Mathématiques spéciales

Corrigé de la feuille d'exercices n°11

1. Exercices basiques

Exercice 1.

Déterminer le polynôme minimal des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix} \text{ et } D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 8 \\ 3 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & -5 \end{pmatrix}.$$

Correction.

On va utiliser plusieurs méthodes. Pour A, on remarque que son polynôme caractéristique est $(X-1)^2$. Son polynôme minimal ne peut être que $(X-1)$ ou $(X-1)^2$. Ce ne peut pas être $X-1$ car si A serait égale à I_2 donc son polynôme minimal est $(X-1)^2$. Pour B, on remarque que $B^2 = 3B$ et donc $B^2 - 3B = 0$. Comme B n'est pas un multiple de l'identité, on en déduit que son polynôme minimal est $X^2 - 3X$. Pour C, nous allons utiliser le fait qu'elle est diagonalisable. On commence par calculer le polynôme caractéristique de C. Après calculs, on trouve qu'il est égal à

$$\chi_C(X) = (X-1)(X+1)^2.$$

C admet donc deux valeurs propres, 1 et -1. On recherche les espaces propres associés. Pour la valeur propre 1, on trouve que $E_1 = \mathbb{R}f_1$ avec $f_1 = (1,1,1)$. Pour la valeur propre -1, on trouve que $E_{-1} = \mathbb{R}f_2 \oplus \mathbb{R}f_3$ avec $f_2 = (-1,1,0)$ et $f_3 = (1,0,1)$. La matrice C est donc diagonalisable, de spectre 1 et -1. Son polynôme minimal est donc $(X-1)(X+1)$. On aurait pu aussi dire que son polynôme minimal divise le polynôme caractéristique $(X-1)(X+1)^2$ tout en ayant les mêmes racines. Cela ne peut être que $(X-1)(X+1)$ ou $(X-1)(X+1)^2$. Il était alors facile de vérifier que $(X-1)(X+1)$ est un polynôme annulateur pour C. Pour D, le polynôme caractéristique de D est

$$\chi_D(X) = (X+1)^3.$$

La seule valeur propre de D est donc -1. Comme D n'est pas égale à $-I_3$, D n'est pas diagonalisable et son polynôme minimal ne peut être que $(X+1)^3$ ou $(X+1)^2$. Un calcul rapide montre que $(D+I_3)^2 = 0$, et donc le polynôme minimal de D est $(X+1)^2$.

Exercice 2.

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est donnée par

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Montrer que f est trigonalisable.
2. Montrer que l'espace propre associé à la valeur propre 1 est de dimension 1. Montrer que

$u=(1,1,0)$ est un vecteur non-nul de cet espace propre.

3. Montrer que $v=(0,0,1)$ est tel que $(f-\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3})(v)=u$.
4. Chercher un vecteur propre w associé à la valeur propre 2. Montrer que (u,v,w) est une base de $\mathbb{R}^3$. Calculer la matrice T de f dans la base (u,v,w).
5. Calculer $f^k(v)$ pour tout $k\in\mathbb{N}$. En déduire T^k.
6. Calculer A^k pour tout $k\in\mathbb{N}$.

Correction.

1. On calcule le polynôme caractéristique de f. On trouve $P_f(X)=(1-X)^2(2-X)$. Puisqu'il a toutes ses racines dans $\mathbb{R}$, l'endomorphisme f est trigonalisable.
2. Pour $u=(x,y,z)$, on a
$$f(u)=u\iff\left\{\begin{array}{rcl} z&=&0\\ -x+y+z&=&0\\ x-y&=&0\end{array}\right.\iff\left\{\begin{array}{rcl} x&=&x\\ y&=&x\\ z&=&0\end{array}\right.$$
Une base de $\ker(f-I)$ est donc donnée par le vecteur $(1,1,0)$.
3. On a $f(v)=(1,1,1)$ d'où $f(v)-v=u$.
4. On cherche l'espace propre associé à la valeur propre 2. On a, pour $w=(x,y,z)$,
$$f(w)=2w\iff\left\{\begin{array}{rcl} -x+z&=&0\\ -x+z&=&0\\ x-y-z&=&0\end{array}\right.\iff\left\{\begin{array}{rcl} x&=&x\\ y&=&0\\ z&=&x\end{array}\right.$$
Le vecteur $w=(1,0,1)$ est donc un vecteur propre de f associé à la valeur propre 2. On vérifie facilement que la famille (u,v,w) est une famille libre de $\mathbb{R}^3$, donc une base. La matrice de f dans cette base est donnée par
$$T=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}.$$
5. On montre par récurrence sur k que $f^k(v)=v+ku$. En effet, c'est vrai pour $k=1$ et si c'est vrai au rang k, alors
$$f^{k+1}(v)=f(v+ku)=f(v)+kf(u)=v+u+ku=v+(k+1)u.$$
Puisque $f^k(u)=u$ et $f^k(w)=2^kw$, on en déduit
$$T^k=\begin{pmatrix}1&k&0\\0&1&0\\0&0&2^k\end{pmatrix}.$$
6. Soit Q la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}^3$ à la base (u,v,w). Q est donnée par
$$Q=\begin{pmatrix}1&0&1\\1&0&0\\0&1&1\end{pmatrix}$$

