Chapitre VI : Exercices et exemples

Suites et Séries de fonctions

Table des matières

Dans ce chapitre, E et F désigne un espace vectoriel normé de dimension finie sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Toutes les fonctions que l'on considère dans ce chapitre sont, sauf indication contraire, des fonctions définies sur une partie A de E et à valeurs dans F.

Partie A : Convergences des suites et des séries de fonctions

1. Convergence simple

a. Suites de fonctions

Exemple 1.

La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$ définie, pour $n \in \mathbb{N}$, par $f_n : t \mapsto t^n$ converge simplement sur $[0, 1]$ vers la fonction

$$f : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0, 1[\\ 1 & \text{si } x = 1. \end{cases}$$

Exercice 1.

1. Écrire la définition de la convergence uniforme vers une fonction en termes "epsilonesques".

2. Pour $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des suites de fonctions qui converge simplement sur A vers des fonctions f et g respectivement, étudier la convergence simple des suites de fonctions $(\lambda f_n + \mu g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (où $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$) et $(f_n g_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

3. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions qui converge simplement sur A vers une fonction f. Que dire de f lorsqu'à partir d'un certain rang, les f_n sont : positives ? croissantes ? dérivables ? périodiques (de même période T) ? strictement positives ?

Correction.

1. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de A dans F et $f : A \to F$. Alors $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers f sur A si, et seulement si,

$$\forall \varepsilon > 0,\ \forall x \in A,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geq N, \quad \|f_n(x) - f(x)\|_F \leq \varepsilon.$$

2. On suppose que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent simplement vers f et g respectivement sur A. Soit $x \in A$. On a :

$$(\lambda f_n + \mu g_n)(x) = \lambda f_n(x) + \mu g_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \lambda f(x) + \mu g(x) = (\lambda f + \mu g)(x),$$

par linéarité du passage à la limite. Ainsi, $(\lambda f_n + \mu g_n)$ converge simplement vers $\lambda f + \mu g$ sur A.
De plus, on a, pour $x \in A$:

$$(f_n g_n)(x) = f_n(x) g_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(x)g(x) = (fg)(x),$$

donc $(f_n g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers fg sur A.

3. Par les propriétés de la limite, on remarque que la positivité, la croissance et la périodicité (avec une période commune) "passent" à la convergence simple.
Par contre, la dérivabilité ne passe pas (voire $f_n : t \to t^n$ sur $[0,1]$) et la stricte positivité ne passe pas non plus (voire $f_n : t \to t^n$ sur $]0,1]$).

Exercice 2.

Étudier la convergence simple de la suite de fonctions (f_n) définie, pour $n \in \mathbb{N}$, par :

$$a)\ f_n : t \mapsto \frac{1+nt^2}{1+nt}. \qquad b)\ f_n : t \mapsto \sin^n(t)\cos(t).$$

$$c)\ f_n : x \mapsto f_n(x) = \begin{cases} nx^2 & \text{si } x \in [-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}] \\ 6n\left(\frac{1}{\sin(\frac{1}{nx})} - \frac{1}{\tan(\frac{1}{nx})}\right) & \text{si } x \notin [-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}] \end{cases}$$

Correction.

a) Étudions la convergence simple de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sur R_+ :
Soit $x \in \mathbb{R}_+$. On a :

$$f_n(x) = \frac{1+nx^2}{1+nx} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \\ t & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Donc (f_n) converge simplement vers $f : t \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } t = 0 \\ t & \text{si } t > 0 \end{cases}$ sur $\mathbb{R}_+$.

b) Étudions la convergence simple de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur R.
Soit $t \in \mathbb{R}$. On a :

$$f_n(t) = \sin^n(t)cos(t) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \begin{cases} 0 & \text{si } t \in \{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \text{ car } cos(t) = 0 \\ 0 & \text{si } t \notin \{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \text{ car } |sin(t)| < 1 \end{cases}$$

Donc $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers la fonction nulle.

c) Étudions la convergence simple de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sur $\mathbb{R}$. Soit $x \in \mathbb{R}$.
Traitons tout d'abord le cas $x \neq 0$. Alors, à partir d'un certain rang N ($N = E(1/|x|)+1$ par exemple), pour tout $n \geq N$, $x \notin [-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}]$. Par suite, pour tout $n \geq N$,

$$f_n(x) = 6n\left(\frac{1}{\sin(\frac{1}{nx})} - \frac{1}{\tan(\frac{1}{nx})}\right).$$

