Chapitre IV

Réduction des endomorphismes et des matrices carrées

Table des matières

Dans ce chapitre, n désigne un entier naturel non nul et E désigne un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ où $\mathbb{K}$ est un sous-corps de $\mathbb{C}$. On se limitera dans les manipulations au cas $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Partie A
Généralités

1. Matrices semblables

a. Matrices équivalentes

Définition 1. *Matrices équivalentes*

Soit $A, B \in M_n(\mathbb{K})$. On dit que A et B sont **équivalentes** s'il existe $P, Q \in GL_n(\mathbb{K})$ tels que

$$B = Q^{-1}AP.$$

Exercice 1.

Montrer que la relation "*être équivalentes*" est une relation d'équivalence sur $M_n(\mathbb{K})$.

Proposition 1.

Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$. Alors $\mathrm{rg}(A) = r \in [\![0, n]\!]$ si, et seulement si, A est équivalente à la matrice

$$\left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$$

b. Matrices semblables

Définition 2. *Matrices semblables*

Soit $A, B \in M_n(\mathbb{K})$. On dit que A et B sont **semblables** s'il existe $P \in GL_n(\mathbb{K})$ tels que

$$B = P^{-1}AP.$$

Exemple 1.

Soit $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ des bases de E et $u \in \mathcal{L}(E)$. On note $M = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ la matrice de u dans la base $\mathcal{B}$ et $M' = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(u)$ la matrice de u dans la base $\mathcal{B}'$. Alors M et M' sont semblables, en effet, on a

$$M' = P^{-1}MP$$

où P est la matrice de passage de $\mathcal{B}$ vers $\mathcal{B}'$.

Remarque 1.

— Deux matrices A et B qui sont semblables ont le même déterminant.

— Deux matrices A et B qui sont semblables ont la même trace. En vertu de cette remarque et de l'exemple ci-dessus, cela permet de définir la trace d'un endomorphisme : la trace d'un endomorphisme est la trace d'une matrice de cet endomorphisme dans une base quelconque.

2. Sous-espaces stables et endomorphismes induits

Définition 3. *Sous-espace stable*

Soit F un sous-espace vectoriel de E et $u \in \mathcal{L}(E)$. On dit que F est **stable** par u si $u(F) \subset F$, i.e. pour tout $x \in F$, $u(x) \in F$.

Exemple 2.

— Les sous-espaces vectoriels $\{0\}$ et E sont stables par tout endomorphisme de E.

— Une homothétie (i.e. $\lambda \mathrm{Id}_E$ où $\lambda \in \mathbb{K}$) stabilise tous les sous-espaces vectoriels de E.

— Une intersection ou une somme de sous-espaces stables par un endomorphisme u est un sous-espace stable par u.

Exercice 2.

1. On suppose que pour tout $x \in E$, la famille $(x, u(x))$ est liée. Montrer que u est une homothétie.
2. En déduire que les seuls endomorphismes qui stabilisent tous les sous-espaces vectoriels de E sont les homothéties.

Correction.

1. On suppose que pour tout $x \in E$, $(x, u(x))$ est liée. Alors pour tout $x \neq 0$, il existe un unique $\lambda_x \in \mathbb{K}$ tel que $u(x) = \lambda_x x$. Montrons que pour tous $x, y \in E$ non nuls, $\lambda_x = \lambda_y$.
   — *1er cas :* x et y sont colinéaires. Alors il existe $\mu \in \mathbb{K}$ tel que $x = \mu y$, d'où :
   $$\lambda_x x = u(x) = \mu u(y) = \mu \lambda_y y = \lambda_y x;$$
   donc $\lambda_x = \lambda_y$.
   — *2nd cas :* (x, y) est libre. Alors on a
   $$\lambda_{x+y}(x+y) = u(x+y) = u(x) + u(y) = \lambda_x x + \lambda_y y.$$

Par suite,
$$(\lambda_{x+y} - \lambda_x)x + (\lambda_{x+y} - \lambda_y)y = 0_E,$$
or (x, y) est libre donc $\lambda_{x+y} - \lambda_x = 0$ et $\lambda_{x+y} - \lambda_y = 0$. Et donc $\lambda_x = \lambda x + y = \lambda_y$. Il en résulte qu'il existe $\lambda \in E$ tel que $u(x) = x$ (cette égalité étant trivialement vraie pour $x = 0_E$).

