

Chapitre I

Divisibilité et Congruences

Table des matières

Partie A : Divisibilité dans \mathbb{Z}	2
1. Définitions	2
2. Propriétés	4
3. Activité : les règles simples de divisibilité	5
4. Exercices types	6
Partie B : Division euclidienne	9
1. La division euclidienne	9
2. Exercices types	11
Partie C : Congruences	12
1. Activité d'introduction	12
2. Définitions et exemples	12
3. Propriétés	13
4. Exercices types	15

Partie A

Divisibilité dans \mathbb{Z}

Activité d'introduction :

On dispose 100 lampes, éteintes à l'état initial, numérotées de 1 à 100 et munies d'interrupteurs.

- 1ère étape : on appuie sur tous les interrupteurs (ainsi toutes les lampes sont allumées).
- 2ème étape : on n'appuie que sur les interrupteurs dont le numéro est un multiple de 2.
- 3ème étape : on n'appuie que sur les interrupteurs dont le numéro est un multiple de 3.
- etc...

1. Donner l'état de la lampe n°2 lors des 6 premières étapes puis son état à la 100ème étape. Recommencer pour les lampes 3, 4, 5, 6,
2. Déterminer l'état final des lampes 12, 16, 25, 40 et 81.
3. Émettre une conjecture sur les lampes qui restent allumées après 100 étapes puis la démontrer.

1. Définitions

Définition 1. *Diviseur - Multiple*

Soit a et b deux entiers relatifs. On dit que a est **multiple** de b s'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que

$$a = kb.$$

Dans ce cas, on dira également que b est un **diviseur** de a ou même que b **divise** a .

Exemple 1.

- -84 est un multiple de -28 . En effet, $-84 = 3 \times -28$.
- 2 divise tous les nombres pairs.
- 1 et -1 divisent tous les nombres entiers relatifs.
- 0 est multiple de tous les nombres entiers relatifs. Par contre, il ne divise que lui-même.

Exercice 1.

1. Donner tous les diviseurs de 24.
2. Montrer que la somme de trois entiers relatifs consécutifs est divisible par 3. La somme de 2 entiers consécutifs est-elle divisible par 2 ?

Correction.

1. Les diviseurs de 24 sont :

$$-24, -12, -6, -4, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 4, 6, 12, 24.$$

2. Soit $n \in \mathbb{Z}$. Montrons que la somme S de n , de $n + 1$ et de $n + 2$ est divisible par 3.

On a :

$$S = n + (n + 1) + (n + 2) = n + n + n + 1 + 2 = 3n + 3 = 3(n + 1).$$

Ainsi, il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $S = k \times 3$ (ici, $k = n + 1$). Il en résulte que la somme de trois entiers consécutifs $S = n + (n + 1) + (n + 2)$ est divisible par 3.

Par contre, la somme de 2 entiers consécutifs n'est pas divisible par 2. En effet, on a par exemple $1 + 2 = 3$ qui n'est pas divisible par 2.

Notation 1.

Soit n un entier relatif. On note

$$n\mathbb{Z} = \{\dots - 3n, -2n, -n, 0, n, 2n, 3n, \dots\} = \{nk \mid k \in \mathbb{Z}\},$$

l'ensemble des multiples de n .

Par exemple, $4\mathbb{Z} = \{\dots, -12, -8, -4, 0, 4, 8, 12, \dots\}$

Exercice 2.

1. Comment appelle-t-on d'habitude l'ensemble $2\mathbb{Z}$?
2. Déterminer l'ensemble $-2\mathbb{Z}$, l'ensemble $1\mathbb{Z}$ puis l'ensemble $0\mathbb{Z}$.
3. Montrer que $12\mathbb{Z} \subset 4\mathbb{Z}$.
4. (*) Soit $n, m \in \mathbb{Z}$. Montrer que m divise n si, et seulement si, $n\mathbb{Z} \subset m\mathbb{Z}$.

Correction.