et on a la relation $A = QTQ^{-1}$. Par récurrence, on montre que $A^k = QT^kQ^{-1}$. Il reste à calculer Q^{-1} et à utiliser le résultat de la question précédente. On trouve

$$Q^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

et

$$A^k = \begin{pmatrix} 2^k - k & k+1-2^k & k \\ -k & k+1 & k \\ 2^k - 1 & 1-2^k & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 3.

On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

A est-elle diagonalisable ? Montrer que A est semblable à la matrice

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Correction.

Le polynôme caractéristique de A est $\chi_A(X) = -(1-X)^3$. 1 est la seule racine de ce polynôme, et comme $A \neq I_3$, A n'est pas diagonalisable. Cherchons l'espace propre associé à la valeur propre 1. Notons f l'endomorphisme canoniquement associé à A. On a $(x,y,z) \in \ker(f-I) \iff y+z=0$. L'espace propre associé est donc de dimension 2, de base (u_1,u_2) avec $u_1 = (1,0,0)$ et $u_2 = (0,1,-1)$. On cherche ensuite un troisième vecteur u_3 tel que $f(u_3) = u_2 + u_3$. Posons $u_3 = (x,y,z)$. Alors

$$f(u_3) = u_2 + u_3 \iff \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & x \\ -z & = & 1+y \\ y+2z & = & -1+z \end{array} \right. \iff z = -1-y.$$

Posons alors $u_3 = (0,0,-1)$. Il est clair que la famille (u_1,u_2,u_3) est une base de $\mathbb{R}^3$ et dans cette base, la matrice de l'endomorphisme canoniquement associé à A est B. Donc A est semblable à B.

Exercice 4.

Trigonaliser les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 0 & 6 & -3 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Correction.

On commence par calculer le polynôme caractéristique de A, on trouve $\chi_A(X) = -(X-3)(X-2)^2$. On cherche ensuite le sous-espace propre associé à la valeur propre 3, en résolvant $AX = 3X$. Un rapide calcul montre qu'il est engendré par le vecteur propre $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. On cherche ensuite le sous-espace propre associé à la valeur propre 2, en résolvant $AX = 2X$. On trouve cette fois qu'il est engendré par le vecteur propre $u_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$. Pour trigonaliser la matrice, il suffit de compléter la base par un troisième vecteur indépendant des deux premiers, par exemple $u_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. On a $Au_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} = -6u_1 + u_2 + 2u_3$. La matrice A est donc semblable à la matrice

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & -6 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

la matrice de passage étant

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Il n'y a bien sûr pas unicité ni de la matrice triangulaire supérieure à laquelle A est semblable, ni de la matrice de passage. D'ailleurs, dans l'exemple de la matrice B, nous allons donner une forme plus précise à la trigonalisation. Le polynôme caractéristique de B est égal à $\chi_B(X) = -(X+1)(X-1)^2$. On cherche une base de l'espace propre associé à la valeur propre -1 en résolvant l'équation $BX = -X$. On trouve que le vecteur $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ engendre cet espace propre. Ensuite, on cherche une base de l'espace propre associé à la valeur propre 1 en résolvant l'équation $BX = X$. On trouve que le vecteur $u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ engendre cet espace propre. On cherche enfin un vecteur u_3 tel que $Bu_3 = u_3 + u_2$. On obtient que le vecteur $u_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ convient. Finalement, on a prouvé que $B = PTP^{-1}$, avec

$$T = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Remarquons qu'on peut toujours réduire une matrice trigonalisable de sorte que, hormi les coefficients diagonaux, les seuls coefficients non-nuls sont situés juste au-dessus de la diagonale, et ces coefficients hors-diagonale sont égaux à 0 ou 1.