2. Une homothéties stabilise tous les sous-espaces vectoriels. Réciproquement, si u est un endomorphisme qui stabilise tous les sous-espaces vectoriels, alors, pour tout $x \in E$, u stabilise $\mathbb{K}x = \mathrm{Vect}(x)$. Ainsi, pour tout $x \in E$, $u(x) \in \mathbb{K}x$ i.e. $(x, u(x))$ est liée. Par suite, d'après la question précédente, u est une homothétie.

Proposition 2.

Soit F un sous-espace vectoriel de E, $(e_i)_{i\in I}$ une famille génératrice de F et $u \in \mathcal{L}(E)$. Alors F est stable par u si, et seulement si, pour tout $i \in I$, $u(e_i) \in F$.

Démonstration.

- $(\Rightarrow)$. On suppose F stable par u. Alors pour tout $x \in F$, $u(x) \in F$, donc en particulier, comme chaque $e_i \in F$ pour $i \in I$, $u(e_i) \in F$.
- $(\Leftarrow)$. On suppose que pour tout $i \in I$, $u(e_i) \in F$. Soit $x \in F$. Comme $(e_i)_{i\in I}$ est génératrice, alors il existe une famille $(\lambda_i)_{i\in I})$ presque tous nuls telle que $x = \sum_{i\in I} \lambda_i e_i$. Par suite, on a :
$$u(x) = \sum_{i\in I} \lambda_i \underbrace{u(e_i)}_{\in F},$$
donc, comme F est un sous-espace vectoriel, $u(x) \in F$. Il en résulte que F est stable par u.

$\square$

Remarque 2.

Pour $x \in E$, $\mathbb{K}x$ est un sous-espace vectoriel de E. D'après la proposition précédente, ce sous-espace est stable par u si, et seulement si, il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $u(x) = \lambda x$.

Proposition 3.

Soit $u, v \in \mathcal{L}(E)$. Si u et v commutent i.e. $u \circ v = v \circ u$, alors $\mathrm{Ker}(v)$ et $\mathrm{Im}(v)$ sont stables par u.

Démonstration.

On suppose que u et v commutent.

- Soit $x \in \mathrm{Ker}(v)$. Montrons que $u(x) \in \mathrm{Ker}(v)$. On a :
$$v(u(x)) = v \circ u(x) = u \circ v(x) = u(v(x)) = u(0_E) = 0_E$$

car $v \circ u = u \circ v$ et u est linéaire. Par suite, $\mathrm{Ker}(v)$ est stable par u.

- Soit $v(x) \in \mathrm{Im}(v)$ où $x \in E$. Montrons que $u(v(x)) \in \mathrm{Im}(v)$. On a :

$$u(v(x)) = u \circ v(x) = v \circ u(x) = v(u(x)) \in \mathrm{Im}(v)$$

car $u \circ v = v \circ u$ et $u(x) \in E$. Par suite $\mathrm{Im}(v)$ est stable par u.

□

Définition 4. *Endomorphisme induit*

Soit F un sous-espace vectoriel de E stable par un endomorphisme u de E. On appelle **endomorphisme induit par u sur F** et l'endomorphisme $u_F \in \mathcal{L}(F)$ défini par $u_F = u_{|F}$ i.e. pour tout $x \in F$

$$u_F(x) = u(x)$$

Proposition 4.

On suppose E de dimension finie n. Soit u un endomorphisme de F un sous-espace vectoriel de E de dimension p et $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_n)$ une **base adaptée** à F i.e. $\mathcal{B}' = (e_1, ..., e_p)$ est une base de F.
Alors F est stable par u si, et seulement si, la matrice $M = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ dans la base $\mathcal{B}$ est triangulaire supérieure par bloc, i.e.

$$M = \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline 0 & C \end{array}\right)$$

avec $A \in M_p(\mathbb{K})$.
Dans ce cas, A est la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(u_F)$ de l'endomorphisme induit u_F par u sur F.

Démonstration.

On note $M = (m_{ij})_{1 \le i,j \le n} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$. Alors on a, pour $i \in [\![1, n]\!]$, $u(e_i) = \sum_{j=1}^{n} m_{ij} e_i$. On note : $A = (m_{ij})_{1 \le i,j \le p}$, $B = (m_{ij})_{\substack{p+1 \le j \le n \\ 1 \le i \le p}}$, $C = (m_{ij})_{p+1 \le i,j \le n}$ et $D = (m_{ij})_{\substack{1 \le j \le p \\ p+1 \le i \le n}}$.
On remarque que $(e_1, ..., e_p)$ est en particulier une famille génératrice de F.
Ainsi,