1. $2\mathbb{Z} = \{2k \mid k \in \mathbb{Z}\} = \{\dots, -8, -6, -4, -2, 0, 2, 4, 6, 8, \dots\}$ est connu sous le nom d'ensemble des nombres pairs.

2. — $-2\mathbb{Z} = 2\mathbb{Z}$;
— $1\mathbb{Z} = \mathbb{Z}$;
— $0\mathbb{Z} = \{0\}$.

3. Soit $p \in 12\mathbb{Z}$. Alors, p est un multiple de 12 i.e. il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $p = 12k$.
Or on a :

$$p = 12k = (4 \times 3)k = 4 \times \underbrace{3k}_{\in \mathbb{Z}};$$

donc p est un multiple de 4 - i.e. il existe $k' \in \mathbb{Z}$ tel que $p = 4k'$ (ici $k' = 3k$).
Il en résulte que p appartient à $4\mathbb{Z}$.

Ceci étant vrai quelque soit $p \in 12\mathbb{Z}$, on en déduit que $12\mathbb{Z} \subset 4\mathbb{Z}$.

4. Soit $n, m \in \mathbb{Z}$. Ici, on cherche à montrer une équivalence ("si, set seulement, si" = \Leftrightarrow) : on doit donc montrer deux implications :

— (\Rightarrow) : Si m divise n , alors $n\mathbb{Z} \subset m\mathbb{Z}$.

On suppose que m divise n . Montrons que $n\mathbb{Z} \subset m\mathbb{Z}$.

Soit $p \in n\mathbb{Z}$. Alors il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $p = nk$. Or, par hypothèse, m divise n . Alors il existe $k' \in \mathbb{Z}$ tel que $n = mk'$. Par suite, on a :

$$p = nk = (mk')k = m \underbrace{(k'k)}_{\in \mathbb{Z}}.$$

Par suite, il existe $k'' \in \mathbb{Z}$ tel que $p = mk''$. Donc $p \in m\mathbb{Z}$.

Il en résulte que $n\mathbb{Z} \subset m\mathbb{Z}$.

— (\Leftarrow) : Si $n\mathbb{Z} \subset m\mathbb{Z}$, alors m divise n .

On suppose que $n\mathbb{Z} \subset m\mathbb{Z}$. Montrons que m divise n .

Comme $n \in n\mathbb{Z}$ et $n\mathbb{Z} \subset m\mathbb{Z}$, alors $n \in m\mathbb{Z}$. Par suite, il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $n = mk$.

Il en résulte que m divise n .

On a montré les deux implications de l'équivalence, et ainsi, on a montré que m divise n si, et seulement si, $n\mathbb{Z} \subset m\mathbb{Z}$.

2. Propriétés

Proposition 1.

Soit a, b des entiers relatifs.

- Si b divise a et $a \neq 0$, alors $|b| \leq |a|$.
- Si b divise a et a divise b , alors $a = b$ ou $a = -b$.

Démonstration.

Soit $a, b \in \mathbb{Z}$.

- On suppose que b divise a et $a \neq 0$. Montrons que $|b| \leq |a|$.

Comme b divise a , il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $a = bk$. Or $a \neq 0$, donc $k \neq 0$. Ainsi, $|k| \geq 1$ d'où :

$$|a| = |bk| = |b| \cdot \underbrace{|k|}_{\geq 1} \geq |b|.$$

bu On suppose que b divise a et a divise b . Montrons que $a = \pm b$.

D'après la propriété précédente, comme b divise a , alors $|b| \leq |a|$. De même, comme a divise b , alors $|a| \leq |b|$. Par suite,

$$|a| = |b|.$$

Il en résulte que $a = b$ ou $a = -b$.

□

Théorème 1. Transitivité

Soit a, b, c des entiers relatifs. Si c divise b et b divise a , alors c divise a .

Démonstration.