Exercice 5.

Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$ et soit ϕ l'endomorphisme de E défini par $\phi(P) = P - (X+1)P'$. Justifier que ϕ est diagonalisable et donner les valeurs propres de ϕ.

Correction.

On va écrire la matrice de ϕ dans la base canonique de E. Remarquons que pour tout $k = 0, \dots, n$, on a

$$\phi(X^k) = (-k+1)X^k - kX^{k-1}.$$

Ainsi, la matrice de ϕ dans la base $(1, X, \dots, X^n)$ est triangulaire supérieure, et ses coefficients diagonaux sont $1, 0, \dots, -n+1$. Les valeurs propres d'une matrice triangulaire supérieure étant exactement les valeurs situées sur la diagonale, on en déduit que ϕ est diagonalisable, ses valeurs propres étant les $(n+1) = \dim(E)$ réels distincts $1, 0, -1, \dots, -n+1$.

2. Exercices d'entraînement

Exercice 6.

Soit $\phi : M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ M \mapsto {}^tM$. Déterminer les valeurs propres de ϕ. ϕ est-elle diagonalisable ?

Correction.

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $M \neq 0$ tel que $\phi(M) = \lambda M$. Les termes diagonaux donnent $m_{i,i} = \lambda m_{i,i}$ pour $1 \leq i \leq n$, les termes non-diagonaux donnent $m_{i,j} = \lambda m_{j,i}$, pour $1 \leq j < i \leq n$. On en déduit que $m_{i,j} = \lambda^2 m_{i,j}$ pour tous les couples (i,j). Ceci entraîne que $\lambda = \pm 1$. On distingue plusieurs cas.

— Si $\lambda = -1$, tous les coefficients sur la diagonale sont égaux à 0 et on a $m_{i,j} = -m_{j,i}$. On en déduit que -1 est une valeur propre de ϕ, les vecteurs propres appartenant à $\mathrm{vect}(f_{i,j};\ 1 \leq j < i \leq n)$ avec $f_{i,j} = E_{i,j} - E_{j,i}$. L'espace propre associé est donc de dimension $n(n-1)/2$.

— Si $\lambda = 1$, on n'a plus de contraintes sur les éléments diagonaux, et $m_{i,j} = m_{j,i}$ pour les éléménts non-diagonaux. On en déduit que 1 est valeur propre, les vecteurs propres étant éléments de $\mathrm{vect}(E_{i,i}, g_{i,j};\ 1 \leq j < i \leq n)$, avec $g_{i,j} = E_{i,j} + E_{j,i}$. L'espace propre associé est donc de dimension $n + n(n-1)/2 = n(n+1)/2$.

Finalement, puisque $\frac{n(n-1)}{2} + \frac{n(n+1)}{2} = n^2$, ϕ est bien diagonalisable.

Exercice 7.

Soit $n \geq 1$ et $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tels que $AB - BA = A$. Le but de l'exercice est de démontrer que A est nilpotente, c'est-à-dire qu'il existe $k \geq 1$ tel que $A^k = 0$.

1. Montrer que, pour tout $k \geq 0$, on a $A^kB - BA^k = kA^k$.
2. On considère

$$\begin{array}{rcl} \phi_B : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \to & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ M & \mapsto & MB - BM. \end{array}$$

Vérifier que ϕ_B est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

3. Justifier que si $A^k \neq 0$, alors k est une valeur propre de ϕ_B.
4. En déduire l'existence d'un entier $k > 0$ tel que $A^k = 0$.

Correction.

