Feuille d'exercices n°11

1. Exercices basiques

Exercice 1.

Déterminer le polynôme minimal des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix} \text{ et } D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 8 \\ 3 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & -5 \end{pmatrix}.$$

Exercice 2.

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est donnée par

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que f est trigonalisable.
2. Montrer que l'espace propre associé à la valeur propre 1 est de dimension 1. Montrer que $u = (1, 1, 0)$ est un vecteur non-nul de cet espace propre.
3. Montrer que $v = (0, 0, 1)$ est tel que $(f - \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3})(v) = u$.
4. Chercher un vecteur propre w associé à la valeur propre 2. Montrer que (u, v, w) est une base de $\mathbb{R}^3$. Calculer la matrice T de f dans la base (u, v, w).
5. Calculer $f^k(v)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. En déduire T^k.
6. Calculer A^k pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Exercice 3.

On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

A est-elle diagonalisable ? Montrer que A est semblable à la matrice

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 4.

Trigonaliser les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 0 & 6 & -3 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 5.

Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$ et soit ϕ l'endomorphisme de E défini par $\phi(P) = P - (X+1)P'$. Justifier que ϕ est diagonalisable et donner les valeurs propres de ϕ.

2. Exercices d'entraînement

Exercice 6.

Soit $\phi : M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ M \mapsto {}^tM$. Déterminer les valeurs propres de ϕ. ϕ est-elle diagonalisable ?

Exercice 7.

Soit $n \geq 1$ et $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tels que $AB - BA = A$. Le but de l'exercice est de démontrer que A est nilpotente, c'est-à-dire qu'il existe $k \geq 1$ tel que $A^k = 0$.

1. Montrer que, pour tout $k \geq 0$, on a $A^kB - BA^k = kA^k$.
2. On considère

$$\begin{array}{rcl} \phi_B : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \to & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ M & \mapsto & MB - BM. \end{array}$$

   Vérifier que ϕ_B est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
3. Justifier que si $A^k \neq 0$, alors k est une valeur propre de ϕ_B.
4. En déduire l'existence d'un entier $k > 0$ tel que $A^k = 0$.

Exercice 8.

Soit u un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie, et soit π_u son polynôme minimal. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. Démontrer que $P(u)$ est inversible si et seulement si P et π_u sont premiers entre eux.

Exercice 9.

Existe-t-il dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice dont le polynôme minimal est $X^2 + 1$?

Exercice 10.

Soit $n \geq 1$, $\mathcal{N}$ l'ensemble des matrices nilpotentes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, V le sous-espace vectoriel engendré par $\mathcal{N}$, et T_0 le sous-espace de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ des matrices de trace nulle.

1. Quelle est la dimension de T_0 ?
2. Démontrer que $V \subset T_0$.
3. Pour $j \in \{2, \ldots, n\}$, on note $F_j = E_{1,1} + E_{1,j} - E_{j,1} - E_{j,j}$ et $G_j = F_j - E_{1,j} + E_{j,1}$. Calculer F_j^2. En déduire que $G_j \in V$.
4. Soit $\mathcal{F}$ la famille d'éléments de V constituée par les matrices $E_{i,j}$, $1 \leq i, j \leq n$ avec $i \neq j$ et par les matrices G_k, $k = 2, \ldots, n$. Démontrer que $\mathcal{F}$ est une famille libre.
5. En déduire que $V = T_0$.

3. Exercices d'approfondissement

Exercice 11.

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et soit $f \in \mathcal{L}(E)$. On considère l'endomorphisme ϕ de $\mathcal{L}(E)$ défini par $\phi(g) = f \circ g$.

1. Démontrer que toute valeur propre de f est une valeur propre de ϕ puis, si λ est une valeur propre de f, déterminer $E_\lambda(\phi)$.
2. En déduire que si f est diagonalisable, alors ϕ est diagonalisable.

Exercice 12.

Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$ et soient A, B deux éléments de E premiers entre eux tels qu'en outre B est scindé à racines simples. On notera $x_1, \ldots, x_p$ ses racines. On note ϕ l'application de E dans lui-même qui à un polynôme P associe le reste de AP dans la division euclidienne par B.

1. Démontrer que ϕ est un endomorphisme de E. Est-ce un isomorphisme ?
2. Démontrer que 0 est une valeur propre de ϕ et déterminer le sous-espace propre associé.
3. Démontrer que, pour chaque $k = 1, \ldots, p$, $P_k(X) = \prod_{j \neq k}(X - x_j)$ est un vecteur propre de ϕ.
4. En déduire que ϕ est diagonalisable.

Exercice 13.

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et soit $f \in \mathcal{L}(E)$ diagonalisable. Démontrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

1. Les valeurs propres de f sont simples.
2. Il existe $x \in E$ tel que $\{x, f(x), \ldots, f^{n-1}(x)\}$ soit une base de E.
3. La famille $\{Id, f, \ldots, f^{n-1}\}$ est libre.

Exercice 14.

Soit H un hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $n \geq 2$. Le but de l'exercice est de démontrer que H contient une matrice inversible. On raisonne par l'absurde et on suppose que H ne contient pas de matrices inversibles.

1. Démontrer que H contient toutes les matrices nilpotentes.
2. Conclure.

Exercice 15.

1. Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $AB = BA$ et B est nilpotente. Prouver que si $A \neq 0$, alors $\mathrm{rg}(BA) < \mathrm{rg}(A)$.
2. Soient $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ des matrices nilpotentes qui commutent. Prouver que $A_1 \cdots A_n = 0$. Le résultat subsiste-t-il si on ne suppose plus que les matrices commutent ?