Corrigé de la feuille d'exercices en groupes n°3

a. Groupe : Charles, Lina, Mathis

Exercice 1.

La matrice suivante est-elle diagonalisable dans $\mathbb{R}$? dans $\mathbb{C}$? Le cas échéant, la diagonaliser.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & -1/2 \\ 2 & 0 & -2 \\ 4 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Correction.

On a $\kappa_A = (X+2)(X^2-2X+2)$ donc κ_A n'est pas scindé dans $\mathbb{R}$ donc A n'est pas diagonalisable dans $\mathbb{R}$. Dans $\mathbb{C}$, $\kappa_A = (X+2)(X-(1+i))(X-(1-i))$ qui est scindé à racines simples, donc A est diagonalisable dans $\mathbb{C}$ et on a :

$$E_{-2}(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right), \qquad E_{1+i}(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1+i \\ 1-i \end{pmatrix}\right) \text{ et}$$

$$E_{1-i}(A) = \overline{E_{1+i}(A)} = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1-i \\ 1+i \end{pmatrix}\right)$$

d'où

$$A = P \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1+i & 0 \\ 0 & 0 & 1-i \end{pmatrix} P^{-1} \text{ où } P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1+i & 1-i \\ 1 & 1-i & 1+i \end{pmatrix}.$$

Exercice 2.

1. Soient $M, N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Démontrer que MN est inversible si et seulement si M et N sont inversibles.
2. Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Démontrer que

$$\chi_A(B) \in GL_n(\mathbb{C}) \iff \mathrm{Sp}(A) \cap \mathrm{Sp}(B) = \varnothing.$$

Correction.

1. On a

$$\begin{aligned} MN \in GL_n(\mathbb{C}) &\iff \det(MN) \neq 0 \\ &\iff \det(M) \times \det(N) \neq 0 \\ &\iff \det(M) \neq 0 \text{ et } \det(N) \neq 0 \\ &\iff M \in GL_n(\mathbb{C}) \text{ et } N \in GL_n(\mathbb{C}). \end{aligned}$$

2. Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les valeurs propres de A, répétées autant de fois que leur multiplicité, de sorte que $\chi_A(X) = \prod_{i=1}^n (X - \lambda_i)$. On a donc

$$\chi_A(B) = \prod_{i=1}^n (B - \lambda_i I_n).$$

D'après la première question (et une récurrence immédiate), $\chi_A(B)$ est inversible si et seulement, pour tout $i = 1, \dots, n$, $B - \lambda_i I_n$ est inversible, c'est-à-dire si et seulement si, pour tout $i = 1, \dots, n$, $\lambda_i \notin \mathrm{Sp}(B)$. Ceci revient à dire que $\mathrm{Sp}(A) \cap \mathrm{Sp}(B) = \varnothing$.

b. Groupe : Théo, Hugo, Benjamin

Exercice 3.

La matrice suivante est-elle diagonalisable dans $\mathbb{R}$? dans $\mathbb{C}$? Le cas échéant, la diagonaliser.

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

Correction.

On a $\kappa_B = (X+3)(X-3)^2$, et

$$E_{-3}(B) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right), \qquad E_3(B) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$$

On a alors $\dim(E_{-3}(B)) = 1 = m(-3)$ et $\dim(E_3(B)) = 2 = m(3)$ donc B est diagonalisable dans $\mathbb{R}$ et

$$B = P \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} P^{-1} \text{ où } P = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Comme B est diagonalisable dans $\mathbb{R}$, elle l'est aussi dans $\mathbb{C}$ et la diagonalisation est identique.

Exercice 4.

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $|a| \neq |b|$. On considère la matrice carrée de taille $2n$

$$A = \begin{pmatrix} a & b & a & b & \dots \\ b & a & b & a & \dots \\ a & b & a & b & \dots \\ b & a & b & a & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

1. Calculer le rang de A. En déduire que si $n > 1$, alors 0 est valeur propre de A et déterminer la dimension du sous-espace propre associé.
2. Déterminer deux vecteurs propres associées à deux autres valeurs propres, et en déduire que A est diagonalisable.

Correction.

1. Puisque la matrice n'admet que deux colonnes distinctes, elle est de rang au plus 2. De plus, la matrice extraite $\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$ est inversible puisque son déterminant est $a^2 - b^2 \neq 0$. Le rang de la matrice est 2 ce qui fait, d'après le théorème du rang, que 0 est valeur propre de A de multiplicité $2n - 2$.
2. Utilisons la structure de la matrice. On remarque que les sommes des coefficients sur chaque ligne sont égales, et égales à $n(a + b)$. Ceci signifie que le vecteur

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \end{pmatrix}$$

est vecteur propre associé à la valeur propre $n(a + b)$. De même, en faisant cette fois des sommes "alternées", on remarque que le vecteur

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \\ \vdots \end{pmatrix}$$

est vecteur propre associé à la valeur propre $n(a-b)$. Ces deux vecteurs sont non colinéaires, et $a + b$ comme $a - b$ sont non nuls. On a donc bien trouvé notre base de vecteurs propres, et A est diagonalisable.

c. Groupe : William, Paul, Victor

Exercice 5.

La matrice suivante est-elle diagonalisable dans $\mathbb{R}$? dans $\mathbb{C}$? Le cas échéant, la diagonaliser.