Or quand $n \to +\infty$, on a :

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{\sin(\frac{1}{nx})} - \frac{1}{\tan(\frac{1}{nx})} &= \frac{\tan(\frac{1}{nx}) - \sin(\frac{1}{nx})}{\sin(\frac{1}{nx})\tan(\frac{1}{nx})} \\
&= \frac{\frac{1}{nx} + \frac{1}{3n^3x^3} + o(\frac{1}{n^3}) - (\frac{1}{nx} - \frac{1}{6n^3x^3} + o(\frac{1}{n^3}))}{\frac{1}{n^2x^2} + o(\frac{1}{n^2})} \\
&= \frac{\frac{1}{2n^3x^3} + o(\frac{1}{n^3})}{\frac{1}{n^2x^2} + o(\frac{1}{n^2})} \\
&\underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2nx}
\end{aligned}
$$

Ainsi, toujours pour $x \neq 0$ et $n \geq N$,

$$f_n(x) = 6n\left(\frac{1}{\sin(\frac{1}{nx})} - \frac{1}{\tan(\frac{1}{nx})}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{6n}{3nx} = \frac{3}{x}.$$

Il en résulte que :

$$f_n(t) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ \dfrac{3}{x} & \text{si } x \in \mathbb{R}^* \end{cases}$$

Donc (f_n) converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers la fonction $f : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ \dfrac{3}{x} & \text{si } x \in \mathbb{R}^* \end{cases}$.

La définition suivante est une simple reformulation de la précédente dans le cas particulier des séries :

Exemple 2.

— La série de fonctions $\sum f_n$ où $f_n : t \mapsto t^n$ converge simplement vers $t \mapsto \frac{1}{1-t}$ sur $]-1,1[$.

> En effet : soit $t \in]-1,1[$. On a :
>
> $$S_N = \sum_n = 0^N t^n = \frac{1-t^{N+1}}{1-t} \xrightarrow[N\to+\infty]{} \frac{1}{1-t} \text{ car } |t| < 1.$$

— La série de fonctions $\sum f_n$ où $f_n : t \mapsto \dfrac{t^n}{n!}$ converge simplement vers $t \mapsto e^t$ sur $\mathbb{R}$.

> En effet : soit $t \in \mathbb{R}$. En appliquant la règle de D'Alembert, on montre que $\sum \frac{t^n}{n!}$ est une série absolument convergente et donc convergente ; et de plus, sa somme vérifie
>
> $$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{n!} = e^t.$$

2. Convergence uniforme

a. Définition et premières propriétés

Exemple 3.

— La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que, pour $n \in \mathbb{N}$, $f_n : x \mapsto \sqrt{x + \frac{1}{n}}$ converge uniformément vers $x \mapsto \sqrt{x}$ sur $\mathbb{R}_+$.

> En effet : soit $n \in \mathbb{N}^*$ et on note $f : x \mapsto \sqrt{x}$. On a, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$,
>
> $$|f_n(x) - f(x)| = |\sqrt{x + \frac{1}{n}} - \sqrt{x}| = \frac{\frac{1}{n}}{\sqrt{x+\frac{1}{n}} + \sqrt{x}} \leq \frac{\frac{1}{n}}{\sqrt{0+\frac{1}{n}} + \sqrt{0}} = \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{\sqrt{n}}} = \frac{1}{\sqrt{n}}.$$
>
> Par suite, les fonctions $f_n - f$ sont bornées sur $\mathbb{R}_+$ et :
>
> $$\|f_n - f\|_\infty = \sup_{x\in\mathbb{R}_+} |f_n(x) - f(x)| \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

— La suite de fonctions de terme général $t \mapsto t^n$ ne converge pas uniformément sur $[0,1[$.