F est stable par u

si, et seulement si,

pour tout $j \in [\![1, p]\!]$, $u(e_j) = \sum_{j=1}^{n} m_{ij} e_i \in F$

si, et seulement si,

pour tout $j \in [\![1, p]\!]$ et $i \in [\![p+1, n]\!]$, $m_{ij} = 0$

si, et seulement si,

$D = (0)_{\substack{1 \le j \le p \\ p+1 \le i \le n}}$

si, et seulement si,

$$M = \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline 0 & C \end{array}\right)$$

$\square$

Partie B

Éléments propres

1. Éléments propres d'un endomorphisme

a. Définitions

Définition 5. *Valeur/vecteur propre d'un endomorphisme*

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$.

— On dit que $\lambda \in \mathbb{K}$ est une **valeur propre** de u s'il existe $x \in E$ **non nul** tel que

$$u(x) = \lambda x.$$

— Soit $\lambda \in \mathbb{K}$ une valeur propre de u. On dit que $x \in E$ est un **vecteur propre de** u **associé à** λ si :

$$x \neq 0_E \quad \text{et} \quad u(x) = \lambda x.$$

Proposition 5.

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, $\lambda \in \mathbb{K}$ et $x \in E \setminus \{0_E\}$.

— Le scalaire λ est une valeur propre de u si, et seulement si, $\mathrm{Ker}(u - \lambda \mathrm{Id}_E) \neq \{0_E\}$ - autrement dit, si, et seulement si, $u - \lambda \mathrm{Id}_E$ n'est pas injectif.

— Le vecteur x est un vecteur propre de u si, et seulement si, $u(x)$ est colinéaire à x.

Démonstration.

•
$$\lambda \text{ est une valeur propre de } u$$
si, et seulement si,
$$\text{il existe } x \in E \setminus \{0_E\} \text{ tel que } u(x) = \lambda x$$
si, et seulement si,
$$\text{il existe } x \in E \setminus \{0_E\} \text{ tel que } u - \lambda \mathrm{Id}_E(x) = 0_E$$
si, et seulement si,
$$\text{il existe } x \in E \setminus \{0_E\} \text{ tel que } x \in \mathrm{Ker}(u - \lambda \mathrm{Id}_E)(x)$$
si, et seulement si,
$$\mathrm{Ker}(u - \lambda \mathrm{Id}_E)(x) \neq \{0_E\}.$$

•
$$x \text{ est un vecteur propre de } u$$
si, et seulement si,
$$\text{il existe } \lambda \in \mathbb{K} \text{ tel que } u(x) = \lambda x$$
si, et seulement si,

$$u(x) \text{ et } x \text{ sont colinéaires.}$$

□

Exercice 3.

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ tel que $f : (x, y, z) \to (2y, 2x, 2z)$. Montrer que $(1, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$ et $(1, -1, 0)$ sont des vecteurs propres de f. À quelle valeur propre chacun d'entre eux est-il associé ?

Démonstration.

On a :

$$f(1, 1, 0) = (2, 2, 0) = 2(1, 1, 0)$$
$$f(0, 0, 1) = (0, 0, 1) = 2(0, 0, 1)$$
$$f(1, -1, 0) = (-2, 2, 0) = (-2)(1, -1, 0)$$

Donc $(1, 1, 0)$ et $(0, 0, 1)$ sont des vecteurs propres de f associés à la valeur propre 2 et $(1, -1, 0)$ est un vecteur propre de f associé à la valeur propre -2. □

Définition 6. *Sous-espace propre d'un endomorphisme*

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et λ une valeur propre de u. On appelle **sous-espace propre de u associé à la valeur propre** λ le sous-espace vectoriel de E noté $E_\lambda(u)$ et défini par :

$$E_\lambda(u) = \operatorname{Ker}(u - \lambda \operatorname{Id}_E) = \{x \in E \mid u(x) = \lambda x\}.$$

Autrement dit, $E_\lambda(u)$ est l'ensemble contenant 0_E et l'ensemble des vecteurs propres associés à la valeur propre λ.

Définition 7. *Spectre d'un endomorphisme*

On suppose que E est de **dimension finie**. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Le **spectre** de u, noté $\operatorname{Sp}(u)$, est l'ensemble des valeurs propres de u i.e.

$$\operatorname{Sp}(u) = \{\lambda \in \mathbb{K} \mid \exists x \in E \setminus \{0_E\},\ u(x) = \lambda x\}.$$

Remarque 3.

