Chapitre 0

Notations mathématiques et introduction au raisonnement

Table des matières

Partie A

Les Notations mathématiques

Nous verrons dans cette partie, les principales notations mathématiques usuelles utilisées dans ce cours.

1. Les ensembles usuels

Dans les prochains chapitres, nous utiliserons certaines des ensembles de nombres suivants, notamment ceux des nombres entiers :

• L'ensemble des **nombres entiers naturels** $\mathbb{N}$.
Il contient les nombres 0, 1, 2, 3 ...

• L'ensemble des **nombres entiers relatifs** $\mathbb{Z}$.
Il contient les nombres ... -2, -1, 0, 1, 2, ...

• L'ensemble des **nombres rationnels** $\mathbb{Q}$.
Il contient les nombres pouvant être écrits comme quotient d'un nombre relatif par un nombre entier non nul.
Par exemple, $\frac{1}{2}$, $\frac{-6}{8}$, 12 ou $1,1$ ou même $3,333333....$

• L'ensemble des **nombres réels** $\mathbb{R}$.
Il contient tous les nombres rationnels et également les nombres irrationnels comme par exemple : $\sqrt{2} = 1,41421$, $\pi = 3,14159...$, $e = 2,71828....$

• L'ensemble des **nombres complexes** $\mathbb{C}$.
Il contient les nombres de la forme $x + iy$ où x et y sont des nombres réels et i vérifie $i^2 = -1$.

2. Les notations courantes et les quantificateurs

a. Appartenance et inclusion

• L'appartenance est symbolisée par $\in$. Par exemple $3 \in \mathbb{Z}$ indique que le nombre 3 **appartient** à l'ensemble $\mathbb{Z}$, ou autrement dit, que 3 est un **élément** de $\mathbb{Z}$.

• L'inclusion est symbolisée par $\subset$. Par exemple $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$ indique que l'ensemble **est inclus** dans l'ensemble $\mathbb{Z}$, ou autrement dit, que $\mathbb{N}$ est un **sous-ensemble** de $\mathbb{Z}$.

Attention !

Il ne faut surtout pas confondre les symboles $\in$ et $\subset$. Le premier met en relation un élément et un ensemble alors que le second met en relation deux ensembles !

b. Les quantificateurs

• Le symbole $\forall$ est une abréviation signifiant **"pour tout"** ou encore **"quelque soit"**.
Exemple d'utilisation : $\forall\, x \in \mathbb{R},\ x^2 \geq 0$ i.e. pour tout nombre réel x, x^2 est positif.

• Le symbole $\exists$ est une abréviation signifiant **"il existe"**
Exemple d'utilisation : $\exists\, x \in \mathbb{R},\ x^2 = 4$ i.e. il existe un nombre réel x tel que $x^2 = 4$.

• Les symboles $\exists!$ (ensemble) sont une abréviation signifiant **"il existe un unique"**
Exemple d'utilisation : $\exists!\, x \in \mathbb{R},\ x^3 = 27$ i.e. il existe un unique nombre réel x tel que $x^3 = 27$.

Attention !

Il faut, autant que faire se peut, éviter d'utiliser ces abréviations dans une démonstration mathématique ! On préférera très souvent prendre la peine d'écrire "pour tout" et il existe" !!

Partie B

Introduction au raisonnement

Dans cette partie, nous allons aborder les bases du raisonnement en mathématiques. Nous continuerons à étudier cela au fur et à mesure de l'année.

1. Les bases et le langage du raisonnement

En général, la rédaction d'une démonstration se décompose en trois parties :

- **L'introduction**. Cette partie contient les hypothèses, un rappel de ce que l'on veut démontrer et le principe de raisonnement que l'on va utiliser.
- **Le raisonnement**. La partie "difficile". Elle contient les arguments qui prouveront notre résultat.
- **La conclusion**. Partie importante et trop souvent négligée. Elle indique la fin du raisonnement et rappelle ce que l'on devait démontrer. On utilise souvent l'abréviation **C.Q.F.D** ou le symbole $\square$ pour clore une démonstration.

Très important !

Dans l'introduction, on définit **toujours** les variables qu'on utilisera dans le raisonnement !

2. L'implication et l'équivalence

a. L'implication : si ... alors ...

Le symbole d'**implication** $\Rightarrow$ est une abréviation de "si ... alors ...".
Par exemple, $\forall a, b, c \in \mathbb{N}$,

$$a \text{ divise et } a \text{ divise } b \;\Rightarrow\; a \text{ divise } b + c.$$

signifie : pour tous nombres entiers naturels a, b et c,

$$\text{si } a \text{ divise } b \text{ et } a \text{ divise } c, \text{ alors } a \text{ divise } b + c.$$

b. L'équivalence

Le symbole d'**équivalence** $\Leftrightarrow$ est une abréviation de "... si, et seulement si, ...".
Pour deux propositions P et Q, l'assertion "$P \Leftrightarrow Q$" revient exactement à "$P \Rightarrow Q$ **et** $Q \Rightarrow P$".

3. Les techniques usuelles de raisonnement

a. Montrer directement une implication

Soit P et Q deux propositions. Pour montrer $P \Rightarrow Q$, on procède de la façon suivante :
On suppose P vraie et on montre que Q est vraie.

Exercice 1.

Démontrer l'implication suivante : pour tout $x \in [0, \pi/2]$,

$$\text{si } \cos(x) \geq \frac{1}{2} \text{ alors } \sin(x) \leq \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Correction.

Soit $x \in [0, \pi/2]$.

On suppose que $\cos(x) \geq \frac{1}{2}$. Montrons que $\sin(x) \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$.

On a :

$$\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1.$$

Or, d'après notre hypothèse, $\cos^2(x) \geq \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$ car la fonction $x \mapsto x^2$ est croissante sur $\mathbb{R}_+$.

Par suite, on a

$$\begin{aligned}
\cos^2(x) &\geq \frac{1}{4} \\
\cos^2(x) + \sin^2(x) &\geq \frac{1}{4} + \sin^2(x) \\
1 &\geq \frac{1}{4} + \sin^2(x) \\
1 - \frac{1}{4} &\geq \sin^2(x) \\
\frac{3}{4} &\geq \sin^2(x).
\end{aligned}$$

De plus, $\sin(x) \geq 0$ car $x \in [0, \pi/2]$. Ainsi, comme la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est croissante sur $\mathbb{R}_+$, on obtient :

$$\sqrt{\frac{3}{4}} \geq \sin(x).$$

Il en résulte que :

$$\sin(x) \leq \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

□

b. Montrer une équivalence

Soit P et Q deux propositions. Pour montrer $P \Leftrightarrow Q$, il faut et il suffit de montrer que : $P \Rightarrow Q$ **et** $Q \Rightarrow P$.

c. Autres techniques usuelles

Nous verrons ou rappellerons, au fur et à mesure du cours et des activités, différentes stratégies de démonstration. Nommons-en quelques-unes :

— le raisonnement par contraposée ;
— le raisonnement par l'absurde ;
— le raisonnement par récurrence ...