> En effet, on remarque tout d'abord que (f_n) converge simplement vers le fonction nulle sur $[0,1[$.
> Soit $n \in \mathbb{N}$ et on note $f : x \mapsto 0$. Comme $f_n : t \mapsto t^n$ est strictement croissante sur $[0,1[$ (pour $n > 0$), on a :
>
> $$\|f_n - f\|_\infty = \sup_{t\in[0,1[} t^n = \lim_{t\to1^-} t^n = 1$$
>
> Par suite,
> $$\|f_n - f\|_\infty = 1 \underset{n\to+\infty}{\not\to} 0.$$

> **Méthode :** Montrer qu'une suite de fonctions converge uniformément.
>
> - *Limite potentielle :* On étudie la convergence simple de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$. S'il y a convergence simple vers une fonction f sur A, on étudie alors la convergence uniforme vers f sur A.
> - *Convergence uniforme vers la limite :* Pour montrer la convergence uniforme de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on cherche à obtenir une majoration de $\|f_n - f\|_\infty$ qui tende vers 0 i.e. une majoration **indépendante de** $x \in A$ du type (à partir d'un certain rang)
>
> $$\|f_n(x) - f(x)\|_F \leq u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$
>
>   où (u_n) est une suite de réels positifs qui tend vers 0 (**et qui ne dépend pas de** $x \in A$ **!!!**).
>
>   La suite (u_n) s'obtient la plus souvent par une majoration simple, quand c'est possible, de

$\|f_n(x) - f(x)\|_F$ ou par une étude des extrema de la fonction $x \mapsto \|f_n(x) - f(x)\|_F$ (à n fixé).

Exercice 3.

Étudier la convergence uniforme des suites de fonctions de termes généraux suivants :

1. pour $n \in \mathbb{N}$, $f_n : [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \to \mathbb{R}$ tel que $f_n : x \mapsto x^n$.
2. pour $n \in \mathbb{N}$, $f_n : [0, 1] \to \mathbb{R}$ tel que $f_n : x \mapsto x^n(1 - x)$.
3. pour $n \in \mathbb{N}$, $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tel que $f_n : x \mapsto \sin(x + \frac{1}{n})$.
4. pour $n \in \mathbb{N}$, $f_n : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ tel que $f_n : x \mapsto \frac{x}{n(1+x^n)}$.

Correction.

1. — CVS sur $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$. Soit $x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$. On a :

$$f_n(x) = x^n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

car $|x| \leq \frac{1}{2} < 1$.
Par suite, $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement vers $\mathbf{0}$ (la fonction nulle) sur $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$.

— CVU sur $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$. Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$, on a :

$$|f_n(x) - f(x)| = |x|^n \leq \frac{1}{2^n},$$

D'où $f_n - f$ est borné sur $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ et :

$$\|f_n - f\|_\infty \leq \frac{1}{2^n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0.$$

Remarque : l'inégalité précédente est en fait une égalité.
Il en résulte que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers $\mathbf{0}$ sur $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$.

2. — CVS sur $[0, 1]$. Soit $x \in [0, 1]$. On a :

$$f_n(x) = x^n(1 - x) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \begin{cases} 0 \times (1 - x) = 0 & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 1 \times 0 = 0 & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

Par suite, $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement vers $\mathbf{0}$ (la fonction nulle) sur $[0, 1]$.

— CVU sur $[0, 1]$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On étudie sur $[0, 1]$ la fonction :

$$x \mapsto g_n(x) = |f_n(x) - f(x)| = x^n(1 - x).$$

La fonction g_n est dérivable, et on a $g_n'(x) = x^{n-1}(n - (n + 1)x)$.

x	0		$\frac{n}{n+1}$		1
$g_n'(x)$	0	$+$	0	$-$	
$g_n(x)$	0	$\nearrow$	$g_n(\frac{n}{n+1})$	$\searrow$	0

Par suite, on a :

$$\|f_n - f\|_\infty = g_n(\frac{n}{n+1}) = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n (1 - \frac{n}{n+1}) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{e} \times 0 = 0.$$

Il en résulte que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers $\mathbf{0}$ sur $[0,1]$.

3. — CVS sur $\mathbb{R}$. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a, par continuité de la fonction sin sur $\mathbb{R}$ et donc en x :

$$f_n(x) = \sin(x + \frac{1}{n}) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \sin(x)$$

Par suite, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers $f = \sin$ sur $\mathbb{R}$.