— le vecteur nul 0_E n'est JAMAIS un vecteur propre ! Par contre, il appartient à tout sous-espace propre.

— 0 est valeur propre de u si, et seulement si, u n'est pas injectif. Dans ce cas $E_0(u) = \operatorname{Ker}(u)$.

— Tout sous-espace propre $E_\lambda(u)$ est de dimension supérieure ou égale à 1.

Exercice 4.

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$ une valeur propre de u.

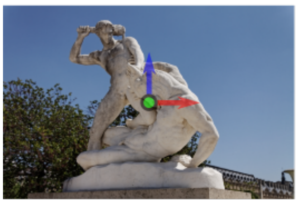
1. On suppose que $\lambda \neq 0$. Montrer que $E_\lambda(u) \subset \mathrm{Im}(u)$.
2. On suppose u inversible. Montrer que $\lambda \neq 0$ et que $\frac{1}{\lambda}$ est une valeur propre de u^{-1}. Que dire de $E_{\frac{1}{\lambda}}(u^{-1})$?

Correction.

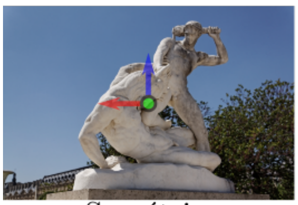
1. Soit $x \in E_\lambda(u)$. Alors $u(x) = \lambda x$ et donc, par linéarité de u,
$$x = u(\frac{1}{\lambda}x) \in \mathrm{Im}(f).$$
Par suite, $E_\lambda(u) \subset \mathrm{Im}(u)$.
2. Comme $\mathrm{Ker}(u) = \{0_E\}$, 0 n'est pas valeur propre de u. Par suite, $\lambda \neq 0$.
Soit $x \in E_\lambda(u)$. Alors $u(x) = \lambda x$ et donc, par linéarité de u^{-1}, $x = u^{-1}(u(x)) = \lambda u^{-1}(x)$. Par suite, on a :
$$u^{-1}(x) = \frac{1}{\lambda}x,$$
et donc $\frac{1}{\lambda}$ est une valeur propre de u^{-1} et x est un vecteur propre de u^{-1} associé à $\frac{1}{\lambda}$. Ainsi, $E_\lambda(u) \subset E_{\frac{1}{\lambda}}(u^{-1})$. Et réciproquement, si $x \in E_{\frac{1}{\lambda}}(u^{-1})$, par un raisonnement similaire, on obtient $u(x) = \lambda x$. Il en résulte que
$$E_{\frac{1}{\lambda}}(u^{-1}) = E_\lambda(u).$$

b. Exemples

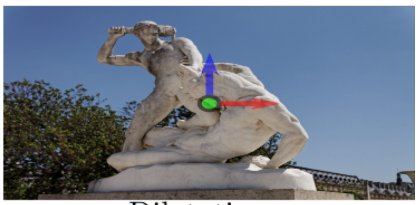
On applique les transformations suivantes à la première image. Déterminons les valeurs propres et leurs directions propres associées pour chacune des transformations. Une direction propre correspond à une direction qui reste inchangée après transformation et une valeur propre correspond à l'échelle de la modification (en tenant compte du changement de sens grâce au signe) après transformation dans la direction propre qui lui est associée.



Rotation



Symétrie



Dilatation

Exemple 3.

— Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors l'homothétie $\lambda \mathrm{Id}_E$ admet λ pour unique valeur propre et $E_\lambda(\lambda \mathrm{Id}_E) = E$.

— Une rotation non triviale (i.e. d'angle différent d'un multiple de π) dans le plan euclidien n'admet pas de valeur propre.

— Soit $p \in \mathcal{L}(E)$ un projecteur non trivial de E i.e. $p^2 = p$ et $p \neq 0, \mathrm{Id}_E$. Alors p admet pour valeurs propres 0 et 1 et on a :

