

Feuille d'exercices n°14

1. Exercices basiques**Exercice 1.**

Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $f_n(x) = 1 + x + \dots + x^{n-1}$.

1. Étudier la convergence simple de la suite de fonctions (f_n) . On note $f(x)$ la limite de la suite $(f_n(x))$ lorsque cette limite existe.
2. On pose, pour $x \in]-1, 1[$, $\varphi_n(x) = f(x) - f_n(x)$. Vérifier que

$$\varphi_n(x) = \frac{x^n}{1-x}.$$

3. Quelle est la limite de φ_n en 1? En déduire que la convergence n'est pas uniforme sur $] -1, 1[$.
4. Soit $a \in]0, 1[$. Démontrer que (f_n) converge uniformément vers f sur $[-a, a]$.

Exercice 2.

On pose, pour $n \geq 1$ et $x \in]0, 1]$, $f_n(x) = nx^n \ln(x)$ et $f_n(0) = 0$.

1. Démontrer que (f_n) converge simplement sur $[0, 1]$ vers une fonction f que l'on précisera. On note ensuite $g = f - f_n$.
2. Étudier les variations de g .
3. En déduire que la convergence de (f_n) vers f n'est pas uniforme sur $[0, 1]$.
4. Soit $a \in]0, 1]$. En remarquant qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $e^{-1/n} \geq a$ pour tout $n \geq n_0$, démontrer que la suite (f_n) converge uniformément vers f sur $[0, a]$.

Exercice 3.

Étudier la convergence simple et la convergence uniforme des suites de fonctions (f_n) suivantes :

1. $f_n(x) = e^{-nx} \sin(2nx)$ sur \mathbb{R}^+ puis sur $[a, +\infty[$, avec $a > 0$.
2. $f_n(x) = \frac{1}{(1+x^2)^n}$ sur \mathbb{R} , puis sur $[a, +\infty[$ avec $a > 0$.

Exercice 4.

On pose $f_n : x \mapsto ne^{-n^2x^2}$. Étudier la convergence simple de (f_n) sur \mathbb{R} . Montrer la convergence uniforme sur $[a, +\infty[$, avec $a > 0$. Étudier la convergence uniforme sur $]0, +\infty[$.

Exercice 5.

Soit (f_n) une suite de fonctions décroissantes définies sur $[0, 1]$ telle que (f_n) converge simplement vers la fonction nulle. Montrer que la convergence est en fait uniforme.

Exercice 6.

Pour $n \geq 1$ et $x \in \mathbb{R}$, on pose $u_n(x) = nx^2 e^{-x\sqrt{n}}$.

1. Démontrer que la série $\sum_n u_n$ converge simplement sur \mathbb{R}_+ .
2. Démontrer que la convergence n'est pas normale sur \mathbb{R}_+ .
3. Démontrer que la convergence est normale sur tout intervalle $[a, +\infty[$ avec $a > 0$.
4. La convergence est-elle uniforme sur \mathbb{R}_+ ?

Exercice 7.

Pour $x \geq 0$, on pose $u_n(x) = \frac{x}{n^2+x^2}$.

1. Montrer que la série $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ converge simplement sur \mathbb{R}_+ .
2. Montrer que la série $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ converge uniformément sur tout intervalle $[0, A]$, avec $A > 0$.
3. Vérifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{n}{n^2+k^2} \geq \frac{1}{5}$.
4. En déduire que la série $\sum_{n \geq 1} u_n$ ne converge pas uniformément sur \mathbb{R}_+ .
5. Montrer que la série $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n u_n$ converge uniformément sur \mathbb{R}_+ .
6. Montrer que la série $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n u_n$ converge normalement sur tout intervalle $[0, A]$, avec $A > 0$.
7. Montrer que la série $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n u_n$ ne converge pas normalement sur \mathbb{R}_+ .

Exercice 8.

On considère la série de fonctions $\sum_{n \geq 2} u_n$, avec $u_n(x) = \frac{x e^{-nx}}{\ln n}$.

1. Démontrer que $\sum_{n \geq 2} u_n$ converge simplement sur \mathbb{R}_+ .
2. Démontrer que la convergence n'est pas normale sur \mathbb{R}_+ .
3. Pour $x \in \mathbb{R}_+$, on pose $R_n(x) = \sum_{k \geq n+1} u_k(x)$. Démontrer que, pour tout $x > 0$,

$$0 \leq R_n(x) \leq \frac{x e^{-x}}{\ln(n+1)(1-e^{-x})},$$

et en déduire que la série converge uniformément sur \mathbb{R}_+ .

2. Exercices d'entraînement et d'approfondissement

Exercice 9.

Etudier la convergence simple et la convergence uniforme de la suite (f_n) de fonctions définies sur \mathbb{R}_+ par :

$$f_n(x) = \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \text{ pour } x \in [0, n], \text{ et } 0 \text{ ailleurs.}$$

Exercice 10.

Soit $g : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et bornée telle que $g(0) = 0$. On considère la suite de fonctions définie sur $[0, +\infty[$ par $f_n(x) = g(x)e^{-nx}$.

1. (a) Étudier la convergence simple de la suite.
(b) Montrer que la suite converge uniformément sur tout intervalle $[a, +\infty[$, avec $a > 0$.
(c) On fixe $\varepsilon > 0$. Montrer que l'on peut choisir $a > 0$ tel que $|f_n(x)| \leq \varepsilon$ pour tout $x \in [0, a]$ et pour tout $n \geq 1$. En déduire que la suite converge uniformément sur $[0, +\infty[$.
2. On considère la série de fonctions $\sum_{n \geq 0} g(x)e^{-nx}$.
(a) Démontrer qu'elle converge simplement sur $[0, +\infty[$ et normalement sur tout intervalle $[a, +\infty[$ avec $a > 0$.
(b) Démontrer l'équivalence entre les deux propositions suivantes :
 - i) la courbe représentative de g est tangente à l'axe des abscisses à l'origine ;
 - ii) la série de fonctions $\sum_{n \geq 0} g(x)e^{-nx}$ converge uniformément sur $[0, +\infty[$.