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & -3 \\ 3 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

Correction.

On a $\kappa_C = (X+2)(X^2+4)$ donc κ_C n'est pas scindé dans $\mathbb{R}$ donc C n'est pas diagonalisable dans $\mathbb{R}$. Dans $\mathbb{C}$, $\kappa_C = (X+2)(X-2i)(X+2i)$ qui est scindé à racines simples, donc C est diagonalisable dans $\mathbb{C}$ et on a :

$$E_{-2}(C) = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right), \qquad E_{2i}(C) = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 2+i \\ 2-i \end{pmatrix}\right) \text{ et}$$

$$E_{-2i}(C) = \overline{E_{2i}(C)} = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 2-i \\ 2+i \end{pmatrix}\right)$$

d'où

$$C = P\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2i & 0 \\ 0 & 0 & -2i \end{pmatrix}P^{-1} \text{ où } P = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & 2+i & 2-i \\ 1 & 2-i & 2+i \end{pmatrix}.$$

Exercice 6.

Soit A la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

1. Diagonaliser A.
2. En déduire toutes les matrices M qui commutent avec A.

Correction.

1. La diagonalisation de A ne pose pas de problèmes. Son polynôme caractéristique est $\chi_A(x) = -(x-1)(x-2)(x-3)$. Il est scindé à racines simples, et donc A est diagonalisable. En particulier, il existe P inversible telle que $A = PDP^{-1}$ avec

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

2. On va commencer par déterminer les matrices $N = (n_{i,j})$ qui commutent avec D. On

remarque que

$$ND = \begin{pmatrix} 1n_{1,1} & 2n_{1,2} & 3n_{1,3} \\ 1n_{2,1} & 2n_{2,2} & 3n_{2,3} \\ 1n_{3,1} & 2n_{3,2} & 3n_{3,3} \end{pmatrix} \text{ et } DN = \begin{pmatrix} 1n_{1,1} & 1n_{1,2} & 1n_{1,3} \\ 2n_{2,1} & 2n_{2,2} & 3n_{2,3} \\ 3n_{3,1} & 3n_{3,2} & 3n_{3,3} \end{pmatrix}.$$

Pour que $ND = DN$, il est donc nécessaire et suffisant que N soit une matrice diagonale,

$$N = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}.$$

Ensuite, on remarque que si M commute avec A, alors

$$PDP^{-1}M = MPDP^{-1} \implies (P^{-1}MP)D = D(P^{-1}MP)$$

et donc M commute avec A si et seulement si $P^{-1}MP$ commute avec D, donc si et seulement si cette matrice est diagonale. Après calcul de P et de P^{-1}, on trouve que M est de la forme

$$M = \begin{pmatrix} 2b-c & -a+2b-c & \frac{a-c}{2} \\ -b+c & a-b+c & \frac{-a+c}{2} \\ 2c-2b & -2b+c & c \end{pmatrix}.$$

d. Groupe : Raphaël, Julien, Omar

Exercice 7.

La matrice suivante est-elle diagonalisable dans $\mathbb{R}$? dans $\mathbb{C}$? Le cas échéant, la diagonaliser.

$$D = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ -4 & 1 & 4 \\ -2 & -2 & 7 \end{pmatrix}$$

Correction.

On a $\kappa_D = (X-1)(X-5)^2$, et

$$E_1(D) = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right), \qquad E_5(D) = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

On a alors $\dim(E_1(D)) = 1 = m(1)$ et $\dim(E_5(D)) = 2 = m(5)$ donc D est diagonalisable dans $\mathbb{R}$ et

$$D = P\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}P^{-1} \text{ où } P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Comme D est diagonalisable dans $\mathbb{R}$, elle l'est aussi dans $\mathbb{C}$ et la diagonalisation est identique.

Exercice 8.

Existe-t-il une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ constituée de matrices diagonalisables dans $\mathbb{R}$?

Correction.

Contrairement à ce que la formulation de la question suggère, c'est effectivement possible. En effet, considérons, pour tout couple (i,j) avec $i \neq j$, la matrice

$$M_{i,j} = D + E_{i,j},$$

où D est la matrice diagonale ayant sur la diagonale les nombres $1,\dots,n$. Pour $i=j$, posons $M_{i,i} = E_{i,i}$. Alors chaque matrice $M_{i,j}$ est diagonalisable. C'est évident si $i=j$ (la matrice est déjà diagonale), et si $i \neq j$, alors $M_{i,j}$ est une matrice triangulaire dont tous les coefficients sur la diagonale sont différents. Ainsi, son polynôme caractéristique est scindé à racines simples et $M_{i,j}$ est diagonalisable. De plus, $(M_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ est une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Il suffit de montrer que c'est une famille génératrice, puisqu'on a une famille de n^2 éléments dans un espace de dimension n^2. Prenons $A = (a_{i,j})$ une matrice. Alors, $B = A - \sum_{i\neq j} a_{i,j} M_{i,j}$ est une matrice diagonale (si vous n'êtes pas convaincu, faites un calcul explicite pour $n=2$). Mais il est clair que chaque matrice diagonale se décompose comme somme des $E_{i,i}$, ie $B = \sum_{i=1}^n \lambda_i M_{i,i}$. Ainsi, toute matrice A est bien combinaison linéaire des $M_{i,j}$.