$$E_0(p) = \mathrm{Ker}(u) \quad \text{et} \quad E_1(p) = \mathrm{Im}(p)$$

> Si λ est une valeur propre de p, alors pour x un vecteur propre de p associé à λ, on a :
>
> $$\lambda^2 x = p^2(x) = p(x) = \lambda x.$$
>
> Comme $x \neq 0_E$, on en déduit que $\lambda = 0$ ou $\lambda = 1$.
>
> - $\lambda = 0$. Pour tout endomorphisme qui admet 0 pour valeur propre, le sous-espace propre associé à 0 est égal à son noyau, donc $E_0(p) = \mathrm{Ker}(u)$.
> - $\lambda = 1$. Pour tout endomorphisme u qui admet $\lambda \neq 0$ pour valeur propre, $E_\lambda(u) \subset \mathrm{Im}(u)$. Par suite, $E_1(p) \subset \mathrm{Im}(p)$.
>
>   Réciproquement, pour $y = p(x) \in \mathrm{Im}(p)$ avec $x \in E$, on a :
>   — *1er cas :* $y = 0_E$. 0_E appartient à tout sous-espace propre donc $0_E \in E_1(p)$.
>   — *2nd cas :* $y \neq 0_E$. Alors on a
>
> $$p(y) = p(p(x)) = p^2(x) = p(x) = y.$$
>
>   Donc y est un vecteur propre associé à la valeur propre 1 d'où $y \in E_1(p)$
>   Par suite, $\mathrm{Im}(p) \subset E_1(p)$.
>   Il en résulte que $E_1(p) = \mathrm{Im}(p)$.

— Soit F, G deux sous-espaces supplémentaires non triviaux. La symétrie s par rapport à F parallèlement à G admet pour valeur propre 1 et -1 et et on a :

$$E_1(s) = F \quad \text{et} \quad E_{-1}(s) = G$$

> Soit p le projecteur sur F parallèlement à G. Alors on a $s = 2p - \mathrm{Id}_E$, donc, pour $\lambda \in \mathbb{K}$ et $x \in E$,
>
> $$s(x) = \lambda x \;\Leftrightarrow\; p(x) = \frac{1+\lambda}{2} x.$$
>
> Par suite, comme p est non trivial, d'après l'exemple précédent, s admet 1 et -1 pour valeurs propres et
>
> $$E_1(s) = E_1(p) = \mathrm{Ker}(p) = F$$
>
> et
>
> $$E_{-1}(s) = E_0(p) = \mathrm{Im}(p) = G.$$

— Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ tel que $f : (x,y) \mapsto (2x, x+y)$. Alors $\mathrm{Sp}(f) = \{2,1\}$; et $E_2(f) = \mathrm{Vect}((1,1))$ et $E_1(f) = \mathrm{Vect}((0,1))$.

> On a, pour $\lambda \in \mathbb{K}$:
>
> $$(*)\ f(x,y) = \lambda(x,y) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ccccc} 2x & & & = & \lambda x \\ x & + & y & = & \lambda y \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ccccc} (2-\lambda)x & & & = & 0 \\ x & + & (1-\lambda)y & = & 0 \end{array}\right.$$
>
> *1er cas :* $\lambda \neq 2$ et $\lambda \neq 1$. Alors $(*)$ est équivalent à
>
> $$\left\{\begin{array}{ccc} x & = & 0 \\ y & = & 0 \end{array}\right.$$
>
> Donc, dans ce cas, $(x,y) = (0,0)$ est la seule solution de $f(x,y) = \lambda(x,y)$ donc λ n'est pas valeur propre de f.
> *2eme cas :* $\lambda = 2$. Alors
>
> $$(*) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ccccc} x & - & y & = & 0 \end{array}\right.$$
>
> Donc, dans ce cas, l'ensemble des solutions de $f(x,y) = 2(x,y)$ est $\{(x,y) \mid x - y = 0\} = \mathrm{Vect}((1,1)) \neq \{0_E\}$ donc $\lambda = 2$ est valeur propre de f et $E_2(f) = \mathrm{Vect}((1,1))$.
>
> *2eme cas :* $\lambda = 2$. Alors
>
> $$(*) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ccc} x & = & 0 \end{array}\right.$$
>
> Donc, dans ce cas, l'ensemble des solutions de $f(x,y) = (x,y)$ est $\{(x,y) \mid x = 0\} = \mathrm{Vect}((0,1)) \neq \{0_E\}$ donc $\lambda = 1$ est valeur propre de f et $E_1(f) = \mathrm{Vect}((0,1))$.

— Soit $E = C^\infty(\mathbb{R})$ et $D \in \mathcal{L}(E)$ tel que $D : f \mapsto f'$. Alors pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, λ est une valeur propre et $x \mapsto e^{\lambda x}$ est un vecteur propre associé à λ.

> Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Pour $f \in E$, on a $f \in \mathrm{Ker}(u - \lambda \mathrm{Id}_E)$ si, et seulement si, $f' - \lambda f = 0$, c'est à dire, f est solution de l'équation différentielle homogène $y' - \lambda y = 0$. Cette équation à pour ensemble de solution $\{x \mapsto C.e^{\lambda x} \mid C \in \mathbb{R}\} \neq \{\mathbf{0}\}$; donc λ est une valeur propre de D et on a :
>
> $$E_\lambda(D) = \{x \mapsto C.e^{\lambda x} \mid C \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}.f$$
>
> où f est le vecteur propre de D associé à λ défini par $f : x \mapsto e^{\lambda x}$.

Exercice 5.

1. Que dire de l'endomorphisme nul 0 ? de l'identité Id_E ? et, en général, d'une homothétie ?
2. Que dire d'une rotation dans $\mathbb{R}^3$?
3. Que dire de l'application $\Delta : P \to P'$ de $\mathbb{R}[X]$ dans lui-même ?

Correction.

1. Pour tout $x \in E \setminus \{0_E\}$, on a $0_E = 0(x) = \lambda x$ si, et seulement si, $\lambda = 0$, donc λ est la seule valeur propre de 0 et $E_0(0) = E$.

   Pour tout $x \in E \setminus \{0_E\}$, on a $x\mathrm{Id}_E = \lambda x$ si, et seulement si, $\lambda = 1$, donc λ est la seule valeur propre de Id_E et $E_1(\mathrm{Id}_E) = E$.

   En raisonnant de la même façon, on obtient que pour une homothétie $\alpha\mathrm{Id}_E$ avec $\alpha \in \mathbb{K}$, α est sa seul valeur propre et $E_\alpha(\alpha\mathrm{Id}_E) = E$.

2. Une rotation de $\mathbb{R}^3$ (d'angle différent d'un multiple de π) n'admet qu'une seule valeur propre. Il s'agit de la valeur propre 1 dont le sous-espace propre associé est l'axe de la rotation.

3. Pour $\lambda \in \mathbb{K}^*$, $P' = \lambda P$ implique $\deg(P) = \deg(P') = \deg(P) - 1$. Ainsi $P = 0$ est la seule solution de $P = \lambda P'$, donc si $\lambda \neq 0$, λ n'est pas une valeur propre de Δ.
   Pour $\lambda = 0$, $P' = 0$ a pour solutions les polynômes constants. Ainsi, 0 est la seule valeur propre de Δ et $E_0(\Delta) = \mathrm{Ker}(\Delta) = P = a_0 \mid a_0 \in \mathbb{K}$.

2. Propriétés des sous-espaces propres

Proposition 6.

Soit $u, v \in \mathcal{L}(E)$. Si u et v commutent, i.e. $u \circ v = v \circ u$ alors les sous-espaces propres de u sont stables par v et les sous-espaces propres de u sont stables par v.

Démonstration.

On suppose que u et v commutent. Comme u commute avec Id_E, alors, pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, u commute avec $v - \mathrm{Id}_E$. Ainsi, d'après la proposition 3, $\mathrm{Ker}(v - \lambda\mathrm{Id}_E)$ est stable par u. Par suite, si $\lambda \in \mathbb{K}$ est une valeur propre de u, $E_\lambda(v) = \mathrm{Ker}(v - \lambda\mathrm{Id}_E)$ est stable par u.

On raisonne de même pour la stabilité par v des sous-espaces propres de u. □

Proposition 7.

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ des valeurs propres de u. Si $\lambda \neq \mu$, alors $E_\lambda(u)$ et $E_\mu(u)$ sont en somme directe i.e.

$$E_\lambda(u) \cap E_\mu(u) = \{0_E\}.$$

Démonstration.

Raisonnons par contraposée. On suppose que $E_\lambda(u) \cap E_\mu(u) \neq \{0_E\}$. Alors il $x \neq 0_E$ tel que $x \in E_\lambda(u)$ et $x \in E_\mu(u)$. Par suite, x est un vecteur propre de u associé à λ et à μ donc

$$\lambda x = u(x) = \mu x.$$

Or $x \neq 0_E$, donc $\lambda = \mu$. □

Remarque 4.

On peut étendre par récurrence le résultat précédent pour un nombre $k \in \mathbb{N}^*$ de valeurs propres de u : si les valeurs propres $\lambda_1, ..., \lambda_k$ sont deux à deux distinctes, alors $E_{\lambda_1}(u)$,...,$E_{\lambda_k}(u)$ sont en somme directe i.e. pour tous $i, j \in [\![1, k]\!]$ avec $i \neq j$

$$E_{\lambda_i}(u) \cap E_{\lambda_j}(u) = \{0_E\}.$$

Corollaire 1.

