Chapitre II

Les Matrices

Table des matières

Partie A

Définitions et notations

Activité d'introduction :

On considère l'ensemble E des points $P(x,y)$ du plan de coordonnées réelles positives qui vérifient l'équation :

$$x^2 - 3y^2 = 1.$$

1. Déterminer un point $P_0(x_0, y_0)$ de coordonnées entières "simples" qui appartient à E.
2. Soit $M(x,y), M'(x',y')$ des points du plan tels que :

$$\begin{cases} x' = 2x + 3y \\ y' = x + 2y \end{cases}$$

   Montrer que si M appartient à E, alors M' appartient à E.

3. En utilisant le point P_0, déterminer des points P_1, P_2, P_3 de coordonnées entières qui appartiennent à E.
4. Soit M et M' les points définis à la question 2). Montrer que $x < x'$ et $y < y'$.
   En déduire qu'il existe une infinité de points à coordonnées entières appartenant à E.

1. Définition et vocabulaire des matrices

Définition 1.

Soit n, m des entiers naturels non nuls.

Une **matrice de taille n** $\times$ **m** est un tableau de nombres réels (ou même complexes) comportant **n** lignes et **m** colonnes.

Les nombres à l'intérieur d'une matrice sont appelés les **coefficients** de la matrice.

Exemple 1.

La matrice $\begin{pmatrix} 3 & \pi & -5 & 0 \\ 1 & 1 & 0,12 & 7 \end{pmatrix}$ est une matrice de taille $(2,4)$.

2. Matrices particulières

Définition 2. *Matrices particulières*

— Une **matrice ligne** est une matrice de taille $1\times ?$, i.e. elle ne possède qu'une seule ligne.

> **Exemple :**
> $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & -6 \end{pmatrix}$ est une matrice ligne.

— Une **matrice colonne** est une matrice de taille $? \times 1$, i.e. elle ne possède qu'une seule colonne.

> **Exemple :**
> $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ est une matrice colonne.

— Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Une **matrice carré d'ordre n** est une matrice de taille $n \times n$, i.e. elle ne possède le même nombre n de lignes et de colonnes.

> **Exemple :**
> $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ est une matrice carrée d'ordre 2.

— Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La **matrice nulle d'ordre n**, notée 0_n, est la matrice carrée d'ordre n dont tous les coefficients sont nuls.

> **Exemple :**
> $0_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est la matrice nulle d'ordre 3.

3. Notation des coefficients

Notation 1. *Coefficients d'une matrice*

Soit A une matrice de taille $n \times m$ où $n, m \in \mathbb{N}^*$.
On peut alors écrire A sous la forme :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1,m-1} & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2,m-1} & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \dots & a_{n-1,m-1} & a_{n-1,m} \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{n,m-1} & a_{nm} \end{pmatrix}$$

où, pour $1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq m$, les a_{ij} sont les coefficients de la matrices.

On note alors $A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq n,\, 1 \leq j \leq m}$.

Remarque 1. *Égalité entre matrices*

Deux matrices $A = (a_{ij})_{1\leq i\leq n,\ 1\leq j\leq m}$ et $B = (b_{ij})_{1\leq i\leq p,\ 1\leq j\leq q}$ sont **égales** si, et seulement si, on a les deux conditions suivantes :

i) elles sont de même taille i.e. $n = p$ et $m = q$; et

ii) leurs coefficients sont tous égaux i.e. pour tout $1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq m$,

$$a_{ij} = b_{ij}$$

Définition 3. *Diagonale d'une matrice*

Soit $A = (a_{ij})_{1\leq i\leq n,\ 1\leq j\leq n}$ une matrice carrée d'ordre $n \in \mathbb{N}^*$. On appelle **coefficients diagonaux** de A, les coefficients a_{ii} pour $1 \leq i \leq n$.

On appelle **matrice diagonale** une matrice carrée dont tous les coefficients sont nuls en dehors des coefficients diagonaux.

Notation 2. *Matrice identité d'ordre n*

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note I_n la matrice diagonale d'ordre n dont les coefficients diagonaux sont tous égaux à 1 :

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Partie B

Opérations sur les matrices

1. Addition de deux matrices

Définition 4. *Addition*

Soit $A = (a_{ij})_{1\leq i\leq n,\ 1\leq j\leq m}$ et $B = (b_{ij})_{1\leq i\leq n,\ 1\leq j\leq m}$ des matrices de **même taille**. On définit la matrice somme $A + B$ de taille $n \times m$ par :

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{1\leq i\leq n,\ 1\leq j\leq m}$$

Autrement dit, on obtient donc la somme de deux matrice de même taille en additionnant coefficient par coefficient.