Soit $a, b, c \in \mathbb{Z}$. On suppose que c divise b et b divise a . Montrons que c divise a .
Comme c divise b , alors il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $b = kc$ et comme b divise a , alors il existe $k' \in \mathbb{Z}$ tel que $a = k'b$. Par suite, on a :

$$a = k'b = k'(kc) = \underbrace{k'k}_{\in \mathbb{Z}} c.$$

Il en résulte que c divise a . □

Théorème 2. Combinaison linéaire

Soit a, b et d des entiers relatifs. Si d divise a et d divise b , alors, pour tous $u, v \in \mathbb{Z}$, d divise $ua + vb$.

En particulier, si d divise a et b , d divise $a + b$ et $a - b$.

Correction.

Soit $a, b, d \in \mathbb{Z}$. On suppose que d divise a et d divise b . Montrons que, pour tous $u, v \in \mathbb{Z}$, d divise $ua + vb$.

Soit $u, v \in \mathbb{Z}$. Comme d divise a , alors il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $a = kd$ et comme d divise b , alors il existe $k' \in \mathbb{Z}$ tel que $b = k'd$. Par suite, on a :

$$ua + vb = u(kd) + v(k'd) = \underbrace{(uk + vk')}_{\in \mathbb{Z}} d.$$

Il en résulte que d divise $ua + vb$.

3. Activité : les règles simples de divisibilité

Nous prouverons les résultats de l'exercice suivant dans la partie consacrée aux congruences.

Exercice 3.

Donner, sans démonstration, les règles générales qui permettent de savoir si un nombre entier relatif est divisible par :

1. le nombre 2 ;
2. le nombre 5 ;
3. les nombres 10, 100, ... , 10^n où $n \in \mathbb{N}$;
4. le nombre 3 ;
5. le nombre 9 ;
6. pour des entiers de 2 ou 3 chiffres, le nombre 11.

Correction.

1. Tout nombre entier relatif finissant par 0, 2, 4, 6 ou 8 est divisible par 2.
2. Tout nombre entier relatif finissant par 0 ou 5 est divisible par 5.
3. Tout nombre entier relatif finissant par n zéros est divisible par 10^n .
4. Tout nombre entier relatif dont les sommes successives des chiffres aboutissent à 3, 6 ou 9 est divisible par 3.
5. Tout nombre entier relatif dont les sommes successives des chiffres aboutissent à 9 est divisible par 9.
6. Tout nombre entier relatif de deux chiffres égaux est divisible par 11 et tout nombre entier relatif de trois chiffres dont la somme des deux chiffres extrêmes est égal au chiffre central est divisible par 11.

4. Exercices types

Voici quelques exercices classiques de divisibilité :

Exercice 4. Couple d'entiers satisfaisant une équation

On considère l'équation d'inconnues x et y :

$$x^2 = 15 + 2xy.$$

Existe-t-il des couples (x, y) d'entiers naturels qui sont solutions de l'équation précédente ?

Le principe est de résolution de ce genre d'exercices est le suivant :

- On transforme l'équation de telle sorte qu'on puisse trouver :
 - dans le membre de gauche, tous les termes faisant apparaître x et y ;
 - dans le membre de droite, tous les termes constants - dans ces exercices, il s'agira obligatoirement d'un **nombre entier**.
- On factorise le membre de gauche (celui avec les x et y de telle sorte qu'on puisse faire apparaître 2 facteurs (ou plus). les inconnues x et y étant supposées entières, les facteurs précédents le sont aussi. Ce sont donc des diviseurs de l'entier présent dans le membre de droite.
- On établit la liste des diviseurs du membre de droite et on réunit ceux dont le produit est égal au membre de droite.
- Finalement, on fait correspondre les facteurs du membre de gauche avec chaque réunion de diviseurs et on résout les systèmes obtenus.

Correction.