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ des valeurs propres de u. Si $\lambda \neq \mu$, alors, pour tous vecteurs propres x et y associés à λ et μ respectivement, la famille (x, y) est libre.

Démonstration.

On suppose $\lambda \neq \mu$. Soit $x \in E_\lambda(u) \setminus \{O_E\}$ et $y \in E_\lambda(u) \setminus \{O_E\}$. D'après la proposition précédente, $E_\lambda(u)$ et $E_\mu(u)$ sont en somme directe, donc (x, y) est libre.

Exercice : Soit F, G des sous-espaces vectoriels de E tels que F et G sont en somme directe. Montrer que toute famille (x, y) avec $x \in F \setminus \{O_E\}$ et $y \in G \setminus \{O_E\}$ est libre. $\square$

Corollaire 2.

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, $k \in \mathbb{N}$ et $\lambda_1, ..., \lambda_k \in \mathbb{K}$ des valeurs propres de u. Si $\lambda_1, ..., \lambda_k$ sont deux à deux distinctes, alors

$$\sum_{i=1}^{k} \dim(E_{\lambda_i}(u)) \leq \dim(E).$$

Démonstration.

On suppose $\lambda_1, ..., \lambda_k$ deux à deux distinctes. Alors les sous-espaces propres $E_{\lambda_i}(u)$ sont en somme directe et on a :

$$\sum_{i=1}^{k} \dim(E_{\lambda_i}(u)) = \dim\left(\bigoplus_{i=1}^{k} E_{\lambda_i}(u)\right) \leq \dim(E).$$

$\square$

Théorème 1.

On suppose E de dimension finie n. Tout endomorphisme u de E admet au plus n valeurs propres distinctes ; autrement dit :

$$\#\mathrm{Sp}(u) \leq n.$$

Démonstration.

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On suppose par l'absurde que u admet $k \geq n+1$ valeurs propres deux à deux distinctes $\lambda_1, ..., \lambda_k$. Pour chaque sous-espace propre $E_{\lambda_i}(u)$, on a $\dim(E_{\lambda_i}(u)) \geq 1$, donc :

$$n+1 \leq k \leq \sum_{i=1}^{k} \dim(E_{\lambda_i}(u)) \leq n.$$

Contradiction. Par suite $k < n+1$. □

Remarque 5.

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et F un sous-espace vectoriel de E stable par u. Les valeurs propres de l'endomorphisme $u_F \in \mathcal{L}(F)$ induit par u sur F sont les valeurs propres λ de u telles que $E_\lambda(u) \cap F \neq \{0\}$. Dans ce cas,

$$E_\lambda(u_F) = E_\lambda(u) \cap F.$$

3. Éléments propres d'une matrice carrée

a. Définitions

Définition 8. *Éléments propres d'une matrice*

Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$.

— On dit que $\lambda \in \mathbb{K}$ est une **valeur propre** de A s'il existe $X \in M_{n,1}(\mathbb{K})$ **non nulle** telle que

$$AX = \lambda X.$$

— Soit $\lambda \in \mathbb{K}$ une valeur propre de A. On dit que $X \in M_{n,1}(\mathbb{K})$ est un **vecteur propre de** A **associé à** λ si :

$$X \neq 0_{n,1} \quad \text{et} \quad AX = \lambda X.$$

— Soit $\lambda \in \mathbb{K}$ une valeur propre de A. On appelle **sous-espace propre associé de** A **à** λ le sous-espace vectoriel noté $E_\lambda(A)$ de $M_{n,1}(\mathbb{K})$ défini par :

$$E_\lambda(A) = \operatorname{Ker}(A - \lambda I_n) = \{X \in M_{n,1}(\mathbb{K}) \mid AX = \lambda X\}.$$

— On appelle **spectre** de A et on note $\operatorname{Sp}(A)$, l'ensemble des valeurs propres de A.

Remarque 6.

Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$. On remarque que $\lambda \in \operatorname{Sp}(A)$ si, et seulement si, $A - \lambda I_n \notin GL_n(\mathbb{K})$.

Exercice 6.

Déterminer les valeurs, vecteurs et sous-espaces propres de $A = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{K})$.

Correction.

