable si et seulement $A_{|E_i}$ est diagonalisable pour chaque i. Mais la matrice de la restriction de A à E_i est exactement une matrice 2×2 comme celle de la question précédente, avec $b = \alpha_{2p+1-i}$ et $a = \alpha_i$. On conclut finalement que :

$$A \text{ est diagonalisable } \iff \forall i \in \{1, \dots, p\},\ \alpha_i = \alpha_{2p+1-i} = 0 \text{ ou } \alpha_i \alpha_{2p+1-i} > 0.$$

Exercice 13.

Les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & -8 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

sont-elles semblables ?

Correction.

On vérifie facilement que A et B ont le même polynôme caractéristique $(1-x)(2-x)^2$. Cherchons les sous-espaces propres associés à la valeur propre 2. Pour la matrice A, avec $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, on a

$$AX = 2X \iff \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & 2z \\ y & = & -3z \\ z & = & z \end{array} \right. .$$

Le sous-espace propre associé à la valeur propre 2 pour A est donc la droite vectorielle engendrée par $(2, -3, 1)$. En particulier, A n'est pas diagonalisable. Pour B maintenant, on a

$$BX = 2X \iff \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & x \\ y & = & y \\ z & = & -y \end{array} \right. .$$

Le sous-espace propre associé à la valeur propre 2 est donc le plan engendré par les deux vecteurs $(1, 0, 0)$ et $(0, 1, -1)$. En particulier, la dimension de ce sous-espace propre est égale à la multiplicité de 2 comme racine du polynôme caractéristique. Maintenant, ceci entraîne que A et B ne sont pas semblables. Si c'était le cas, alors la relation être semblable étant transitive, A serait semblable à une matrice diagonale, donc diagonalisable, ce qui n'est pas le cas.

Exercice 14.

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de E de dimension $n \geq 1$, et u un endomorphisme de E diagonalisable.

1. Soit F un sous-espace de E stable par u. Démontrer que $u_{|F}$ est diagonalisable.
2. On suppose que le spectre de u est constitué de n valeurs propres distinctes $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. On note $E_i = \ker(u - \lambda_i Id_E)$. Démontrer qu'un sous espace vectoriel F de E est stable par u si et seulement s'il existe $I \subset \{1, \dots, n\}$ tel que $F = \oplus_{i \in I} E_i$. Combien y-a-t-il de sous-espaces de E stables par u ?
3. On suppose que le spectre de u contient strictement moins de n valeurs propres. Démontrer qu'il y a une infinité de sous-espaces de E stables par u.

Correction.

1. Rappelons que u est diagonalisable si et seulement s'il admet un polynôme annulateur scindé à racines simples. Puisqu'un tel polynôme est nécessairement annulateur pour $u_{|F}$, ce dernier endomorphisme est lui aussi diagonalisable.
2. D'une part, il est clair qu'un tel sous-espace est stable par u. Réciproquement, soit F un sous-espace de E stable par u. Alors $u_{|F}$ est diagonalisable, et donc F est somme directe des sous-espaces propres de $u_{|F}$. Un sous-espace propre de $u_{|F}$ est nécessairement un sous-espace d'un espace propre de u. Les sous-espaces propres de u étant de dimension 1, un sous-espace propre de $u_{|F}$ est nécessaire un sous-espace propre de u. On en déduit qu'il existe une partie $I \subset \{1, \dots, n\}$ tel que $F = \oplus_{i \in I} E_i$. De plus, ces sous-espaces sont deux à deux distincts. Il y a donc autant de sous-espaces de E stables par u que de parties de $\{1, \dots, n\}$, c'est-à-dire exactement 2^n.
3. Puisque le nombre de valeurs propres est inférieur strict à la dimension de l'espace, et que u est diagonalisable, un sous-espace propre $E_\lambda = \ker(u - \lambda Id_E)$ est de dimension au moins égale à 2. Or, toute droite contenue dans E_λ est stable par u. Il y a une infinité de droites distinctes contenues dans E_λ (si x et y sont deux éléments de E_λ tels que (x, y) est libre, alors $\mathrm{vect}(x + \alpha y)$, avec $\alpha \in \mathbb{R}$, sont de telles droites).

Exercice 15.

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie.

1. Soient $u, v \in \mathcal{L}(E)$ diagonalisables tels que $u \circ v = v \circ u$. Démontrer qu'il existe une base de E dans laquelle les matrices de u et v sont simultanément diagonalisables.
2. Plus généralement, soit $u_1, \dots, u_m$ une famille d'endomorphismes diagonalisables de E commutant deux à deux, $m \geq 1$. Montrer qu'il existe une base de E diagonalisant tous les u_i.