L'équation $x^2 = 15 + 2xy$ est équivalente à :

$$x^2 - 2xy = 15 \quad \Leftrightarrow \quad x(x - 2y) = 15$$

Les diviseurs dans \mathbb{N} de 15 sont 1, 3, 5 et 15. Les décompositions de 15 en produits de deux

facteurs entiers sont donc :

$$15 \times 1 \text{ ou } 1 \times 15 \text{ ou } 5 \times 3 \text{ ou } 3 \times 5.$$

On remarque de plus, que comme x, y sont positifs, $x \geq x - 2y$ donc les seules décompositions possibles de la forme $x(x - 2y)$ sont :

$$\begin{cases} x & = 15 \\ x - 2y & = 1 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x & = 5 \\ x - 2y & = 3 \end{cases}$$

On en déduit :

$$\begin{cases} x & = 15 \\ y & = 7 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x & = 5 \\ y & = 1 \end{cases}$$

Ainsi, les seuls couples (x, y) d'entiers naturels solutions de $x^2 = 15 + 2xy$ sont $(15, 7)$ et $(5, 1)$.

Exercices du livre : Exercice 4 p14, Exercice 48 p29

Exercice 5.

Déterminer tous les nombres entiers relatifs n tels que $3n + 2$ divise $4n + 1$.

Le principe est de résolution de ce genre d'exercices est le suivant :

- On cherche une combinaison linéaire des deux termes de l'énoncé qui élimine la variable n recherchée ;
- On utilise le théorème 2 sur les combinaisons linéaires pour obtenir une relation de divisibilité avec un nombre entier relatif simple.
- On établit la liste des diviseurs de cet entier, et on vérifie, pour chaque diviseur, s'il fait l'affaire.

Correction.

On suppose que $3n + 2$ divise $4n + 1$. Comme, de plus, $3n + 2$ divise $3n + 2$, d'après le théorème 2, $3n + 2$ divise la combinaison linéaire :

$$4(3n + 2) - 3(4n + 1) = 12n - 12n + 8 - 3 = 5.$$

Ainsi, $3n + 2$ divise 5. Or 5 admet quatre diviseurs dans \mathbb{Z} :

$$-5, -1, 1, 5.$$

Par suite, on a les possibilités suivantes :

- $3n + 2 = -5$ ce qui implique $n = \frac{-7}{3}$. Impossible !
- $3n + 2 = -1$ ce qui implique $n = -1$.

— $3n + 2 = 1$ ce qui implique $n = \frac{-1}{3}$. Impossible!

— $3n + 2 = 5$ ce qui implique $n = 1$.

Ainsi, les deux solutions potentielles sont $n = -1$ et 1 . On vérifie alors que ces valeurs conviennent bien :

— $3 \times (-1) + 2 = -1$ divise $-3 = 4 \times (-1) + 1$ donc $n = -1$ est bien solution ;

— $3 \times 1 + 2 = 5$ divise $5 = 4 \times 1 + 1$ donc $n = 1$ est bien solution.

Exercices du livre : Exercice 9 p15, Exercice 54 p29

Partie B

Division euclidienne

1. La division euclidienne

La division euclidienne est l'un des outils principaux de l'arithmétique.

a. La division euclidienne dans \mathbb{N}

Théorème 3. *Division euclidienne dans \mathbb{N}*

Soit a, b des entiers **naturels** tels que $b \neq 0$.

Il existe un **unique** couple (q, r) d'entiers naturels tels que :

$$a = bq + r \quad \text{et} \quad 0 \leq r < b.$$

Démonstration.

Soit $a, b \in \mathbb{N}$ tels que $b \neq 0$.

- **Existence.** On considère le sous-ensemble M de \mathbb{N} suivant :

$$M = \{k \in \mathbb{N} \mid bk \leq a\}.$$

Comme $b \neq 0$, M est majoré par le premier entier supérieur au nombre rationnel $\frac{a}{b}$ (il s'agit de l'entier $E\left(\frac{a}{b}\right) + 1$). Et de plus, M est non vide car $0 \in M$.

Ainsi, M est une partie non vide et majorée de \mathbb{N} ; elle admet donc un plus grand élément q . On admet ici le résultat : toute partie non vide et majorée de \mathbb{N} admet un plus grand élément.

