Correction de l'interrogation n°1

Exercice 1.

Compléter la définition suivante :

> Soit a, b des entiers relatifs. On dit que b **divise** a s'il existe $k \in$..... tel que :
>
> $$a = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Correction.

> Soit a, b des entiers relatifs. On dit que b **divise** a s'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que :
>
> $$a = kb.$$

Exercice 2.

Compléter les affirmations suivantes avec les mots *multiple* ou *diviseur* :

5 est un .... de 15	12 est un .... de 3	1 est un .... de 10^{13}
0 est un .... de 5	205 est un .... de 0	-8 est un .... de -40

Correction.

5 est un **diviseur** de 15	12 est un **multiple** de 3	1 est un **diviseur** de 10^{13}
0 est un **multiple** de 5	205 est un **diviseur** de 0	-8 est un **diviseur** de -40

Exercice 3.

Soit a, b, d des entiers relatifs. Montrer que si d divise a et d divise b, alors d divise $a - b$.

Correction.

On suppose que d divise a et d divise b. Alors il existe $k, k' \in \mathbb{Z}$ tels que $a = kd$ et $b = k'd$. Montrons que d divise $a - b$.

On a :

$$a - b = kd - k'd = \underbrace{(k - k')}_{\in \mathbb{Z}} d,$$

donc d divise $a + b$.

Exercice 4.

Déterminer les couples (x, y) d'entiers **naturels** qui se trouvent sur la courbe $\mathcal{C}$ d'équation :

$$\mathcal{C} : \ y = \frac{7}{x - 2}.$$

Correction.

Soit (x, y) un couple d'entiers naturels qui vérifient $y = \dfrac{7}{x - 2}$.
Alors x et y vérifient :

$$(x - 2)y = 7$$

Donc $x - 2$ et y sont des diviseurs de 7, et comme y et 7 sont positifs, $x - 2$ et y sont des diviseurs positifs de 5. Les produits possibles de diviseurs positifs de 7 sont :

$$7 = 7 \times 1 \text{ et } 7 = 1 \times 7.$$

Ainsi, on a les possibilités suivantes :

$$\begin{cases} x - 2 = 1 \\ y = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 7 \end{cases}$$

ou

$$\begin{cases} x - 2 = 7 \\ y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 9 \\ y = 1 \end{cases}$$

De plus, on vérifie aisément que les couples $(3, 7)$ et $(9, 1)$ satisfont l'équation de $\mathcal{C}$.
Par suite, les couples d'entiers naturels qui se trouvent sur la courbe $\mathcal{C}$ sont :

$$(3, 7) \text{ et } (9, 1).$$