Mathématiques spéciales

Corrigé de la feuille d'exercices n°14

1. Exercices basiques

Exercice 1.

Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $f_n(x) = 1 + x + \cdots + x^{n-1}$.

1. Étudier la convergence simple de la suite de fonctions (f_n). On note $f(x)$ la limite de la suite $(f_n(x))$ lorsque cette limite existe.
2. On pose, pour $x \in]-1,1[$, $\varphi_n(x) = f(x) - f_n(x)$. Vérifier que
$$\varphi_n(x) = \frac{x^n}{1-x}.$$
3. Quelle est la limite de φ_n en 1 ? En déduire que la convergence n'est pas uniforme sur $]-1,1[$.
4. Soit $a \in]0,1[$. Démontrer que (f_n) converge uniformément vers f sur $[-a,a]$.

Correction.

1. On a, pour $x \neq 1$,
$$f_n(x) = \frac{1-x^n}{1-x},$$
et donc la suite de réels $(f_n(x))$ converge vers le réel $f(x) = \frac{1}{1-x}$ si $x \in]-1,1[$. Elle est divergente dans les autres cas (c'est aussi vrai si $x = 1$). La suite (f_n) converge donc simplement vers f sur l'intervalle $]-1,1[$.
2. En vertu du calcul de f_n réalisé à la question précédente, on a
$$\varphi_n(x) = \frac{x^n}{1-x},$$
qui tend vers $+\infty$ si x tend vers 1. D'où $\sup_{x\in]-1,1[} |f_n(x) - f(x)| = +\infty$ et la convergence n'est pas uniforme sur $]-1,1[$.
3. On va majorer $|\varphi_n(x)|$ pour $x \in [-a,a]$. On pourrait le faire en étudiant les variations de φ_n, mais c'est en réalité inutile ici. En effet, on peut remarquer que si $x \in [-a,a]$, on a $|x^n| \leq a^n$ et $|1-x| \geq 1-a$. On en déduit que, pour tout $x \in [-a,a]$, on a
$$|\varphi_n(x)| \leq \frac{a^n}{1-a}$$
et le membre de droite de cette inégalité tend vers 0. On en déduit que (f_n) converge uniformément vers f sur $[-a,a]$.

Exercice 2.

On pose, pour $n \geq 1$ et $x \in]0,1]$, $f_n(x) = nx^n \ln(x)$ et $f_n(0) = 0$.

1. Démontrer que (f_n) converge simplement sur $[0,1]$ vers une fonction f que l'on précisera. On note ensuite $g = f - f_n$.
2. Étudier les variations de g.
3. En déduire que la convergence de (f_n) vers f n'est pas uniforme sur $[0,1]$.
4. Soit $a \in]0,1]$. En remarquant qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $e^{-1/n} \geq a$ pour tout $n \geq n_0$, démontrer que la suite (f_n) converge uniformément vers f sur $[0,a]$.

Correction.

1. Montrons que (f_n) converge simplement vers la fonction nulle sur $[0,1]$:
   — Si $x = 0$ ou $x = 1$, $(f_n(x))$ est la suite constante égale à 0.
   — Si $x \in]0,1[$, alors $(f_n(x))$ tend vers 0 par comparaison d'une suite polynomiale et d'une suite géométrique de raison dans l'intervalle $]0,1[$. Remarquons que $\ln x$ ne joue aucun rôle dans cette étude.
2. On a pour tout $x \in]0,1]$,
$$g'(x) = -nx^{n-1}(n \ln x + 1).$$
La dérivée s'annule en $e^{-1/n}$ et la fonction g est croissante sur $]0, e^{-1/n}[$ puis décroissante sur $]e^{-1/n}, 1[$.
3. On déduit de la question précédente que
$$\sup_{x \in [0,1]} |f(x) - f_n(x)| = |(f - f_n)(e^{-1/n})| = e^{-1}.$$
La convergence n'est donc pas uniforme sur l'intervalle $[0,1]$.
4. La suite $(e^{-1/n})$ tend vers 1 lorsque n tend vers l'infini. Il existe donc n_0 tel que, pour tout $n \geq n_0$, on a $e^{-1/n} \geq a$. Ainsi, pour $n \geq n_0$, la fonction g est monotone croissante sur $[0,a]$. Puisqu'elle s'annule en 0, on en déduit que pour tout $x \in [0,a]$ et tout $n \geq n_0$, on a
$$|f(x) - f_n(x)| \leq |f(a) - f_n(a)| = na^n |\ln a|.$$
Le membre de droite de cette dernière inégalité tend vers 0. On en déduit que (f_n) converge uniformément vers la fonction nulle sur $[0,a]$.

