Mathématiques spéciales

Corrigé de la feuille d'exercices en groupes n°7

a. Groupe : Charles, Lina, Victor

Exercice 1.

Étudier la convergence simple et la convergence uniforme de la suite de fonctions (f_n) telle que $f_n : x \mapsto \frac{\sin nx}{n\sqrt{x}}$ sur $\mathbb{R}_+$.

Correction.

Puisque

$$|f_n(x)| \leq \frac{1}{n\sqrt{x}},$$

il est clair que la suite (f_n) converge simplement vers 0 sur $\mathbb{R}^+$. Pour étudier la convergence uniforme, remarquons que f_n s'écrit :

$$f_n(x) = \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{\sin(nx)}{\sqrt{nx}} = \frac{1}{\sqrt{n}} g(nx),$$

où $g(x) = \frac{\sin x}{\sqrt{x}}$, $g(0) = 0$. Prouvons que g est bornée : d'abord, g est continue sur $[1, +\infty[$, et elle admet une limite finie ($=0$) en $+\infty$: g est bornée sur $[1, +\infty[$. D'autre part, puisque $\sin x \sim x$, $\lim_{x \to 0} g(x) = 0$, et g est continue sur $[0, 1]$: elle y est donc bornée, et finalement g est bornée sur $\mathbb{R}^+$. Maintenant,

$$\|f_n\|_\infty = \left\| \frac{1}{\sqrt{n}} g \right\|_\infty = \frac{1}{\sqrt{n}} \|g\|_\infty \to 0,$$

ce qui prouve la convergence uniforme vers 0.

Exercice 2.

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction et (P_n) une suite de fonctions polynomiales convergeant uniformément vers f.

1. Justifier qu'il existe un entier N tel que, pour tout $n \geq N$, on ait $|P_n(x) - P_N(x)| \leq 1$.
2. Que dire du polynôme $P_n - P_N$?
3. En déduire que f est nécessairement un polynôme.

Correction.

1. Par convergence uniforme de (P_n) vers f sur $\mathbb{R}$, il existe un entier N tel que pour tout $n \geq N$, on a $\|P_n - f\|_\infty \leq 1/2$. D'après l'inégalité triangulaire, pour tout $n \geq N$, on en déduit
$$\|P_n - P_N\|_\infty \leq \|P_n - f\|_\infty + \|f - P_N\|_\infty \leq 1.$$

2. $P_n - P_N$ est un polynôme borné sur $\mathbb{R}$, il s'agit donc d'un polynôme constant.
3. On peut donc écrire, pour tout $n \geq N$, $P_n = P_N + C_n$. On a donc, par exemple pour $x = 0$,

$$P_n(0) = P_N(0) + C_n \to f(0)$$

et donc (C_n) est une suite convergente. Notons λ sa limite. Ainsi,(P_n) converge simplement (et en fait aussi uniformément) vers $P_N + \lambda$. Par unicité de la limite, $f = P_N + \lambda$ est une fonction polynomiale.

b. Groupe : Hugo, Paul, Benjamin

Exercice 3.

Soit $u_n(x) = (-1)^n \ln\left(1 + \frac{x}{n(1+x)}\right)$ défini pour $x \geq 0$ et $n \geq 1$.

1. Montrer que la série $\sum_{n\geq 1} u_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$.
2. Montrer que la série $\sum_{n\geq 1} u_n$ converge uniformément sur $\mathbb{R}_+$.
3. La convergence est-elle normale sur $\mathbb{R}_+$?

Correction.

1. On va appliquer le critère des séries alternées. Il est clair que $|u_n(x)|$ tend vers 0, reste à voir que, pour $x \geq 0$, on a $|u_{n+1}(x)| \leq |u_n(x)[$. Mais,

$$\frac{x}{(n+1)(1+x)} \leq \frac{x}{n(1+x)},$$

et on conclut par croissance de la fonction logarithme.

2. Le critère des séries alternées nous donne même une majoration du reste de la série. On a en effet

$$|R_n(x)| = \left|\sum_{k\geq n+1} u_k(x)\right| \leq |u_{n+1}(x)| \leq \frac{x}{(n+1)(1+x)} \leq \frac{1}{n+1}$$

où on a utilisé que $\ln(1+t) \leq t$ pour $t > -1$. On a majoré le reste pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ par une quantité qui ne dépend plus de x et qui tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$. C'est bien que la série converge uniformément sur $\mathbb{R}_+$.