1. On va procéder par récurrence sur k. La propriété est vraie si $k = 0$ ou si $k = 1$. Soit un entier $k \geq 1$ tel que la propriété est vraie. Multiplions alors cette égalité à gauche par A. On trouve
$$A^{k+1}B - ABA^k = kA^{k+1}.$$
De même, multiplions à droite par A^k l'égalité $AB - BA = A$. Il vient :
$$ABA^k - BA^{k+1} = A^{k+1}.$$
Si on somme les deux inégalités obtenues, on obtient immédiatement que la propriété est aussi vraie au rang $k + 1$.
2. La vérification est immédiate et laissée au lecteur.
3. Il suffit de remarquer que le résultat de la question 1. entraîne que A^k est un vecteur propre de ϕ_B associé à la valeur propre k.
4. $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ étant de dimension finie n^2, ϕ_B admet au plus un nombre fini de valeurs propres distinctes. Or, si $A^k \neq 0$, k est une valeur propre de ϕ_B. Il existe donc un nombre fini d'entiers k tels que $A^k \neq 0$. En particulier, il existe au moins un entier k avec $A^k = 0$.

Exercice 8.

Soit u un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie, et soit π_u son polynôme minimal. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. Démontrer que $P(u)$ est inversible si et seulement si P et π_u sont premiers entre eux.

Correction.

Supposons d'abord que P et π_u sont premiers entre eux. Alors, d'après le théorème de Bézout, il existe $U, V \in \mathbb{K}[X]$ tels que $UP + V\pi_u = 1$. On évalue en u :
$$U(u)P(u) + V(u)\pi_u(u) = Id_E \iff U(u)P(u) = I_n.$$
$P(u)$ est donc inversible, d'inverse $U(u)$. Réciproquement, supposons que P et π_u ne sont pas premiers entre eux, et soit Q un facteur commun. On factorise π_u en $\pi_u = QR$ avec $\deg(Q), \deg(R) < \deg(\pi_u)$. En particulier, on a $R(u) \neq 0$. Mais d'autre part, $\pi_u | PR$ et donc $0 = P(u)R(u)$. Comme $R(u)$ est non-nul, $P(u)$ n'est pas inversible.

Exercice 9.

Existe-t-il dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice dont le polynôme minimal est $X^2 + 1$?

Correction.

Supposons d'abord qu'il existe une telle matrice. Alors puisque X^2+1 n'a pas de racines dans $\mathbb{R}$, A n'admet pas de valeurs propres réelles. Ceci n'est possible que si n est pair, sinon le polynôme caractéristique est de degré impair et s'annule. Réciproquement, supposons que $n=2p$ est pair. La clé est le cas $n=2$. Dans ce cas, la matrice

$$B=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

convient (dans ce cas, on a également $\chi_B(X)=X^2+1$). Plus généralement, pour $n=2p$ pair quelconque, on considère la matrice diagonale par blocs comprenant sur la diagonale p blocs de B.

Exercice 10.

Soit $n\geq 1$, $\mathcal{N}$ l'ensemble des matrices nilpotentes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, V le sous-espace vectoriel engendré par $\mathcal{N}$, et T_0 le sous-espace de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ des matrices de trace nulle.

1. Quelle est la dimension de T_0 ?
2. Démontrer que $V\subset T_0$.
3. Pour $j\in\{2,\dots,n\}$, on note $F_j=E_{1,1}+E_{1,j}-E_{j,1}-E_{j,j}$ et $G_j=F_j-E_{1,j}+E_{j,1}$. Calculer F_j^2. En déduire que $G_j\in V$.
4. Soit $\mathcal{F}$ la famille d'éléments de V constituée par les matrices $E_{i,j}$, $1\leq i,j\leq n$ avec $i\neq j$ et par les matrices G_k, $k=2,\dots,n$. Démontrer que $\mathcal{F}$ est une famille libre.
5. En déduire que $V=T_0$.

Correction.