— CVU sur $\mathbb{R}$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned}
|f_n(x) - f(x)| &= |\sin(x + \tfrac{1}{n}) - \sin(x)| \\
&= |\cos(x)\sin(\tfrac{1}{n}) + \sin(x)\left(\cos(\tfrac{1}{n}) - 1\right)| \\
&\leq |\cos(x)||\sin(\tfrac{1}{n})| + |\sin(x)||\cos(\tfrac{1}{n}) - 1| \\
&\leq |\sin(\tfrac{1}{n})| + |\cos(\tfrac{1}{n}) - 1|
\end{aligned}$$

D'où $f_n - f$ est borné par 2 sur $\mathbb{R}$ et :

$$\|f_n - f\|_\infty \leq |\sin(\frac{1}{n})| + |\cos(\frac{1}{n}) - 1| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

car $\lim\limits_{t\to 0} \sin(t) = 0$ et $\lim\limits_{t\to 0} \cos(t) = 1$.

Il en résulte que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers sin sur $\mathbb{R}$.

Correction suite.

4. — CVS sur $\mathbb{R}_+$. Soit $x \in \mathbb{R}_+$. On a :

$$f_n(x) = \frac{x}{n(1+x^n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ 0 & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

Par suite, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers $\mathbf{0}$ (la fonction nulle) sur $\mathbb{R}_+$.

— CVU sur $\mathbb{R}_+$. Soit $n \geq 2$. On étudie sur $[0,1]$ la fonction :

$$x \mapsto g_n(x) = |f_n(x) - f(x)| = \frac{x}{n(1+x^n)}.$$

La fonction g_n est dérivable, et on a

$$g_n'(x) = \frac{n(1+x^n) - n^2x^n}{n^2(1+x^n)^2} = \frac{1-(n-1)x^n}{n(1+x^n)^2} = \frac{1-(n-1)x^n}{n(1+x^n)^2}$$

x	0		$\frac{1}{\sqrt[n]{n-1}}$		$+\infty$
$g_n'(x)$		$+$	0	$-$	
$g_n(x)$	0	$\nearrow$	$g_n(\frac{1}{\sqrt[n]{n-1}})$	$\searrow$	0

Par suite, on a :

$$\|f_n - f\|_\infty = g_n(\frac{1}{\sqrt[n]{n-1}}) = \frac{1}{\sqrt[n]{n-1}} \cdot \frac{1}{n(1+\dfrac{1}{n-1})} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1 \times 0 = 0.$$

Il en résulte que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers $\mathbf{0}$ sur $\mathbb{R}_+$.
Remarque : on pouvait conclure plus rapidement en remarquant l'inégalité suivante :

$$g_n(x) = \frac{x}{n(1+x^n)} \leq \frac{1}{n}.$$

En effet, pour $0 \leq x \leq 1$, $\frac{x}{1+x^n} \leq \dfrac{1}{1+x^n} \leq 1$ *;*
et pour $x > 1$, $x^n > x$, *donc* $\frac{x}{1+x^n} \leq \dfrac{x}{1+x} \leq 1$.

Méthode : Montrer qu'une suite de fonctions ne converge pas uniformément.

S'il n'y a pas convergence simple sur A, il n'y pas convergence uniforme.
Mais si on a déterminé une limite f pour la convergence simple, pour montrer que la suite (f_n) ne converge pas uniformément vers f, on peut :

- montrer que la fonction $f_n - f$ n'est pas bornée sur A, ou
- exhiber une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans A telle que la suite de terme général

$$\|f_n(x_n) - f(x_n)\|_F \textbf{ ne tend pas vers } 0.$$

Exercice 4.

Étudier la convergence uniforme des suites de fonctions de termes généraux suivants :

1. pour $n \in \mathbb{N}$, $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tel que $f_n : x \mapsto \frac{x^n}{n!}$.
2. pour $n \in \mathbb{N}$, $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tel que $f_n : x \mapsto \frac{nx}{1+n^2x^2}$.

3. pour $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tel que $f_n : x \mapsto \left(x + \frac{1}{n}\right)^2$.

Correction.

1. — CVS sur $\mathbb{R}$. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$f_n(x) = \frac{x^n}{n!} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Par suite, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers $\mathbf{0}$ (la fonction nulle) sur $\mathbb{R}$.