Par suite, bq est le plus grand multiple de b inférieur ou égal à a et donc on a :

$$bq \leq a < b(q + 1).$$

En posant $r = a - bq$, on obtient, en retranchant bq dans l'inégalité précédente :

$$0 \leq r < b.$$

et on a bien $bq + r = bq + (a - bq) = a$.

- **Unicité.** Supposons que les couples (q, r) et (q', r') vérifient :

$$a = bq + r \quad \text{avec} \quad 0 \leq r < b \quad \text{et} \quad a = bq' + r' \quad \text{avec} \quad 0 \leq r' < b.$$

Alors :

$$0 = a - a = b(q - q') + (r - r'),$$

d'où $b(q' - q) = r - r'$.

Par suite, $r - r'$ est un multiple de b qui vérifie $-b < r - r' < b$. Or 0 est le seul multiple

de b strictement compris entre $-b$ et b .

Donc $0 = r - r' = b(q' - q)$. Ainsi $r = r'$ et $q = q'$ (car $b \neq 0$).

Il en résulte qu'il n'existe qu'un seul couple (q, r) d'entiers naturels tels que :

$$a = bq + r \quad \text{et} \quad 0 \leq r < b.$$

□

Remarque 1.

Dans la division euclidienne de a par b - $a = bq + r$ avec $0 \leq r < b$:

- a est appelé le **dividende** ;
- b est appelé le **diviseur** ;
- q est appelé le **quotient** ;
- r est appelé le **reste** ;

Exercice 6.

En utilisant les souvenirs enfouis dans votre mémoire, effectuer, à la main, les divisions euclidiennes suivantes :

12 par 5; 129 par 11; 4237 par 7;

b. Algorithme de la division euclidienne dans \mathbb{N}

Algorithme de la division euclidienne dans \mathbb{N}

```
1 Variables : a,b entiers naturels
2
3 Initialisation : reste=a, quotient=0
4
5 Traitement :
6   TANT QUE reste>=b FAIRE
7     reste = reste-b
8     quotient = quotient+1
9   FIN TANT QUE
10
11 Sortie :
12   RETOURNER quotient, reste
```

c. La division euclidienne dans \mathbb{Z}

On admettra le théorème suivant :

Théorème 4. Division euclidienne dans \mathbb{Z}

Soit a, b des entiers **relatifs** tels que $b \neq 0$.

Il existe un **unique** couple (q, r) d'entiers naturels tels que :

$$a = bq + r \quad \text{et} \quad 0 \leq r < |b|.$$

Exercice 7.

Déterminer les restes et quotients de la division euclidienne de :

$$-15 \text{ par } 4 \quad -36 \text{ par } -10$$

2. Exercices types

Exercice 8.

Soit n un entier naturel. Pour quelle(s) valeur(s) de n , le reste de la division euclidienne de $(n+2)^3$ par n^2 est $12n+8$?

Correction.

voire exercice résolu C p16

Exercices : Exercices 14,15 p16 ; 67,68 p30

Exercice 9. Disjonction de cas et contraposition

1. Soit a, b des entiers naturels tels que $a^2 - 2b^2 = 1$. Montrer que a est impair et que b est pair.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n(n+1)(n+2)$ est divisible par 3.

Correction.

voire exercice résolu D p17

Exercices : Exercices 20,21 p17

Partie C

Congruences

1. Activité d'introduction

Question.

Quel était jour de la semaine lors du 14 Juillet 1789 ?

Le 14 Juillet 2018 était un samedi. Comment en déduire le jour de la semaine du 14 Juillet 1789 ?