Exercice 3.

Étudier la convergence simple et la convergence uniforme des suites de fonctions (f_n) suivantes :

1. $f_n(x) = e^{-nx} \sin(2nx)$ sur $\mathbb{R}^+$ puis sur $[a, +\infty[$, avec $a > 0$.
2. $f_n(x) = \frac{1}{(1+x^2)^n}$ sur $\mathbb{R}$, puis sur $[a, +\infty[$ avec $a > 0$.

Correction.

1. L'inégalité $|f_n(x)| \leq e^{-nx}$ prouve que f_n converge simplement vers la fonction nulle. Posons

$g(x) = e^{-x}\sin(2x)$. On a $f_n(x) = g(nx)$, et donc la suite

$$\|f_n\|_\infty = \|g\|_\infty > 0$$

vaut une constante strictement positive, elle ne peut pas tendre vers 0 quand $n \to +\infty$: la convergence n'est pas uniforme sur $\mathbb{R}^+$. En revanche, si $a > 0$ et $x \geq a$, on a :

$$|f_n(x)| \leq e^{-na},$$

ce qui prouve la convergence uniforme sur $[a, +\infty[$.

2. Si $x \neq 0$, $(f_n(x))$ tend vers 0 (c'est une suite géométrique de raison dans l'intervalle $]0,1[$), et si $x = 0$, alors la suite $(f_n(x))$ est constante égale à 1. La suite de fonctions (f_n) converge donc simplement vers la fonction f égale à 1 en 0 et égale à 0 partout ailleurs. La convergence ne peut pas être uniforme sur $\mathbb{R}$ car chaque fonction f_n est continue sur $\mathbb{R}$ et la fonction limite ne l'est pas en 0. En revanche, la convergence est uniforme sur les intervalles du type $[a, +\infty[$ avec $a > 0$, puisque pour tout $x \geq a$, on a

$$|f_n(x) - f(x)| = \frac{1}{(1+x^2)^n} \leq \frac{1}{(1+a^2)^n}$$

et le dernier terme de cette inégalité (qui ne dépend plus de $x \in [a, +\infty[$), tend vers 0.

Exercice 4.

On pose $f_n : x \mapsto ne^{-n^2x^2}$. Étudier la convergence simple de (f_n) sur $\mathbb{R}$. Montrer la convergence uniforme sur $[a, +\infty[$, avec $a > 0$. Étudier la convergence uniforme sur $]0, +\infty[$.

Correction.

Les fonctions f_n sont paires, on peut restreindre l'étude à $[0, +\infty[$. $f_n(0) = n$ et donc $(f_n(0))$ diverge. Pour $x > 0$, la comparaison des fonctions puissance et exponentielle fait que $(ne^{-n^2x^2})$ tend vers 0. Donc la suite (f_n) converge simplement vers la fonction nulle sur $\mathbb{R}\backslash\{0\}$. Passons à l'étude de la convergence uniforme. Sur $[a, +\infty[$, les fonctions (f_n) sont positives et décroissantes. On a donc

$$\sup_{x\in[a,+\infty[} |f_n(x) - 0| \leq f_n(a)$$

et comme $(f_n(a))$ tend vers 0, il en est de même de $(\sup_{x\in[a,+\infty[} |f_n(x) - 0|)_n$. La convergence est donc uniforme sur $[a, +\infty[$. Sur $]0, +\infty[$, on a

$$\sup_{x\in]0,+\infty[} |f_n(x)| \geq f_n(1/n) = ne^{-1} \to +\infty.$$

La convergence n'est donc pas uniforme sur $]0, +\infty[$.

Exercice 5.

Soit (f_n) une suite de fonctions décroissantes définies sur $[0, 1]$ telle que (f_n) converge simplement vers la fonction nulle. Montrer que la convergence est en fait uniforme.

Correction.

Prenons $x \in [0,1]$. Puisque f_n est décroissante,

$$f_n(1) \leq f_n(x) \leq f_n(0).$$

Il vient

$$\|f_n\|_\infty \leq \max(|f_n(0)|, |f_n(1)|).$$

Le terme de droite tend vers 0, et donc (f_n) converge uniformément sur $[0,1]$ vers la fonction nulle.