— CVU sur $\mathbb{R}$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$|f_n(x) - f(x)| = \frac{|x|^n}{n!} \xrightarrow[x\to\pm\infty]{} +\infty,$$

Par suite, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n - f$ n'est pas bornée sur $\mathbb{R}$.
Il en résulte que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas uniformément vers $\mathbf{0}$ sur $\mathbb{R}$.

2. — CVS sur $\mathbb{R}$. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

car, pour $x \neq 0$, $\dfrac{nx}{1+n^2x^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{nx}$.
Par suite, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers $\mathbf{0}$ (la fonction nulle) sur $\mathbb{R}$.

— CVU sur $\mathbb{R}$. Soit $n \in \mathbb{N}$. On considère, pour $x \in \mathbb{R}$:

$$g_n(x) = |f_n(x) - f(x)| = \frac{n|x|}{1+n^2x^2}.$$

On remarque que pour $x_n = \dfrac{1}{n}$, on a :

$$g_n(x_n) = \frac{n\frac{1}{n}}{1+n^2(\frac{1}{n})^2} = \frac{1}{2}$$

Donc :

$$\|f_n - f\|_\infty = \sup_{x\in\mathbb{R}} g_n(x) \geq g_n(x_n) = \frac{1}{2} \underset{n\to+\infty}{\not\to} 0.$$

Il en résulte que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas uniformément vers $\mathbf{0}$ sur $\mathbb{R}$.

3. — CVS sur $\mathbb{R}$. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a, par continuité sur $\mathbb{R}$ et donc en x de la fonction carrée :

$$f_n(x) = \left(x + \frac{1}{n}\right)^2 \xrightarrow[n\to+\infty]{} x^2.$$

Par suite, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers $f : x \mapsto x^2$ sur $\mathbb{R}$.

— CVU sur $\mathbb{R}$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$|f_n(x) - f(x)| = |\left(x + \frac{1}{n}\right)^2 - x^2| = |\frac{2x}{n} + \frac{1}{n^2}| \xrightarrow[x\to\pm\infty]{} +\infty,$$

Par suite, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n - f$ n'est pas bornée sur $\mathbb{R}$.
Il en résulte que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas uniformément vers f sur $\mathbb{R}$.

Exercice 5.

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des suites de fonctions à valeurs réelles qui convergent uniformément vers f et g respectivement. Est-ce que $(f_n g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément ?

Correction.

Non, car la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, définie par $f_n : x \mapsto x + \frac{1}{n}$ pour $n \in \mathbb{N}$, converge uniformément vers $f : x \mapsto x$ sur $\mathbb{R}$ et on a prouvé précédemment que la suite de terme général $f_n^2 : x \mapsto (x + \frac{1}{n})^2$ ne converge pas uniformément vers $x \mapsto x^2$ sur $\mathbb{R}$.

b. Convergence uniforme des suites de fonctions bornées

Réponse : Non ! Considérons la fonction $f : x \mapsto x$ et la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie, pour $n \in \mathbb{N}$, par :

$$f_n : x \mapsto \begin{cases} f(x) = x & \text{si } x \in [-n, n] \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Alors, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un suite de fonctions bornées sur $\mathbb{R}$ qui converge simplement vers f qui n'est pas bornée sur $\mathbb{R}$.
(Et bien-sur, il ne peut y avoir convergence uniforme vers f sur $\mathbb{R}$ en vertu de la proposition précédente !)

Exercice 6.

Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $g : x \mapsto \dfrac{x}{1 + 27x^4}$

1. Calculer $\|g\|_\infty$.
2. On considère la suite de terme générale $f_n : x \mapsto g(nx)$. Étudier les convergences simple et uniforme de cette suite.

Correction.

1. La fonction g est une fonction impaire et dérivable sur $\mathbb{R}$. On effectue son étude sur $\mathbb{R}_+$. Pour $x \in \mathbb{R}_+$, on a :

$$g'(x) = \frac{(1 + 27x^4) - 108x^4}{(1 + 27x^4)^2} = \frac{1 - 81x^4}{(1 + 27x^4)^2},$$

x	0		$\frac{1}{3}$		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{4}$	$\searrow$	0

Par suite, comme g est impaire, on a :

$$\|g\|_\infty = \sup_{x\in\mathbb{R}} |g(x)| = \sup_{x\in\mathbb{R}_+} |g(x)| = \frac{1}{4}.$$

2. — CVS sur $\mathbb{R}$. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$f_n(x) = g(nx) = \frac{nx}{1+27n^4x^4} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ 0 & \text{si } x \neq 0, \end{cases}$$

car pour $x \neq 0$, $\dfrac{nx}{1+27n^4x^4} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{27n^3x^3}$.