Correction.

1. Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ les valeurs propres de u. Alors, pour tout $i = 1, \dots, p$, puisque u et v commutent, $E_{\lambda_i}(u)$ est stable par v. Notons v_i la restriction de v à ce sous-espace. v_i est encore diagonalisable. En particulier, il existe une base $\mathcal{B}_i$ de $E_{\lambda_i}(u)$ constituée de vecteurs propres de v_i, donc de v. Observons que ces vecteurs sont aussi vecteurs propres de u puisque éléments de $E_{\lambda_i}(u)$. Maintenant, puisque u est diagonalisable, $\mathcal{B}_1 \cup \dots \cup B_p$ est une

base de E constituée de vecteurs propres pour u et pour v, d'où le résultat.

2. On procède par récurrence sur m. Précisément, on prouve pour $m \geq 1$ la propriété suivante :

> $\mathcal{P}_m$: Pour tout $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie, pour toute famille de m endomorphismes de E, $u_1, \dots, u_m$, diagonalisables et commutant deux à deux, il existe une base diagonalisant tous les u_i.

Exercice 16.

Soit u un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie. On suppose que E et $\{0\}$ sont les seuls sous-espaces vectoriels de E stables par u.

1. u possède-t-il des valeurs propres ?
2. Démontrer que pour tout $x \in E \backslash \{0_E\}$, la famille $(x, u(x), \dots, u^{n-1}(x))$ est une base de E.
3. Montrer que la matrice de u dans la base $(x, u(x), \dots, u^{n-1}(x))$ est indépendante du choix de x.

Correction.

1. Si u admettait un vecteur propre x, alors $\mathrm{vect}(x)$ serait un sous-espace de E stable par u différent de $\{0\}$ et de E, ce qui est impossible.
2. Imaginons que la famille soit liée. Alors il existe $p \leq n-1$ et des scalaires $a_0, \dots, a_{p-1}$ tels que
$$u^p(x) = a_0 x + \cdots + a_{p-1} u^{p-1}(x).$$
On vérifie alors que l'espace vectoriel $\mathrm{vect}(x, u(x), \dots, u^{p-1}(x))$ est stable par u.
3. Soit $b_0, \dots, b_{n-1}$ des scalaires tels que
$$u^n(x) = b_0 x + \cdots + b_{n-1} u^{n-1}(x).$$
La matrice de u dans la base $(x, u(x), \dots, u^{n-1}(x))$ est alors
$$\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & b_0 \\ 1 & \ddots & 0 & b_1 \\ & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & b_{n-1}. \end{pmatrix}.$$
Remarquons aussi que, pour tout $i = 0, \dots, n-1$, on a
$$u^n(u^i(x)) = b_0 u^i(x) + b_1 u(u^i(x)) + \cdots + b_{n-1} u^{n-1}(u^i(x)).$$
Puisque $(x, u(x), \dots, u^{n-1}(x))$ est une base de E, on en déduit que pour tout $y \in E$, on a
$$u^n(y) = b_0 y + \cdots + b_{n-1} u^{n-1}(y)$$
et donc la matrice de u dans la base $(y, u(y), \dots, u^{n-1}(y))$ est identique à celle que l'on a écrite ci-dessus.

Exercice 17.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ non nulle tel que $A^2 = 0$ et soit r le rang de A. Démontrer que A est semblable à $\begin{pmatrix} 0 & I_r \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Correction.

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ canoniquement associé à A. Si on regarde bien la matrice à laquelle A doit être semblable, on remarque que les $n-r$ premiers vecteurs doivent être dans $\ker f$, que les r premiers doivent être dans $\mathrm{Im}(f)$, et les r derniers sont définis en fonction des r premiers. On n'a donc pas trop le choix ! La condition $A^2 = 0$ entraîne que $\mathrm{Im}(f) \subset \ker(f)$. Soit $(e_1, \dots, e_r)$ une base de $\mathrm{Im}(f)$ qu'on complète en une base $(e_1, \dots, e_{n-r})$ de $\ker(f)$. Soit enfin, pour $i = 1, \dots, r$, e_{n-r+i} un vecteur tel que $f(e_{n-r+i}) = e_i$ (un tel vecteur existe car e_i est dans $\mathrm{Im}(f)$). Montrons que la famille $(e_1, \dots, e_n)$ est libre, donc est une base de $\mathbb{K}^n$. En effet, si

