Correction de l'interrogation n°1

Exercice 1.

Compléter la définition suivante :

> Soit a, b des entiers relatifs. On dit que b **divise** a s'il existe $k \in$..... tel que :
>
> $$a = \dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

Correction.

> Soit a, b des entiers relatifs. On dit que b **divise** a s'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que :
>
> $$a = kb.$$

Exercice 2.

Compléter les affirmations suivantes avec les mots *multiple* ou *diviseur* :

3 est un .... de 15	8 est un .... de 4	1 est un .... de 10^{30}
0 est un .... de 4	101 est un .... de 0	-6 est un .... de -42

Correction.

3 est un **diviseur** de 15	8 est un **multiple** de 4	1 est un **diviseur** de 10^{30}
0 est un **multiple** de 4	101 est un **diviseur** de 0	-6 est un **diviseur** de -42

Exercice 3.

Soit a, b, d des entiers relatifs. Montrer que si d divise a et d divise b, alors d divise $a + b$.

Correction.

On suppose que d divise a et d divise b. Alors il existe $k, k' \in \mathbb{Z}$ tels que $a = kd$ et $b = k'd$. Montrons que d divise $a + b$.

On a :

$$a + b = kd + k'd = \underbrace{(k + k')}_{\in \mathbb{Z}} d,$$

donc d divise $a + b$.

Exercice 4.

Déterminer les couples (x, y) d'entiers **naturels** qui se trouvent sur la courbe $\mathcal{C}$ d'équation :

$$\mathcal{C} : \; y = \frac{5}{x - 1}.$$

Correction.

Soit (x, y) un couple d'entiers naturels qui vérifient $y = \dfrac{5}{x-1}$.
Alors x et y vérifient :

$$(x - 1)y = 5$$

Donc $x - 1$ et y sont des diviseurs de 5, et comme y et 5 sont positifs, $x - 1$ et y sont des diviseurs positifs de 5. Les produits possibles de diviseurs positifs de 5 sont :

$$5 = 5 \times 1 \text{ et } 5 = 1 \times 5.$$

Ainsi, on a les possibilités suivantes :

$$\begin{cases} x - 1 = 1 \\ y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 5 \end{cases}$$

ou

$$\begin{cases} x - 1 = 5 \\ y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 6 \\ y = 1 \end{cases}$$

De plus, on vérifie aisément que les couples $(2, 5)$ et $(6, 1)$ satisfont l'équation de $\mathcal{C}$.
Par suite, les couples d'entiers naturels qui se trouvent sur la courbe $\mathcal{C}$ sont :

$$(2, 5) \text{ et } (6, 1).$$