1. T_0 est le noyau de la forme linéaire Tr. Ainsi, $\dim(T_0)=\dim(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))-1=n^2-1$.
2. V étant engendré par les matrices nilpotentes, et T_0 étant un espace vectoriel, il suffit de démontrer que $\mathcal{N}\subset T_0$. Mais, si A est une matrice nilpotente, elle est semblable à une matrice triangulaire supérieure dont les coefficients sur la diagonale sont nuls. Comme la trace est un invariant de similitude, on a bien $Tr(A)=0$.
3. C'est une question un peu calculatoire. En développant le carré (attention, les produits ne sont pas commutatifs !) et en utilisant que $E_{i,j}E_{k,l}=0$ si $j\neq k$ et $E_{i,l}$ sinon, on trouve que $F_j^2=0$. Puisque $E_{1,j}^2=0$ et $E_{j,1}^2=0$, on trouve bien que G_j, somme de trois matrices nilpotentes, est un élément de V.
4. Supposons que
$$\sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^n \alpha_{i,j}E_{i,j}+\sum_{k=2}^n\beta_kG_k=0.$$
Alors, pour $k\geq 2$, le seul terme en position (k,k) vient de β_kG_k, et il vaut $-\beta_k$. On a donc $\beta_k=0$ pour tout $k=2,\dots,n$. On en déduit alors que les $\alpha_{i,j}$ sont nuls car la famille $(E_{i,j})$ est libre.
5. D'après la question précédente, on a $\dim(V)\geq (n^2-n)+(n-1)=n^2-1$. Puisque $V\subset T_0$ et que $\dim(V)\geq\dim(T_0)$, on a bien $V=T_0$.

3. Exercices d'approfondissement

Exercice 11.

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et soit $f \in \mathcal{L}(E)$. On considère l'endomorphisme ϕ de $\mathcal{L}(E)$ défini par $\phi(g) = f \circ g$.

1. Démontrer que toute valeur propre de f est une valeur propre de ϕ puis, si λ est une valeur propre de f, déterminer $E_\lambda(\phi)$.
2. En déduire que si f est diagonalisable, alors ϕ est diagonalisable.

Correction.

1. Soit λ une valeur propre de f. Considérons p_λ un projecteur sur $E_\lambda(f)$. Alors, pour tout $x \in E$,
$$\phi(p_\lambda)(x) = f(p_\lambda(x)) = \lambda p_\lambda(x)$$
et donc p_λ est un vecteur propre associé à la vecteur propre λ. Plus généralement, soit $g \in \mathcal{L}(E)$. Alors
$$\begin{aligned} g \in E_\lambda(\phi) &\iff \forall x \in E, f(g(x)) = \lambda g(x) \\ &\iff \forall x \in E,\ g(x) \in E_\lambda(f) \\ &\iff g(E) \subset E_\lambda(f). \end{aligned}$$
2. D'après la question précédente, $E_\lambda(\phi)$ est l'ensemble des applications linéaires de E à valeurs dans $E_\lambda(f)$. En particulier, on en déduit que $\dim(E_\lambda(\phi)) = \dim(E) \times \dim(E_\lambda(f))$. Si maintenant f est diagonalisable, de valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_p$, alors
$$\sum_{i=1}^{p} \dim(E_{\lambda_i}(\phi)) = \sum_{i=1}^{p} \dim(E) \times \dim(E_{\lambda_i}(f)) = \dim(E) \sum_{i=1}^{p} \dim(E_{\lambda_i}(f)) = \dim(E)^2$$
où la dernière égalité vient du fait que f est diagonalisable. On en déduit que ϕ est lui-même diagonalisable.

Exercice 12.

Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$ et soient A, B deux éléments de E premiers entre eux tels qu'en outre B est scindé à racines simples. On notera $x_1, \dots, x_p$ ses racines. On note ϕ l'application de E dans lui-même qui à un polynôme P associe le reste de AP dans la division euclidienne par B.

1. Démontrer que ϕ est un endomorphisme de E. Est-ce un isomorphisme ?
2. Démontrer que 0 est une valeur propre de ϕ et déterminer le sous-espace propre associé.
3. Démontrer que, pour chaque $k = 1, \dots, p$, $P_k(X) = \prod_{j \neq k}(X - x_j)$ est un vecteur propre de ϕ.
4. En déduire que ϕ est diagonalisable.

Correction.