Par suite, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers $f : x \mapsto 0$ sur $\mathbb{R}$.

— CVS sur $\mathbb{R}$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La fonction $\varphi : x \mapsto nx$ est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, donc :

$$\|f_n - f\|_\infty = \sup_{x\in\mathbb{R}} |g(nx)| = \sup_{y\in\mathbb{R}} |g(y)| = \frac{1}{4} \underset{n\to+\infty}{\not\to} 0.$$

Par suite, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas uniformément vers f sur $\mathbb{R}$.

Exercice 7.

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des suites de fonctions à valeurs réelles **bornées** qui convergent uniformément vers f et g respectivement. Est-ce que $(f_ng_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément ?

Correction.

Cette fois-ci, l'hypothèse "bornées" permet de conclure par l'affirmative.
En effet, d'après la proposition précédente, f et g sont bornées sur A. De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in A$, on a :

$$\begin{aligned}
|(f_ng_n - fg)(x)| &= |f_n(x)g_n(x) - f(x)g_n(x) + f(x)g_n(x) - f(x)g(x)| \\
&\leq |f_n(x)g_n(x) - f(x)g_n(x)| + |f(x)g_n(x) - f(x)g(x)| \\
&\leq |g_n(x)|.|f_n(x) - f(x)| + |f(x)|.|g_n(x) - g(x)| \\
&\leq |g_n(x)|.|f_n(x) - f(x)| + |f(x)|.|g_n(x) - g(x)| \\
&\leq \|g_n\|_\infty \|f_n - f\|_\infty + \|f\|_\infty \|g_n - g\|_\infty
\end{aligned}$$

Donc $f_n g_n - fg$ est bornée et on remarque que, par convergence uniforme de $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers g, on a :

$$\|g_n\|_\infty = \|g_n - g + g\|_\infty \leq \|g_n - g\|_\infty + \|g\|_\infty \xrightarrow[n\to+\infty]{} \|g\|_\infty.$$

Ainsi, on a :

$$\|f_n g_n - fg\|_\infty \leq \|g_n\|_\infty \|f_n - f\|_\infty + \|f\|_\infty \|g_n - g\|_\infty \xrightarrow[n\to+\infty]{} \|g\|_\infty \times 0 + \|f\|_\infty \times 0 = 0.$$

Donc $(f_n g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers fg.

c. Convergence uniforme sur une partie

Exemple 4.

Pour tout $a > 0$, la suite de fonctions de terme général $f_n : t \mapsto \frac{1}{1+nt}$ converge uniformément sur $[a, +\infty[\subset \mathbb{R}_+^*$.

On remarque tout d'abord que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas uniformément sur $\mathbb{R}_+^*$. En effet, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers $f : x \mapsto 0$ sur $\mathbb{R}_+^*$ mais on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\|f_n - f\|_\infty = \sup_{t\in\mathbb{R}}\left(\frac{1}{1+nt}\right) = 1 \underset{n\to+\infty}{\not\to} 0,$$

car f_n est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{1}{1+nt} = 1$.
Donc $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas uniformément sur $\mathbb{R}_+^*$.
Remarque : on aurait aussi pu utiliser le fait que, pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\|f_n - f\|_\infty = \|f_n\|_\infty \geq f_n\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{1+n\frac{1}{n}} = \frac{1}{2} \underset{n\to+\infty}{\not\to} 0.$$

Soit $a > 0$. Étudions la convergence uniforme sur $[a, +\infty[$.
Soit $n \in \mathbb{N}$. On a, pour tout $x \in [a, +\infty[$,

$$|f_n(t) - f(t)| = \frac{1}{1+nt} \leq \frac{1}{1+na}.$$

Ainsi, les $f_n - f$ sont bornés sur $[a, +\infty[$ et :

$$\|f_n - f\|_\infty \leq \frac{1}{1+na} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Il en résulte que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur $[a, +\infty[$.

Exercice 8.