$$\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n = 0,$$

on applique f et on trouve

$$\lambda_{n-r+1} e_1 + \cdots + \lambda_n e_r = 0.$$

La famille $(e_1, \dots, e_r)$ étant une base de $\mathrm{Im}(f)$, on en déduit que $\lambda_{n-r+1} = \cdots = \lambda_n = 0$. On obtient alors

$$\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_{n-r} e_{n-r} = 0$$

ce qui implique à son tour que $\lambda_1 = \cdots = \lambda_{n-r} = 0$ puisque la famille $(e_1, \dots, e_{n-r})$ est une base de $\ker(f)$. Maintenant, dans la base $(e_1, \dots, e_n)$, la matrice de f est $\begin{pmatrix} 0 & I_r \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ce qui prouve bien que A est semblable à cette dernière matrice.

3. Exercices d'approfondissement

Exercice 18.

Soit, pour $n \in \mathbb{N}$, la matrice M_n de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont les coefficients diagonaux sont égaux à $1, 2, \dots, n$ et les autres coefficients sont tous égaux à 1. Soit P_n le polynôme caractéristique de M_n.

1. Démontrer que $P_{n+1}(X) = (n - X)P_n(X) + (-1)^n X(X-1)\dots(X-(n-1))$.
2. Démontrer que, pour tout $n \geq 1$ et tout $k \in \{0, \dots, n-1\}$, $(-1)^k P_n(k) > 0$.
3. En déduire que M_n est diagonalisable et que chaque intervalle $]0,1[,]1,2[, \dots,]n-1, +\infty[$ contient exactement une valeur propre de M_n.

Correction.

1. On calcule le polynôme caractéristique de M_n en retirant la première colonne à la dernière,

puis en développant suivant la dernière colonne. On trouve :

$$\begin{aligned}
P_n(X) &= \begin{vmatrix} 1-X & 1 & \dots & \dots & X \\ 1 & 2-X & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \dots & \ddots & \dots & \vdots \\ \vdots & \dots & \dots & \ddots & 0 \\ 1 & 1 & \dots & \dots & (n-1)-X \end{vmatrix} \\
&= (-1)^{n-1}X \begin{vmatrix} 1 & 2-X & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 3-X & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \dots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 1 & n-1-X \\ 1 & 1 & \dots & \dots & 1 \end{vmatrix} + \big((n-1)-X\big)P_{n-1}(X).
\end{aligned}$$

Pour calculer l'avant-dernier déterminant qui apparait, on retranche l'avant-dernière ligne à la dernière, puis la ligne $n-2$ à la ligne $n-1$, etc. jusqu'à retirer la ligne 1 à la ligne 2. On trouve :

$$\begin{vmatrix} 1 & 2-X & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 3-X & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \dots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 1 & n-1-X \\ 1 & 1 & \dots & \dots & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & * & \dots & * \\ 0 & X-1 & * & \dots \\ \dots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \dots & 0 & X-(n-2) \end{vmatrix}.$$

La matrice que l'on obtient est diagonale, son déterminant est le produit des termes diagonaux, et on obtient bien le résultat voulu.

2. On procède par récurrence sur n. Le résultat est vrai pour $n=1$, puisque $P_1(X)=1-X$ et $P_n(0)>0$. Supposons la propriété vraie au rang n et démontrons-la au rang $n+1$. Alors, pour $k\leq n-1$, d'après la formule précédente, on a
$$(-1)^k P_{n+1}(k) = (-1)^k P_n(k)\times(n-k)+0>0.$$
Pour $k=n$, alors
$$(-1)^n P_{n+1}(n) = 0+n!>0.$$
3. Pour $k\in\{0,\dots,n-2\}$, le résultat de la question précédente nous dit que $P_n(k)$ et $P_n(k+1)$ sont de signe contraire. Ainsi, par le théorème des valeurs intermédiaires, P_n possède au moins une racine dans l'intervalle $]k,k+1[$, ce qui nous donne $n-1$ racines distinctes. De plus, la limite de P_n en $+\infty$ est $+\infty$ si n est pair, et $-\infty$ si n est impair. Comme $P_n(n-1)$ est positif si n est impair et $P_n(n-1)$ est négatif si n est pair, on trouve encore, par le même théorème, une racine dans l'intervalle $[n,+\infty[$. On a trouvé n racines distinctes pour le polynôme caractéristique de M_n, qui est une matrice d'ordre n. Ainsi, M_n est diagonalisable, et on a trouvé toutes les valeurs propres de M_n. Il y en a bien exactement une dans chaque intervalle proposé.

Exercice 19.

Pour $n \geq 1$, soit
$$A_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$
et $P_n(x) = \det(xI_n - A_n)$ son polynôme caractéristique.