Exemple 2.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 1/2 & 0 \\ 1 & -1 & 22 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-2 & 2+1/2 & 3+0 \\ 1+1 & 1-1 & 1+22 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 5/2 & 3 \\ 2 & 0 & 23 \end{pmatrix}$$

Proposition 1. *Propriétés de l'addition*

Soit A, B, C des matrices de même taille et $\mathbf{0}$ la matrice nulle de même taille également. On a :

i) $A + B = B + A$;

ii) $A + (B + C) = (A + B) + C$;

iii) $A + \mathbf{0} = \mathbf{0} + A = A$.

2. Multiplication d'une matrice par un réel

Définition 5.

Soit $A = (a_{ij})_{1\leq i\leq n,\ 1\leq j\leq m}$ et α un nombre réel. On définit la matrice αA de même taille que A, par :

$$\alpha A = (\alpha a_{ij})_{1\leq i\leq n,\ 1\leq j\leq m}\,.$$

Autrement dit, on obtient le produit d'une matrice par un réel en multipliant **tous** les coefficients par ce réel.

Exercice 1.

Soit M une matrice de taille $n \times m$ et a, b des réels.

1. Calculer $0M$ et $1M$;
2. Que dire de $(a+b)M$?

Correction.

1. $0M = \mathbf{0}$ et $1M = M$
2. $(a+b)M = aM + bM$.

3. Produit de deux matrices

a. Produit d'une matrice ligne par une matrice colonne

Définition 6.

Soit $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \end{pmatrix}$ une matrice ligne de taille $1 \times n$ et $B = \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \vdots \\ b_{n1} \end{pmatrix}$ une matrice colonne de taille $n \times 1$. On définit le produit de A par B par :

$$A \times B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \vdots \\ b_{n1} \end{pmatrix} = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + \ldots + a_{1n}b_{n1} = \sum_{k=1}^{n} a_{1k}b_{k1}.$$

Exercice 2.

Déterminer les produits de matrices lignes par des matrices colonnes suivants :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 12 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -1 & 0 & 5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -3 \\ \pi \\ -5 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 13 \end{pmatrix}$$

Correction.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 12 \end{pmatrix} = 23 \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 & 5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -3 \\ \pi \\ -5 \end{pmatrix} = 12 \quad \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 13 \end{pmatrix} = -2$$

b. Produit d'une matrice par une autre

Définition 7. *Multiplication*

Soit $A=(a_{ij})_{1\leq i\leq n,\ 1\leq j\leq m}$ et $B=(b_{ij})_{1\leq i\leq m,\ 1\leq j\leq q}$ des matrices. On définit la matrice produit $A\times B=AB$ de taille $n\times q$ par :

$$AB=\left(\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}\right)_{1\leq i\leq n,\ 1\leq j\leq q}$$

Autrement dit, on obtient le coefficient c_{ij} de la matrice AB en effectuant le produit de la ligne i de A par la colonne j de B.

Attention ! La multiplication de la matrice $A=(a_{ij})_{1\leq i\leq n,\ 1\leq j\leq m}$ par la matrice $B=(b_{ij})_{1\leq i\leq p,\ 1\leq j\leq q}$ n'est possible que si :

$$\mathbf{m}=\mathbf{p}$$

i.e. si le nombre de colonnes de A est égal au nombre de lignes de B.

Exercice 3.

Calculer, si c'est possible, les produits de matrices suivants :

$$\begin{pmatrix}1&3&0\\0&2&-5\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1&1&-1\\2&1&8\\0&5&1\end{pmatrix}\qquad\begin{pmatrix}1&9&0\\4&-1&1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1&7&-1\\2&1&0\end{pmatrix}\qquad\begin{pmatrix}1&3\\0&2\\1&1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0&1&-1&-3\\2&1&8&5\end{pmatrix}$$

Correction.

$$\begin{pmatrix}1&3&0\\0&2&-5\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1&1&-1\\2&1&8\\0&5&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7&4&23\\4&-23&11\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1&9&0\\4&-1&1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1&7&-1\\2&1&0\end{pmatrix}=\text{ produit impossible}$$

$$\begin{pmatrix}1&3\\0&2\\1&1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0&1&-1&-3\\2&1&8&5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&4&23&12\\4&2&16&10\\2&2&7&2\end{pmatrix}$$