Exercice 6.

Pour $n \geq 1$ et $x \in \mathbb{R}$, on pose $u_n(x) = nx^2 e^{-x\sqrt{n}}$.

1. Démontrer que la série $\sum_n u_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$.
2. Démontrer que la convergence n'est pas normale sur $\mathbb{R}_+$.
3. Démontrer que la convergence est normale sur tout intervalle $[a, +\infty[$ avec $a > 0$.
4. La convergence est-elle uniforme sur $\mathbb{R}_+$?

Correction.

1. Soit $x \geq 0$ fixé. Alors $n^2 u_n(x) = x^2 e^{-x\sqrt{n}+3\ln n}$ tend vers 0. Par comparaison à une série de Riemann convergente, la série $\sum_n u_n(x)$ est convergente.
2. On va calculer $\sup_{x\in\mathbb{R}} |u_n(x)|$. On remarque d'abord que u_n est une fonction positive. De plus, elle est dérivable et sa dérivée vaut
$$u_n'(x) = n(2x - x^2\sqrt{n})e^{-x\sqrt{n}} = nx(2 - x\sqrt{n})e^{-x\sqrt{n}}.$$
On en déduit que u_n est croissante sur l'intervalle $[0, 2/\sqrt{n}]$ et décroissante sur l'intervalle $[2/\sqrt{n}, +\infty[$. On a donc
$$\|u_n\|_\infty = u_n(2/\sqrt{n}) = 4e^{-2}.$$
C'est le terme général d'une série (grossièrement) divergente, et donc la convergence n'est pas normale sur $\mathbb{R}_+$.
3. Pour $n \geq \frac{4}{a^2}$, on a $a \geq 2/\sqrt{n}$ et donc la fonction u_n est décroissante sur $[a, +\infty[$. On en déduit que, pour tout $x \geq a$, on a
$$|u_n(x)| \leq u_n(a).$$
Le membre de droite est le terme général d'une série numérique (il ne dépend plus de x) convergente : ceci prouve la convergence normale de la série $\sum_n u_n$ sur $[a, +\infty[$. Remarquons que le fait que l'inégalité ne soit vraie qu'à partir d'un certain rang (qui est indépendant de $x \in [a, +\infty[$) ne change rien à la convergence normale.
4. Notons R_n le reste d'ordre n de la série. Puisque $u_k \geq 0$ pour tout k, on a
$$R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k(x) \geq u_{n+1}(x).$$
D'après le résultat de la question 2.,
$$\|R_n\|_\infty \geq \|u_{n+1}\|_\infty = 4e^{-2}.$$
Ceci ne tend pas vers 0 et donc la convergence n'est pas uniforme sur $\mathbb{R}_+$.

Exercice 7.

Pour $x \geq 0$, on pose $u_n(x) = \frac{x}{n^2+x^2}$.

1. Montrer que la série $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$.
2. Montrer que la série $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ converge uniformémement sur tout intervalle $[0, A]$, avec $A > 0$.
3. Vérifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{n}{n^2+k^2} \geq \frac{1}{5}$.
4. En déduire que la série $\sum_{n\geq 1} u_n$ ne converge pas uniformément sur $\mathbb{R}_+$.
5. Montrer que la série $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n u_n$ converge uniformément sur $\mathbb{R}_+$.
6. Montrer que la série $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n u_n$ converge normalement sur tout intervalle $[0, A]$, avec $A > 0$.
7. Montrer que la série $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n u_n$ ne converge pas normalement sur $\mathbb{R}_+$.

Correction.