1. Démontrer que pour tout $n \geq 2$, on a
$$P_n(x) = xP_{n-1}(x) - P_{n-2}(x).$$
Calculer P_1 et P_2.
2. Pour tout $x \in]-2,2[$, on pose $x = 2\cos\alpha$ avec $\alpha \in]0,\pi[$. Démontrer que
$$P_n(x) = \frac{\sin((n+1)\alpha)}{\sin\alpha}.$$
3. En déduire que A_n est diagonalisable.

Correction.

1. On développe le déterminant suivant la première colonne. On trouve
$$P_n(x) = xP_{n-1}(x) - \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 1 & x & 1 & 0 & \dots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 1 & x \end{vmatrix}.$$
On développe ensuite suivant la première ligne et on trouve le résultat demandé. On a par ailleurs $P_1(x) = x$ et $P_2(x) = x^2 - 1$.
2. On va procéder par récurrence double. Le résultat est vrai pour $n = 1$ car $\sin(2\alpha) = 2\sin(\alpha)\cos(\alpha)$ et pour $n = 2$ car
$$\begin{aligned} \sin(3\alpha) &= \sin(2\alpha)\cos(\alpha) + \sin(\alpha)\cos(2\alpha) \\ &= 2\sin(\alpha)\cos^2(\alpha) + 2\sin(\alpha)\cos^2(\alpha) - \sin(\alpha) \\ &= \sin(\alpha)\left((2\cos\alpha)^2 - 1\right). \end{aligned}$$
Si le résultat est vrai aux rang $n-2$ et $n-1$, alors en utilisant le résultat de la première question, on a
$$\begin{aligned} \sin(\alpha)P_n(x) &= (2\cos\alpha)\sin(\alpha)P_{n-1}(x) - \sin(\alpha)P_{n-2}(x) \\ &= 2\cos\alpha\sin(n\alpha) - \sin((n-1)\alpha)) \\ &= \sin((n+1)\alpha) + \sin((n-1)\alpha) - \sin((n-1)\alpha) \\ &= \sin((n+1)\alpha) \end{aligned}$$
ce qui prouve que le résultat est encore vrai au rang n.

3. L'équation $\sin((n+1)\alpha) = 0$ admet n racines dans l'intervalle $]0,\pi[$ qui sont les réels $\alpha_k = \frac{k\pi}{n+1}$, $k = 1,\dots,n$. Par bijectivité de la fonction cos sur l'intervalle $]0,\pi[$, les n réels $x_k = 2\cos(\alpha_k)$, $k = 1,\dots,n$ sont distincts et ce sont des racines de P_n. P_n, qui est de degré n, et donc scindé à racines simples. Puisqu'il s'agit du polynôme caractéristique de A_n, on en déduit que A_n est diagonalisable.

Exercice 20.

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et U une partie irréductible de $\mathcal{L}(E)$, c'est-à-dire que les seuls sous-espaces stables communs à tous les éléments de U sont $\{0\}$ et E. Soit $\phi \in \mathcal{L}(E)$ qui commute avec tous les éléments de U.

1. Démontrer que ou bien ϕ est nulle ou bien ϕ est un automorphisme.
2. On suppose que $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. En déduire qu'il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $\phi = \lambda Id_E$.

Correction.

1. Puisque, pour tout $u \in U$, $u \circ \phi = \phi \circ u$, on en déduit que $\ker\phi$ est stable par tous les éléments de U. En particulier, $\ker\phi = \{0\}$ ou $\ker\phi = E$. Le premier cas nous dit que ϕ est injective, donc est un automorphisme de E (qui est de dimension finie). Le deuxième cas nous dit que ϕ est l'application nulle.
2. Soit λ une valeur propre de ϕ. Alors $\phi - \lambda Id_E$ n'est pas un automorphisme de E, mais $\phi - \lambda Id_E$ commute avec tous les éléments de U. D'après la question précédente, $\phi - \lambda Id_E = 0$.

Exercice 21.

Soit E un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Démontrer que u est diagonalisable si et seulement si tout sous-espace de E possède un supplémentaire stable par u.

Correction.