3. On n'a même pas convergence absolue de la série à $x > 0$ fixé. Par exemple,

$$|u_n(1)| = \ln\left(1 + \frac{1}{2n}\right) \sim_{+\infty} \frac{1}{2n}.$$

La série $\sum_n |u_n(1)|$ diverge. A fortiori, il en est de même de la série $\sum_n \|u_n\|_\infty$.

Exercice 4.

Étudier la convergence simple, uniforme et normale de la série des fonctions

$$f_n(x) = \frac{(-1)^n}{n+x^2} \text{ avec } n \geq 1 \text{ et } x \in \mathbb{R}.$$

Correction.

On a $\|f_n\|_\infty = 1/n$ or $\sum 1/n$ diverge donc il n'y a pas convergence normale sur $\mathbb{R}$.

Pour $x \in \mathbb{R}$, la série numérique $\sum f_n(x)$ satisfait le critère de Leibniz, il y a donc convergence simple sur $\mathbb{R}$ et

$$\left|\sum_{n=N+1}^{+\infty} f_n(x)\right| \leq \frac{1}{N+1+x^2} \leq \frac{1}{N+1}$$

donc $\|R_N\|_\infty \leq \frac{1}{N+1} \to 0$. Il y a donc convergence uniforme sur $\mathbb{R}$.

c. Groupe : Théo, Julien, Mathis

Exercice 5.

Étudier la convergence simple et la convergence uniforme de la suite de fonctions (f_n) telle que $f_n : x \mapsto (\sin x)^n \cos(x)$ sur $\mathbb{R}$.

Correction.

Pour $x \neq \frac{\pi}{2}$ $[\pi]$, la suite $(f_n(x))$ converge vers 0 car c'est une suite géométrique de raison dans l'intervalle $]-1,1[$. Si $x = \frac{\pi}{2}$ $[\pi]$, alors la suite $(f_n(x))$ est constante égale à 0. La suite (f_n) converge donc simplement sur $\mathbb{R}$ vers la fonction nulle. Pour étudier $\|f_n\|_\infty$, il suffit par périodicité et parité de se restreindre à l'intervalle $[0,\pi]$. Mais alors, pour tout $x \in [0,\pi]$, on a

$$f_n'(x) = \sin^{n-1}(x)\big((n+1)\cos^2(x) - 1\big).$$

f_n' s'annule sur $[0,\pi]$ en $x_0 \in [0,\pi/2]$ et $x_1 \in [\pi/2,\pi]$ tel que $\cos^2(x_0) = 1/(n+1)$ et $\cos^2(x_1) = 1/(n+1)$. Ainsi, f_n est croissante sur $[0,x_0]$, décroissante sur $[x_0,x_1]$ et croissante sur $[x_1,\pi]$. Puisqu'elle s'annule en 0 et en π, on en déduit que

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x)| \leq \max\big(|f_n(x_0)|, |f_n(x_1)|\big) \leq \frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

(on a simplement majoré le sinus par 1). Le membre de droite de cette dernière inégalité tendant vers 0, on en déduit que (f_n) converge uniformément vers la fonction nulle sur $\mathbb{R}$.

Exercice 6.

On note 1_I la fonction caractéristique d'un intervalle I :

$$1_I(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in I \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Étudier la convergence simple, uniforme et normale sur $[0\,;+\infty[$ de la série des fonctions

$$u_n(x) = \frac{1}{n+1} 1_{[n;n+1[}(x).$$

Correction.

Pour tout $x \in [0\,;+\infty[$, introduisons $k = \lfloor x \rfloor$. Pour $N \geq k+1$, on a

$$\sum_{n=0}^{N} u_n(x) = \frac{1}{k+1}$$

et donc la série de fonctions converge simplement sur $[0\,;+\infty[$ vers S avec

$$S(x) = \frac{1}{k+1} \text{ pour } x \in [k\,;k+1[.$$

Pour tout $x \in [0\,;+\infty[$, on a

$$S(x) - \sum_{n=0}^{N} u_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < N+1 \\ S(x) & \text{si } x \geq N+1 \end{cases}$$

et donc

$$\left| S(x) - \sum_{n=0}^{N} u_n(x) \right| \leq \frac{1}{N+2} \xrightarrow[N \to +\infty]{} 0.$$

Il y a donc convergence uniforme sur $[0\,;+\infty[$.
Enfin, $\|u_n\|_\infty = 1/(n+1)$ n'est pas sommable, il n'y a pas convergence normale.

d. Groupe : Raphaël, William, Omar

Exercice 7.

