Feuille d'exercices en groupes n°4

a. Groupe : Charles, Théo, Hugo

Exercice 1.

Réduire la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 1 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

Exercice 2.

Déterminer les matrices $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que la matrice $B = \left(\begin{array}{c|c} A & A \\ \hline 0 & A \end{array}\right)$ soit diagonalisable.

b. Groupe : Julien, William, Victor

Exercice 3.

Réduire la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2/3 \\ -1 & 0 & -1/3 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Exercice 4.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice inversible. Démontrer que A est triangulaire supérieure si et seulement si, pour tout $k \geq 2$, A^k est triangulaire supérieure. Le résultat subsiste-t-il si on ne suppose plus que A est inversible ?

c. Groupe : Mathis, Benjamin, Omar

Exercice 5.

Réduire la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -3 & 5 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

Exercice 6.

Soit $n \geq 0$. Démontrer qu'il existe $(a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$ tels que, pour tout $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$,

$$P(X+n) + \sum_{k=0}^{n-1} a_k P(X+k) = 0.$$

d. Groupe : Raphaël, Lina, Paul

Exercice 7.

Réduire la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 2 \\ -1 & 3 & 3 \\ 1 & -8 & -7 \end{pmatrix}$$

Exercice 8.

Soit $A \in GL_n(\mathbb{C})$ et $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ nilpotente. On suppose que $AN = NA$. Démontrer que $\det(A+N) = \det(A)$.