1. Soient $P_1, P_2 \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors on a
$$AP_1 = BQ_1 + \phi(P_1), AP_2 = BQ_2 + \phi(P_2)$$
où $Q_1, Q_2 \in \mathbb{R}[X]$ et donc
$$A(P_1 + \lambda P_2) = B(Q_1 + \lambda Q_2) + \big(\phi(P_1) + \lambda\phi(P_2)\big).$$
Or, $\phi(P_1)+\lambda\phi(P_2)$ est de degré inférieur strict à B. Par unicité dans la division euclidienne, il s'agit du reste de la division euclidienne de $A(P_1+\lambda P_2)$ par B, c'est-à-dire de $\phi(P_1+\lambda P_2)$. Autrement dit, on vient de prouver que $\phi(P_1 + \lambda P_2) = \phi(P_1) + \lambda\phi(P_2)$ et donc que ϕ est un endomorphisme de E. Comme il est à valeurs dans $\mathbb{R}_{n-1}[X]$, il ne peut pas être surjectif et donc ce n'est pas un isomorphisme.
2. Remarquons que la réponse à la question précédente a permis de prouver que 0 est valeur propre pour ϕ. Soit P un vecteur propre associé. Alors on a $AP = BQ$, et donc $B|AP$. Comme $B \wedge A = 1$, on a $B|P$, et réciproquement tout multiple de B dans E est tel que $\phi(P) = 0$. On a donc prouvé que $E_0(\phi) = \mathrm{vect}(B, XB, \dots, X^{n-p}B)$.
3. Soit $\lambda \neq 0$ une autre valeur propre de ϕ et P un vecteur propre associé. Ceci est équivalent à dire que $(A-\lambda)P = BQ$ et donc B divise $(A-\lambda)P$. Si on souhaite que P_k soit un vecteur propre de ϕ, il ne reste plus qu'une seule racine de B à "tuer", que l'on tue en choisissant $\lambda = A(x_k)$. Autrement dit, si $\lambda = A(x_k)$, alors toutes les racines de B sont des racines du polynôme $(A - A(x_k))P_k$, et donc (B est scindé à racines simples) $B|(A - A(x_k))P_k$. Ceci entraîne que P_k est un vecteur propre de ϕ associé à la valeur propre $A(x_k)$.
4. Les P_k peuvent être compris (à un coefficient multiplicatif non nul près) comme les polynômes interpolateurs de Lagrange associés aux réels $x_1, \dots, x_p$ (qui sont tous distincts). Ainsi, ces polynômes forment une base de $\mathbb{R}_p[X]$. Par des considération de degrés, il est facile de vérifier que $\mathbb{R}_p[X]$ et $E_0(\phi)$ sont supplémentaires dans E. On vient donc de trouver une base de E constituée de vecteurs propres pour ϕ. On en déduit que ϕ est diagonalisable.

Exercice 13.

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et soit $f \in \mathcal{L}(E)$ diagonalisable. Démontrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

1. Les valeurs propres de f sont simples.
2. Il existe $x \in E$ tel que $\{x, f(x), \dots, f^{n-1}(x)\}$ soit une base de E.
3. La famille $\{Id, f, \dots, f^{n-1}\}$ est libre.

Correction.

Commençons par prouver que 1. $\implies$ 2. Pour cela, on part de $(e_1, \dots, e_n)$ une base de vecteurs propres de f, $f(e_i) = \lambda_i e_i$, et posons $x = e_1 + \dots + e_n$. Alors la famille $(x, f(x), \dots, f^{n-1}(x))$ est libre, donc c'est une base de E. En effet, s'il existe une relation de liaison
$$\alpha_0 x + \dots + \alpha_{n-1} f^{n-1}(x),$$
alors puisque
$$f^k(x) = \lambda_1^k e_1 + \dots + \lambda_n^k e_n$$

en raisonnant coordonnées par coordonnées on obtient que pour tout i, on a

$$\alpha_0 + \alpha_1 \lambda_i + \cdots + \alpha_{n-1}\lambda_i^{n-1} = 0.$$

Notant P le polynôme $P(X) = \alpha_0 + \alpha_1 X + \cdots + \alpha_{n-1}X^{n-1}$, on obtient que $P(\lambda_i) = 0$ pour tout $i = 1, \dots, n$, donc P admet n racines distinctes. P est le polynôme nul, donc tous les α_i sont nuls et la famille est effectivement libre. Une autre façon de procéder aurait été de remarquer que la matrice de passage de $(e_1, \dots, e_n)$ à $(x, f(x), \dots, f^{n-1}(x))$ est une matrice de Vandermonde. L'implication 2. $\implies$ 3. est la plus facile des trois. En effet, si la famille $(Id, f, \dots, f^{n-1})$ était liée, toute relation de liaison non triviale donnerait, par évaluation en x, une relation de liaison non triviale sur la famille $(x, f(x), \dots, f^{n-1}(x))$. Prouvons enfin 3. $\implies$ 1.. Puisque f est diagonalisable, son polynôme minimal est scindé à racines simples. Mais d'après la troisième propriété, ce polynôme doit être au moins de degré n. Il est donc exactement de degré n, et admet n racines distinctes qui sont les valeurs propres de f.