Étudier la converge uniforme de la suite de terme général $f_n : x \mapsto e^{-nx}\sin(nx)$ sur les intervalles de la forme $[a, +\infty[$ avec $a > 0$ puis sur $\mathbb{R}_+$.

Correction.

— CVS sur $\mathbb{R}_+$. Soit $x \in \mathbb{R}_+$. On a :

$$f_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \text{ car } \sin(0) = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

car, pour $x > 0$, $e^{-nx} \xrightarrow[n\to]{} 0$ et $|\sin(nx)| \leq 1$.

Par suite, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers $f : x \mapsto 0$ sur $\mathbb{R}_+$.

— CVS sur $\mathbb{R}_+$. On considère la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ telle que, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $x_n = \frac{1}{n}$. Alors, on a :

$$|f_n(x_n) - f(x_n)| = e^{-n\frac{1}{n}} \sin(n\frac{1}{n}) = e\sin(1).$$

Par suite,

$$\|f_n - f\|_\infty \geq e\sin(1) \underset{n\to+\infty}{\not\to} 0.$$

Donc $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas uniformément sur $\mathbb{R}_+$.

— Soit $a > 0$. CVS sur $[a, +\infty[$. Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $x \in [a, +\infty[$,

$$|f_n(x) - f(x)| = e^{-nx}|\sin(nx)| \leq e^{-na}.$$

Par suite,

$$\|f_n - f\|_\infty \leq e^{-na} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Il en résulte que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur $[a, +\infty[$.

Exemple 5.

La suite de fonctions de terme général $f_n : t \mapsto t^n$ converge uniformément sur tout segment de $]-1, 1[$.

Exercice 9.

Étudier la converge uniforme de la suite de terme général $f_n : x \mapsto \frac{x^n}{n!}$ sur tout segment de $\mathbb{R}$.

3. Convergence uniforme des séries de fonctions

a. Généralités

Exemple 6.

— La suite de fonctions de terme général $f_n : x \mapsto x^n$ converge uniformément vers $x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$ sur tout segment de $]-1, 1[$ mais ne converge pas uniformément sur $]-1, 1[$.

Exercice 10.

1. Étudier la convergence uniforme de la série $\sum \frac{(-1)^n}{n+1+x^2}$ sur $\mathbb{R}$.
2. Étudier la convergence uniforme de la série $\sum \frac{x^n}{n!}$ sur $\mathbb{R}$.

b. Convergence normale des séries de fonctions

Exemple 7.

La série $\sum \dfrac{\cos(n^3 x)}{(n+1)^2}$ converge normalement sur $\mathbb{R}$.

> En effet, on a, pour $f_n : x \mapsto \dfrac{\cos(n^3 x)}{(n+1)^2}$:
>
> $$\|f_n\|_\infty = \sup_{x\in\mathbb{R}}\left(\left|\frac{\cos(n^3 x)}{(n+1)^2}\right|\right) \leq \frac{1}{(n+1)^2}$$
>
> Or d'après le critère de Riemann, $\frac{1}{(n+1)^2}$ est le terme général d'une série convergente. Ainsi, $\sum f_n$ converge normalement.

> **Méthode :** Montrer qu'une série de fonctions converge normalement
>
> Pour montrer la convergence normale de $\sum f_n$, on cherche à obtenir une majoration de $\|f_n\|_\infty$ qui tende vers 0 i.e. une majoration **indépendante de** $x \in A$ du type (à partir d'un certain rang)
>
> $$\|f_n(x)\|_F \leq u_n$$
>
> telle que $\sum u_n$ est une série numérique convergente (**et** u_n **ne dépend pas de** $x \in A$ **!!!**).

Exercice 11.

1. Étudier la convergence normale/uniforme/simple de $\sum \dfrac{e^{-nx}}{n^2}$ sur $\mathbb{R}_+$.
2. Étudier la convergence normale/uniforme/simple de $\sum_{n\geq 1} \dfrac{1}{n^2+x^2}$ puis de $\sum_{n\geq 0} \dfrac{1}{n^2+x^2}$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 12. *Fonction Zêta de Riemann*

La fonction ζ de Riemann est définie, pour $s \in]1, +\infty[$ par :

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}.$$

Justifier la définition de la fonction ζ sur $]1, +\infty[$ en étudiant la convergence simple de la série de fonctions. Que dire de la convergence uniforme de la série vers la fonction ζ ?