Commençons par prouver le sens direct. Soit $n = \dim E$ et soit $\mathcal{B}$ une base de E constituée de vecteurs propres pour u. Soit F un sous-espace vectoriel de E de dimension $p < n$ et soit $(u_1,\dots,u_p)$ une base de F. Alors, par le théorème de la base incomplète, il existe des vecteurs $(e_{p+1},\dots,e_n)$ de $\mathcal{B}$ tels que $(u_1,\dots,u_p,e_{p+1},\dots,e_n)$ soit une base de E. Soit $G = \mathrm{Vect}(e_{p+1},\dots,e_n)$. Alors G est stable par u et c'est un supplémentaire de F. Réciproquement, on construit par récurrence sur $p \leq n$ une famille libre $(e_1,\dots,e_p)$ de vecteurs propres de u. Le cas $p = n$ donnera la base voulue. Construisons d'abord e_1. Soit H n'importe quel hyperplan de E. Il possède un supplémentaire stable, autrement dit il existe $e_1 \in E$ tel que $\mathrm{Vect}(e_1)$ est stable par u. Ainsi, e_1 est un vecteur propre de u. Supposons $(e_1,\dots,e_p)$ construits, avec $p < n$, et construisons e_{p+1}. Soit H un hyperplan de E contenant $(e_1,\dots,e_p)$. Il possède un supplémentaire stable par u. Autrement dit, il existe $e_{p+1} \notin H$ qui est un vecteur propre de u. La famille $(e_1,\dots,e_p)$ étant libre par hypothèse de récurrence, et le vecteur e_{p+1} n'étant pas dans H, la famille $(e_1,\dots,e_{p+1})$ est bien une famille libre de vecteurs propres de u.

Exercice 22.

Soit f un endomorphisme diagonalisable d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie. On note $\mathcal{C}_f$ le sous-espace vectoriel des endomorphismes de E commutant avec f.

1. Démontrer que $g \in \mathcal{C}_f$ si et seulement si les sous-espaces propres de f sont stables par g.
2. En déduire que $\dim(\mathcal{C}_f) = \sum_{\lambda \in \mathrm{sp}(f)} \mathrm{mult}(\lambda)^2$, où $\mathrm{mult}(\lambda)$ désigne la multiplicité de la valeur propre λ.
3. On suppose en outre que les valeurs propres de f sont simples. Démontrer que $(Id, f, \dots, f^{n-1})$ est une base de $\mathcal{C}_f$.

Correction.

1. D'abord si f et g commutent, on sait que $\ker(P(f))$ est stable par g pour tout polynôme P, en particulier pour les polynômes $P(X) = X - \lambda$. Ainsi, chaque sous-espace propre de f est stable par g. Réciproquement, on suppose que g laisse stable tous les sous-espaces propres de f. Soit E_λ un tel sous-espace propre et soit $x \in E_\lambda$. Alors d'une part
$$g(f(x)) = g(\lambda x) = \lambda g(x)$$
et d'autre part, puisque $g(x) \in E_\lambda$ on a aussi
$$f(g(x)) = \lambda g(x).$$
Autrement dit, si $x \in E_\lambda$, on a $f(g(x)) = g(f(x))$. Maintenant, comme f est diagonalisable, E est somme directe des sous-espaces propres de f. Écrivant tout $x \in E$ comme somme de x_i, où $x_i \in E_{\lambda_i}$, on prouve que $f(g(x)) = g(f(x))$ et donc que g et f commutent.
2. Notons $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ les valeurs propres de f et g_i la restriction de g à $E_{\lambda_i}(f)$. Alors g est uniquement déterminé par les g_i. De plus, g_i peut être n'importe quel endomorphisme de $E_{\lambda_i}(f)$. Autrement dit, l'application
$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}_f & \to & \prod_{i=1}^p \mathcal{L}\big(E_{\lambda_i}(f)\big) \\ g & \mapsto & (g_1, \dots, g_p) \end{array}$$
est un isomorphisme d'espace vectoriel. L'espace $\mathcal{L}\big(E_{\lambda_i}(f)\big)$ ayant pour dimension $\sum_{i=1}^p \mathrm{mult}(\lambda_i)^2$, il en est de même de $\mathcal{C}_f$.
3. D'après la question précédente, $\mathcal{C}_f$ est de dimension n. La famille $(Id, f, \dots, f^{n-1})$ étant clairement une famille d'éléments de $\mathcal{C}_f$, il suffit de prouver que c'est une famille libre. Ceci peut se démontrer avec un argument de polynôme minimal. En effet, si $\lambda_0 Id + \lambda_1 f + \dots + \lambda_{n-1} f^{n-1} = 0$, alors le polynôme $P(X) = \lambda_0 + \lambda_1 X + \dots + \lambda_{n-1} X^{n-1}$ annule f. Il est divisé par le polynôme minimal de f. Ce polynôme minimal est de degré n, car les valeurs propres de f sont toutes distinctes. Donc $P = 0$ et la famille est bien libre.