Étudier la convergence simple et la convergence uniforme de la suite de fonctions (f_n) telle que $f_n : x \mapsto e^{\frac{(n-1)x}{n}}$ sur $\mathbb{R}$, puis sur $]-\infty, b]$ avec $b \in \mathbb{R}$.

Correction.

On a $\frac{(n-1)x}{n} \to x$ et donc, par théorème de composition des limites, $f_n(x) \to e^x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. La suite de fonctions (f_n) converge donc simplement vers e^x sur $\mathbb{R}$. La convergence n'est pas uniforme sur $\mathbb{R}$. En effet, on a On a

$$\begin{aligned}\exp(n) - f_n(n) &= \exp(n) - \exp(n-1) \\ &= \exp(n)\left(1 - \exp(-1)\right)\end{aligned}$$

et ceci tend vers $+\infty$. En revanche, on a convergence uniforme sur tout intervalle de la forme $]-\infty, b]$. En effet, fixons $b \in \mathbb{R}$ qu'on peut supposer positif, et prenons $x \in]-\infty, b]$. Alors, d'après l'inégalité des accroissements finis,

$$\begin{aligned}\left|\exp\left(\frac{(n-1)x}{n}\right) - \exp(x)\right| &\leq \left|\frac{(n-1)x}{n} - x\right| \sup_{t\in I_x} |\exp(t)| \\ &\leq \frac{|x|}{n} \sup_{t\in I_x} |\exp(t)|\end{aligned}$$

où I_x est l'intervalle $\left[\frac{(n-1)x}{n}, x\right]$ si $x > 0$, l'intervalle $\left[x, \frac{(n-1)x}{n}\right]$ si $x \leq 0$. Mais, si $x \in [0, b]$, alors

$$\frac{|x|}{n} \sup_{t\in I_x} |\exp(t)| \leq \frac{b \exp b}{n}.$$

Si $x < 0$, alors

$$\frac{|x|}{n} \sup_{t\in I_x} |\exp(t)| \leq \frac{|x| \exp(x/2)}{n}.$$

Or, il est très facile de vérifier que la fonction $x \mapsto |x| \exp(x/2)$ est majorée sur $]-\infty, 0]$. C'est en effet une fonction continue qui tend vers 0 en $-\infty$. Ainsi, il existe M tel que, pour tout $x < 0$,

$$|x| \exp(x/2) \leq M.$$

On en déduit, pour tout $x \in]-\infty, b]$,

$$\left|\exp\left(\frac{(n-1)x}{n}\right) - \exp(x)\right| \leq \frac{\max(be^b, M)}{n},$$

ce qui prouve la convergence uniforme sur $]-\infty, b]$.

Exercice 8.

On introduit l'application sur $[0\,;+\infty[$

$$f_n : x \mapsto \frac{x^n e^{-x}}{n!}.$$

(a) Étudier les convergences de la suite de fonctions (f_n).
(b) Étudier les convergences de la série de fonctions $\sum f_n$.

Correction.

(a) Par croissance comparée, la suite de fonctions (f_n) converge simplement vers la fonction nulle.
La fonction f_n est de classe $\mathcal{C}^1$ et

$$f_n'(x) = \frac{1}{n!}x^{n-1}(n-x)\mathrm{e}^{-x}.$$

On peut alors dresser le tableau de variations de f_n et affirmer

$$\sup_{x\in[a;+\infty[} \left|f_n(x)\right| = f_n(n) = \frac{n^n}{n!}\mathrm{e}^{-n}.$$

Par la formule de Stirling

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n$$

donc

$$f_n(n) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi n}}.$$

On en déduit que la suite de fonctions (f_n) converge uniformément sur $[0\,;+\infty[$.

(b) Par référence à la série exponentielle, la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ et sa somme est égale à 1.
Il ne peut y avoir convergence normale sur $[a\,;+\infty[$ car $f_n(n)$ n'est pas sommable.
En revanche sur $[0\,;a]$, il y a convergence normale car pour n assez grand de sorte que $n \geq a$, on a

$$\sup_{x\in[0;a]} \left|f_n(x)\right| = f_n(a).$$

Il y a aussi *a fortiori* convergence uniforme sur $[0\,;a]$.
Par l'absurde, s'il y a convergence uniforme sur une voisinage de $+\infty$, on obtient par le théorème de la double limite

$$\lim_{x\to+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \lim_{x\to+\infty} f_n(x)$$

ce qui donne l'absurdité $1 = 0$.
Il n'y a donc pas convergence uniforme sur $[0\,;+\infty[$.