Exercice 14.

Soit H un hyperplan de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $n \geq 2$. Le but de l'exercice est de démontrer que H contient une matrice inversible. On raisonne par l'absurde et on suppose que H ne contient pas de matrices inversibles.

1. Démontrer que H contient toutes les matrices nilpotentes.
2. Conclure.

Correction.

1. Puisque $I_n \notin H$, on a $H \oplus \operatorname{vect}(I_n) = \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Soit N une matrice nilpotente. Il existe $A \in H$ et $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $N = A + \lambda I_n$. Puisque A n'est pas inversible, il existe un vecteur X non nul tel que $AX = 0$. On en déduit que $NX = \lambda X$ et donc que λ est une valeur propre de N. Comme N est nilpotente, elle n'admet que 0 pour valeur propre. Donc $\lambda = 0$ et $N = A \in H$.
2. Il suffit de prouver qu'on peut trouver une matrice inversible qui s'écrit comme combinaison linéaire de matrices nilpotentes. Dans ce cas, on aura trouvé une matrice inversible dans H, une contradiction. Mais considérons

$$N_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix} \text{ et } N_2 = \begin{pmatrix} 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Alors N_1 et N_2 sont clairement nilpotentes, et leur somme est inversible car de rang n.

Exercice 15.

1. Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $AB = BA$ et B est nilpotente. Prouver que si $A \neq 0$, alors $\operatorname{rg}(BA) < \operatorname{rg}(A)$.

2. Soient $A_1,\dots,A_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ des matrices nilpotentes qui commutent. Prouver que $A_1\cdots A_n = 0$. Le résultat subsiste-t-il si on ne suppose plus que les matrices commutent ?

Correction.

1. Puisque $AB = BA$, on a toujours $\mathrm{rg}(BA) = \mathrm{rg}(AB) \leq \mathrm{rg}(A)$. Si les rangs sont égaux, puisque $BA(\mathbb{R}^n) \subset B(\mathrm{Im}(A))$, B est injectif sur $\mathrm{Im}(A)$ (appliquer le théorème du rang à $B_{|\mathrm{Im}(A)}$). De plus, puisque $BA = AB$, on sait que $\mathrm{Im}(A)$ est stable par B. Autrement dit, B induit un isomorphisme de $\mathrm{Im}(A)$. C'est donc aussi le cas pour B^n. Mais $B^n = 0$, ce qui n'est possible que si $\mathrm{Im}(A) = \{0\}$. Ainsi, si $A \neq 0$, alors $\mathrm{rg}(BA) < \mathrm{rg}(A)$.
2. On prouve par récurrence sur p dans $\{0,\dots,n-1\}$ que
$$\mathrm{rg}(A_{n-p}\cdots A_n) \leq n-p-1.$$
C'est vrai pour $p = 0$ car $\mathrm{rg}(A_n) < n$. Si c'est vrai à l'ordre $p < n-1$, alors ou bien $A_{n-p}\cdots A_n = 0$ et donc $A_{n-p-1}\cdots A_n = 0$ de rang 0, qui est bien inférieur ou égal à $n-p-2$. Ou bien $A_{n-p}\cdots A_n \neq 0$, et d'après la question précédente :
$$\mathrm{rg}(A_{n-p-1}A_p\cdots A_n) \leq \mathrm{rg}(A_{n-p}\cdots A_n) - 1 \leq n-p-2.$$
La propriété est donc vraie pour $p = n-1$ et elle prouve bien que $A_1\cdots A_n = 0$. On ne peut pas se passer de l'hypothèse de commutativité, comme le montre l'exemple des deux matrices suivantes :
$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$