1. Il est très facile de prouver la convergence simple sur $\mathbb{R}_+$. Pour $x = 0$, on a en effet $u_n(0) = 0$, qui est bien le terme général d'une série convergente. Pour $x > 0$, on a $u_n(x) \sim_{n\to+\infty} \frac{x}{n^2}$, qui est aussi le terme général d'une série convergente.
2. On va prouver la convergence normale. On a en effet, pour tout $x \in [0, A]$,
$$|u_n(x)| \leq \frac{A}{n^2},$$
terme général d'une série convergente.
3. Il suffit d'écrire que, pour $n + 1 \leq k \leq 2n$, on a $n^2 + k^2 \leq 5n^2$, et donc $\frac{n}{n^2+k^2} \geq \frac{1}{5n}$. On obtient finalement
$$\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{n}{n^2 + k^2} \geq n \times \frac{1}{5n} = \frac{1}{5}.$$
4. Il est plus difficile de prouver la non-convergence uniforme. On peut procéder de la façon suivante. Supposons que la convergence est uniforme. Alors, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier N tel que, pour tout $n \geq N$, et tout $x \in \mathbb{R}_+$, on ait
$$\left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k(x)\right| \leq \varepsilon.$$
Mais alors, d'après l'inégalité triangulaire, pour tout $n \geq N$, on a
$$\left|\sum_{k=n+1}^{2n} u_k(x)\right| = \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k(x) - \sum_{k=2n+1}^{+\infty} u_k(x)\right| \leq \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k(x)\right| + \left|\sum_{k=2n+1}^{+\infty} u_k(x)\right| \leq 2\varepsilon.$$
En particulier, pour $n = N$ et $x = N$, on a la double inégalité
$$\frac{1}{5} \leq \left|\sum_{k=N+1}^{2N} u_k(N)\right| \leq 2\varepsilon.$$
Bien sûr, si on a choisi $2\varepsilon < 1/5$, c'est impossible.

5. Nous allons prouver la convergence uniforme en utilisant le critère des séries alternées. En effet, à x fixé, la suite $(u_n(x))$ est positive, décroissante et tend vers 0. La série $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n u_n(x)$ est donc convergente, et on a la majoration du reste :

$$\left|\sum_{k=n}^{+\infty}(-1)^n u_n(x)\right| \leq u_n(x) = \frac{x}{n^2+x^2}.$$

Reste à majorer le membre de droite de l'équation précédente par un terme qui tend vers 0 et ne dépend pas de x. Mais on a

$$\frac{x}{n^2+x^2} \leq \frac{\sqrt{x^2+n^2}}{n^2+x^2} \leq \frac{1}{\sqrt{x^2+n^2}} \leq \frac{1}{n}.$$

On a donc bien convergence uniforme sur $\mathbb{R}_+$.

6. Puisque $|(-1)^n u_n(x)| = |u_n(x)|$, la convergence normale sur $[0, A]$ se démontre comme ci-dessus.
7. D'autre part, si on avait convergence normale sur $\mathbb{R}_+$, alors on aurait aussi convergence normale de la série $\sum_n u_n(x)$ sur $\mathbb{R}_+$, donc convergence uniforme de cette même série, ce qui n'est pas le cas d'après la première question.

Exercice 8.

On considère la série de fonctions $\sum_{n\geq 2} u_n$, avec $u_n(x) = \frac{xe^{-nx}}{\ln n}$.

1. Démontrer que $\sum_{n\geq 2} u_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$.
2. Démontrer que la convergence n'est pas normale sur $\mathbb{R}_+$.
3. Pour $x \in \mathbb{R}_+$, on pose $R_n(x) = \sum_{k\geq n+1} u_k(x)$. Démontrer que, pour tout $x > 0$,

$$0 \leq R_n(x) \leq \frac{xe^{-x}}{\ln(n+1)(1-e^{-x})},$$

et en déduire que la série converge uniformément sur $\mathbb{R}_+$.

Correction.

1. Pour $x = 0$, la série converge car $u_n(0) = 0$. Pour $x > 0$ fixé, on a

$$u_n(x) = o\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

et donc la série $\sum_n u_n(x)$ converge.

2. Une étude rapide de u_n montre qu'elle atteint son maximum en $1/n$. On a donc

$$\sum_{n\geq 2} \|u_n\|_\infty = \sum_{n\geq 2} u_n(1/n) = \sum_{n\geq 2} \frac{e^{-1}}{n \ln n}.$$

Il est bien connu que cette dernière série est divergente, et donc la convergence n'est pas normale.

3. On va utiliser la somme d'une série géométrique. En effet, pour $x > 0$, on a $e^{-kx} = (e^{-x})^k$ et $0 < e^{-x} < 1$. De plus, pour $k \geq n+1$, on a

$$0 \leq u_k(x) \leq \frac{x(e^{-x})^k}{\ln(n+1)}.$$

On en déduit que

$$0 \leq R_n(x) \leq \frac{x}{\ln(n+1)} \times \frac{e^{-(n+1)x}}{1-e^{-x}} \leq \frac{1}{\ln(n+1)} \times \frac{xe^{-x}}{1-e^{-x}}.$$

Or, il est facile de vérifier que la fonction $x \mapsto \frac{xe^{-x}}{1-e^{-x}}$ est bornée sur $\mathbb{R}_+$. On peut étudier cette fonction ou remarquer que

— Elle se prolonge par continuité en 0 : en effet

$$\frac{xe^{-x}}{1-e^{-x}} = \frac{x+o(x)}{x+o(x)} \to 1.$$

— La fonction est donc bornée sur tout intervalle du type $[0, A]$.

