Mathématiques spéciales

Feuille d'exercices en groupes n°7

a. Groupe : Charles, Lina, Victor

Exercice 1.

Étudier la convergence simple et la convergence uniforme de la suite de fonctions (f_n) telle que $f_n : x \mapsto \frac{\sin nx}{n\sqrt{x}}$ sur $\mathbb{R}_+$.

Exercice 2.

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction et (P_n) une suite de fonctions polynomiales convergeant uniformément vers f.

1. Justifier qu'il existe un entier N tel que, pour tout $n \geq N$, on ait $|P_n(x) - P_N(x)| \leq 1$.
2. Que dire du polynôme $P_n - P_N$?
3. En déduire que f est nécessairement un polynôme.

b. Groupe : Hugo, Paul, Benjamin

Exercice 3.

Soit $u_n(x) = (-1)^n \ln\left(1 + \frac{x}{n(1+x)}\right)$ défini pour $x \geq 0$ et $n \geq 1$.

1. Montrer que la série $\sum_{n\geq 1} u_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$.
2. Montrer que la série $\sum_{n\geq 1} u_n$ converge uniformément sur $\mathbb{R}_+$.
3. La convergence est-elle normale sur $\mathbb{R}_+$?

Exercice 4.

Étudier la convergence simple, uniforme et normale de la série des fonctions

$$f_n(x) = \frac{(-1)^n}{n + x^2} \text{ avec } n \geq 1 \text{ et } x \in \mathbb{R}.$$

c. Groupe : Théo, Julien, Mathis

Exercice 5.

Étudier la convergence simple et la convergence uniforme de la suite de fonctions (f_n) telle que $f_n : x \mapsto (\sin x)^n \cos(x)$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 6.

On note 1_I la fonction caractéristique d'un intervalle I :

$$1_I(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in I \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Étudier la convergence simple, uniforme et normale sur $[0\,;+\infty[$ de la série des fonctions

$$u_n(x) = \frac{1}{n+1} 1_{[n;n+1[}(x).$$

d. Groupe : Raphaël, William, Omar

Exercice 7.

Étudier la convergence simple et la convergence uniforme de la suite de fonctions (f_n) telle que $f_n : x \mapsto e^{\frac{(n-1)x}{n}}$ sur $\mathbb{R}$, puis sur $]-\infty, b]$ avec $b \in \mathbb{R}$.

Exercice 8.

On introduit l'application sur $[0\,;+\infty[$

$$f_n : x \mapsto \frac{x^n \mathrm{e}^{-x}}{n!}.$$

(a) Étudier les convergences de la suite de fonctions (f_n).

(b) Étudier les convergences de la série de fonctions $\sum f_n$.