- Combien d'années se sont écoulées entre le 14/07/1789 et le 14/07/2018 ?
- Combien de jours se sont écoulés entre ces deux dates? **Attention!** Il faut tenir compte des années bissextiles! Les années bissextiles sont :
 - l'ensemble des années qui sont multiples de 4 ;
 - auquel on enlève l'ensemble des années qui sont multiples de 100 ;
 - auquel on rajoute l'ensemble des années qui sont multiples de 400.
- Comment déduire de ce nombre de jours écoulés le jour de la semaine recherché? Puis comment conclure sur le jour de la semaine recherché ?
- Déduire de cet exemple un moyen de déterminer le jour de la semaine de n'importe quelle date!

Attention! Pour employer la définition des années bissextiles utilisée plus haut, l'année de la date choisie doit être supérieure à 1582.

Exercice 10.

Déterminer le jour de la semaine de votre date de naissance!

Voire les exercices 72,73 p30.

2. Définitions et exemples

Définition 2. Congruence modulo un entier naturel

Soit m un entier naturel non nul et a, b deux entiers relatifs.

On dit que a est **congru à b modulo m** et on écrit :

$$a \equiv b \pmod{m} \quad \text{ou} \quad a \equiv b [m]$$

si a et b ont le **même reste** dans leur division euclidienne par m .

Exemple 2.

- $25 \equiv 1 \pmod{6}$ et $251 \equiv 37 \pmod{2}$
- Deux dates du calendrier ont lieu le même jour de la semaine si, et seulement si, le nombre J de jours écoulés entre ces deux dates vérifie :

$$J \equiv 0 \pmod{7}$$

Exercice 11.

Remplir avec les congruences suivantes avec le plus petit nombre entier naturel possible :

$$81 \equiv \dots \pmod{9} \quad 58 \equiv \dots \pmod{15} \quad 1221 \equiv \dots \pmod{4} \quad 10^{200} \equiv \dots \pmod{1}.$$

Correction.

On a :

$$81 \equiv 0 \pmod{9} \quad 58 \equiv 13 \pmod{15} \quad 1221 \equiv 1 \pmod{4} \quad 10^{200} \equiv 0 \pmod{1}.$$

3. Propriétés

Proposition 2.

Soit m un entier naturel non nul et a, b deux entiers relatifs. On a $a \equiv b \pmod{m}$ si, et seulement si, $a - b$ est un multiple de m .

Démonstration.

On considère les quotients et restes de la division euclidienne de a par m et de b par m : il existe un unique couple (q, r) et un unique couple (q', r') d'entiers relatifs avec $0 \leq r < m$ et $0 \leq r' < m$ tels que :

$$a = mq + r \quad \text{et} \quad b = mq' + r'.$$

- On suppose que $a \equiv b \pmod{m}$. Montrons que $a - b$ est un multiple de m .
Comme $a \equiv b \pmod{m}$, on a $r = r'$. Ainsi,

$$a - b = mq + r - (mq' + r') = m(q - q') + r - r' = m \underbrace{(q - q')}_{\in \mathbb{Z}}$$

Par suite, $a - b$ est un multiple de m .

- On suppose que $a - b$ est un multiple de m . Montrons que $a \equiv b \pmod{m}$.
Comme $a - b$ est un multiple de m , il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $a - b = mk$. Par suite, on a

$mk = a - b = m(q - q') + r - r'$ et donc :

$$r - r' = m(k - q + q')$$

Par suite, m divise $r - r'$. Or on a $-m < r - r' < m$ donc $r - r' = 0$. D'où $r = r'$. Il en résulte que $a \equiv b \pmod{m}$. □

Exercice 12.

Soit $m \in \mathbb{N}^*$ et $a \in \mathbb{Z}$. Montrer que $a \equiv 0 \pmod{m}$ si, et seulement si, a est un multiple de m .

Correction.

En utilisant la proposition précédente, on peut conclure immédiatement car $a \equiv 0 \pmod{m}$ si, et seulement si, $a = a - 0$ est un multiple de m .