— La fonction tend vers 0 en $+\infty$, on sait donc que sa valeur absolue est majorée par 1 sur un certain intervalle $[A, +\infty[$.

On peut aussi écrire

$$\frac{xe^{-x}}{1-e^{-x}} = \frac{x}{e^x - 1} \leq 1$$

puisque par convexité de la fonction exponentielle, $e^x - 1 \geq x$. Soit M un majorant de la fonction $x \mapsto \frac{xe^{-x}}{1-e^{-x}}$. On a donc, pour tout $x \geq 0$ (l'inégalité est aussi valable pour $x = 0$ car $R_n(0) = 0$) :

$$|R_n(x)| \leq \frac{M}{\ln(n+1)}.$$

On a majoré le reste par quelque chose qui ne dépend pas de $x \in \mathbb{R}_+$ et qui tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$. C'est bien que la série converge uniformément sur $\mathbb{R}_+$.

2. Exercices d'entraînement et d'approfondissement

Exercice 9.

Etudier la convergence simple et la convergence uniforme de la suite (f_n) de fonctions définies sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$f_n(x) = \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \text{ pour } x \in [0, n], \text{ et 0 ailleurs.}$$

Correction.

Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Il existe un n_0 tel que pour $n \geq n_0$, $f_n(x) = \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n = \exp\left(n \ln\left(1 - \frac{x}{n}\right)\right)$. Maintenant,

$$\ln\left(1 - \frac{x}{n}\right) = -\frac{x}{n} + o\left(\frac{x}{n}\right).$$

On a donc
$$f_n(x) = e^{-x+o(x)},$$
ce qui prouve que (f_n) converge simplement vers la fonction $f(x) = e^{-x}$. On pose alors $\varphi_n(x) = f_n(x) - f(x)$. φ_n est dérivable sur $[0, n]$, et sa dérivée vaut :
$$\varphi_n'(x) = -\left(1 - \frac{x}{n}\right)^{n-1} + e^{-x}.$$
Malheureusement, cette fonction n'est pas très facile non plus à étudier. On note x_0 un point où la dérivée s'annule. Essayons de majorer $|\varphi_n(x_0)|$:
$$\begin{aligned}\varphi_n(x_0) &= \left(1-\frac{x_0}{n}\right)^n - e^{-x_0}\\ &= \left(1-\frac{x_0}{n}\right)\left(1-\frac{x_0}{n}\right)^{n-1} - e^{-x_0}\\ &= -e^{-x_0}\frac{x_0}{n}.\end{aligned}$$
Posons $g_n(x) = e^{-x}\frac{x}{n}$. Sur $[0, n]$, la borne supérieure de $|\varphi_n(x)|$ est atteinte ou a une borne de l'intervalle, ou en un point où la dérivée s'annule. Sur $[n, +\infty[$, on constate facilement que c'est en n. On a donc :
$$\|\varphi_n\|_\infty \leq \max\left(e^{-n}, \max_{x\in[0,n]} |g_n(x)|\right).$$
On s'est donc ramené à l'étude d'une fonction plus facile à manipuler. En effet,
$$g_n'(x) = 0 \iff \frac{e^{-x}}{n}(1-x) = 0 \iff x = 1.$$
Ceci prouve que
$$\sup_{x\in[0,n]} |g_n(x)| \leq \max\left(e^{-n}, \frac{e^{-1}}{n}\right).$$
Bref, on a :
$$\|\varphi_n\|_\infty \leq \frac{1}{en}.$$
La suite (f_n) converge uniformément sur $\mathbb{R}_+$ vers f.

Exercice 10.

Soit $g : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue et bornée telle que $g(0) = 0$. On considère la suite de fonctions définie sur $[0, +\infty[$ par $f_n(x) = g(x)e^{-nx}$.