Montrons tout de même directement cette équivalence : On considère la division euclidienne de a par m : il existe un unique couple d'entiers relatifs (q, r) avec $0 \leq r < m$ tel que :

$$a = mq + r.$$

- On suppose que $a \equiv 0 \pmod{m}$. Alors a a le même reste que 0 dans la division euclidienne par m . Or $0 = m \times 0 + 0$ donc $r = 0$. Ainsi $a = mq$ donc a est un multiple de m .
- On suppose que a est un multiple de m . Alors il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $a = mk$. Ainsi, $mk = a = mq + r$ d'où $r = m(k - q)$. Par suite, r est un entier naturel multiple de m et strictement inférieur à m ; donc $r = 0$. Il en résulte que $a \equiv 0 \pmod{m}$.

Proposition 3. Transitivité

Soit m un entier naturel non nul et a, b, c des entiers relatifs.
Si $a \equiv b \pmod{m}$ et $b \equiv c \pmod{m}$ alors $a \equiv c \pmod{m}$.

Démonstration.

On suppose $a \equiv b \pmod{m}$ et $b \equiv c \pmod{m}$. Montrons que $a \equiv c \pmod{m}$. Comme $a \equiv b \pmod{m}$ et $b \equiv c \pmod{m}$, a a le même reste que b dans la division euclidienne par m et b a le même reste que c dans la division euclidienne par m . Par suite, a a le même reste que c dans la division euclidienne par m . D'où $a \equiv c \pmod{m}$. □

Proposition 4. Opérations sur les congruences

Soit m un entier naturel non nul et a, b, c, d des entiers relatifs.
Si $a \equiv b \pmod{m}$ et $c \equiv d \pmod{m}$ alors :

- $a + c \equiv b + d \pmod{m}$;

- pour tout $n \in \mathbb{N}$, $na \equiv nb \pmod{m}$;
- $ac \equiv bd \pmod{m}$;
- pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a^n \equiv b^n \pmod{m}$.

Démonstration.

On suppose $a \equiv b \pmod{m}$ et $c \equiv d \pmod{m}$. D'après la proposition 2, comme $a \equiv b \pmod{m}$, $a - b$ est un multiple de m donc il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $a - b = mk$; et comme $c \equiv d \pmod{m}$, $c - d$ est un multiple de m donc il existe $\ell \in \mathbb{Z}$ tel que $c - d = m\ell$.

- On a :

$$(a + c) - (b + d) = (a - b) + (c - d) = mk + m\ell = m \underbrace{(k + \ell)}_{\in \mathbb{Z}},$$

d'où $(a + c) - (b + d)$ est un multiple de m . Ainsi, d'après la proposition 2, $a + c \equiv b + d \pmod{m}$.

- On raisonne par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.
- On a :

$$(ac) - (bd) = ac - bc + bc - bd = (a - b)c + b(c - d) = mkc + bml = m \underbrace{(ck + bl)}_{\in \mathbb{Z}},$$

d'où $(ac) - (bd)$ est un multiple de m . Ainsi, d'après la proposition 2, $ac \equiv bd \pmod{m}$.

- On raisonne par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

□

Remarque 2.

Attention ! La réciproque des propriétés précédentes sont fausses en général :
Par exemple : $1 + 2 \equiv 2 + 1 \pmod{4}$ mais $1 \not\equiv 2 \pmod{4}$!

Conséquence : on ne peut PAS simplifier une congruence comme on le ferait avec une égalité :

$$\begin{aligned} na \equiv nb \pmod{m} &\not\Rightarrow a \equiv b \pmod{m} \\ a^n \equiv b^n \pmod{m} &\not\Rightarrow a \equiv b \pmod{m} \end{aligned}$$

4. Exercices types

Exercice 13.

1. Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, le reste de la division euclidienne de 2^n par 6.
2. Déterminer le reste de la division euclidienne de 152^{403} par 6.

Exercice 14.

Déterminer le reste de la division euclidienne de 2018^{2019} par 5.

Exercice guidé : Exercice résolu F p24

Exercices supplémentaires : Exercice 87,88 p31

Exercice 15.

Exercices 91 et 95 p32.