1. (a) Étudier la convergence simple de la suite.
   (b) Montrer que la suite converge uniformément sur tout intervalle $[a, +\infty[$, avec $a > 0$.
   (c) On fixe $\varepsilon > 0$. Montrer que l'on peut choisir $a > 0$ tel que $|f_n(x)| \leq \varepsilon$ pour tout $x \in [0, a]$ et pour tout $n \geq 1$. En déduire que la suite converge uniformément sur $[0, +\infty[$.
2. On considère la série de fonctions $\sum_{n\geq 0} g(x)e^{-nx}$.
   (a) Démontrer qu'elle converge simplement sur $[0, +\infty[$ et normalement sur tout intervalle $[a, +\infty[$ avec $a > 0$.

(b) Démontrer l'équivalence entre les deux propositions suivantes :

i) la courbe représentative de g est tangente à l'axe des abscisses à l'origine ;

ii) la série de fonctions $\sum_{n\geq 0} g(x)e^{-nx}$ converge uniformément sur $[0,+\infty[$.

Correction.

1. (a) Pour 0, $f_n(0)=0$ et la suite converge. Pour $x>0$, la suite $(g(x)e^{-nx})$ tend vers 0. La suite de fonctions (f_n) converge donc simplement vers 0.

   (b) Notons M un majorant de $|g|$. Pour $x>a$, on a $|f_n(x)|\leq Me^{-nx}\leq Me^{-na}$, suite qui tend vers 0 indépendamment de x. Ceci prouve la convergence uniforme sur $[a,+\infty[$.

   (c) Par continuité de g en 0, et puisque $g(0)=0$, il existe $a>0$ tel que $|g(x)|\leq\varepsilon$ pour $x\in[0,a]$. Il vient $|f_n(x)|\leq\varepsilon$ pour tout $x\in[0,a]$. De plus, ce a étant fixé, la suite (f_n) converge uniformément vers 0 sur $[a,+\infty[$. On peut donc trouver N tel que, pour $n\geq N$, $|f_n(x)|\leq\varepsilon$. Résumons. Pour tout $\varepsilon>0$, on peut trouver $N\in\mathbb{N}$ tel que, pour tout $n\geq N$, on a
$$|f_n(x)|\leq\varepsilon$$
(le a n'apparait plus, il sert uniquement dans la preuve.) C'est bien que la suite (f_n) converge uniformément vers 0 sur $\mathbb{R}_+$.

2. (a) L'étude se fait suivant le même principe. Pour $x=0$, le terme général est nul, et pour $x>0$, il s'agit du terme général d'une suite géométrique de raison de module inférieur strict à 1. On a bien convergence de $\sum_n f_n(x)$. De plus, si $x\in[a,+\infty[$, on a
$$|f_n(x)|\leq Me^{-na},$$
qui est le terme général d'une série numérique convergente. C'est bien que la série converge normalement sur $[a,+\infty[$.

   (b) Considérons le reste de rang n de la série : pour $x>0$,
$$R_n(x)=\sum_{k\geq n+1}f_k(x)=\frac{g(x)}{1-e^{-x}}e^{-(n+1)x}.$$
Si la courbe représentative de g est tangente à l'axe des abscisses à l'origine, c'est que $g(x)/x$ tend vers 0. Posons alors pour $x>0$ $g_1(x)=\frac{g(x)}{1-e^{-x}}$. Puisque $1-e^{-x}\sim_0 x$, on peut prolonger g_1 par continuité en 0 en posant $g(0)=0$. Ceci définit une fonction bornée sur $\mathbb{R}_+$ et continue en 0. On se retrouve dans la situation de la question (1), et on a bien convergence uniforme du reste vers 0 sur $\mathbb{R}_+$, ou encore convergence uniforme de la série sur cet intervalle. Réciproquement supposons que $g(x)/x$ ne tend pas vers 0. Alors, g_1 non plus ne tend pas vers 0 en 0 et donc il existe $\varepsilon>0$ tel que
$$\forall\eta>0,\ \exists x\in]0,\eta[\text{ tel que }|g_1(x)|>\varepsilon.$$
En prenant des nombres η de la forme $\eta=1/n$, on obtient pour chaque $n\geq 0$ un réel x_n tel que
$$0<x_n<\frac{1}{n}\text{ et }|g_1(x_n)|>\varepsilon.$$
Mais alors,
$$R_n(x_n)\geq\varepsilon e^{-(n+1)x_n}\geq\varepsilon e^{-(n+1)/n}\geq e^{-1}\varepsilon/2$$
dès que n est assez grand. Ceci nie la convergence uniforme sur $\mathbb{R}_+$.