$\lambda \in \mathbb{K}$ est valeur propre de A si, et seulement si, pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, il existe $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \neq 0_{n,1}$ tel que :

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = \lambda x_j.$$

Pour $\lambda = 0$, ces équations deviennent : $\sum_{i=1}^{n} x_i = 0$; dont il existe des solutions non nulles. Par suite, 0 est une valeur propre de A et on a

$$E_0(A) = \mathrm{Ker}(A) = \{X \mid \sum_{i=1}^{n} x_i = 0\} = \{X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ -\sum_{i=1}^{n-1} x_i \end{pmatrix}\}$$

Pour $\lambda \neq 0$, on obtient $x_i = x_j \ \forall i, j \in [\![1, n]\!]$. Ainsi, ce système d'équations admet des solutions non nulle dans le seul cas $\lambda = n$. Par suite, la deuxième et dernière valeur propre de A est n et on a

$$E_n(A) = \mathrm{Ker}(A - nI_n) = \{\begin{pmatrix} \alpha \\ \vdots \\ \alpha \end{pmatrix} \mid \alpha \in \mathbb{K}\} = \mathbb{K}. \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

On remarque également que $\dim(E_0(A)) = n - 1$ et que $\dim(E_n(A)) = 1$ donc on a :

$$M_{n,1}(\mathbb{K}) = E_0(A) \oplus E_n(A).$$

b. Propriétés du spectre d'une matrice

Proposition 8.

On suppose E de dimension finie n. Soit $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_n)$ une base de E, $u \in \mathcal{L}(E)$ et $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) \in M_n(\mathbb{K})$. Alors on a $\mathrm{Sp}(A) = \mathrm{Sp}(u)$.
De plus, pour tout $\lambda \in \mathrm{Sp}(u)$,

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \in E_\lambda(u) \text{ si, et seulement si, } X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in E_\lambda(A).$$

Démonstration.

L'application $\varphi_{\mathcal{B}} : E \to M_{n,1}(\mathbb{K})$ tel que

$$\varphi_{\mathcal{B}} : x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \mapsto X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

est un isomorphisme.
Ainsi, l'équation $MX = \lambda X$ est équivalente à l'équation $u(x) = \lambda x$ d'où le résultat. □

Proposition 9.

Soit $A, B \in M_n(\mathbb{K})$. Si A et B sont semblables, alors $\mathrm{Sp}(A) = \mathrm{Sp}(B)$ et pour tout $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$, $E_\lambda(A) = E_\lambda(B)$.

Démonstration.

On peut voir deux matrices semblables comme les matrices d'un même endomorphisme dans deux bases différentes. On obtient alors le résultat souhaité en appliquant la proposition précédente. □

Proposition 10.

Soit $\mathbb{K}'$ un sous-corps de $\mathbb{K}$ et $A \in M_n(\mathbb{K}')$. Alors $\mathrm{Sp}_{\mathbb{K}'}(A) \subset \mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(A)$.

Démonstration.

Soit $\lambda \in \mathbb{K}'$ une valeur propre de $A \in M_n(\mathbb{K}') \subset M_n(\mathbb{K})$ et $X \in \mathbb{M}_{n,1}(\mathbb{K}')$ un vecteur propre de A. Comme $\mathbb{M}_{n,1}(\mathbb{K}') \subset \mathbb{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, alors X vu comme matrice à coefficients dans $\mathbb{K}$ vérifie l'équation $AX = \lambda X$. Donc $\lambda \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{K}}(A)$. □

Exercice 7.

Illustrer le résultat précédent en déterminant les spectres dans $\mathbb{R}$ puis dans $\mathbb{C}$ de $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

Démonstration.

Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. On a, pour $\big(x, y\big) \in \mathbb{M}_{n,1}(\mathbb{K})$,

$$M\,\big(x, y\big) = \lambda X \Leftrightarrow \begin{cases} (1+\lambda^2)x = 0 \\ (1+\lambda^2)y = 0 \end{cases}$$

Par suite, si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $1+\lambda^2 > 0$, l'unique solution de ce système est $\big(0, 0\big)$ (et ce, pour toute valeur de λ). Donc $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(M) = \emptyset$.

Dans le cas où $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, on a $1 + \lambda^2 = 0$ si, seulement si $\lambda = \pm i$. Ainsi, $M\left(x, y\right) = \lambda X$ possède des solutions non nulles si, et seulement si, $\lambda = \pm i$. Les valeurs propres de M dans $\mathbb{C}$ sont donc i et $-i$, d'où $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(M) = \{i, -i\}$.

$\square$

Partie C

Polynôme caractéristique

Dans cette partie, l'espace vectoriel E est supposé de dimension finie n.

1. Rappels et compléments sur les polynômes annulateurs

a. Rappels

Soit $P = \sum_{i=0}^{k} a_i X^i \in \mathbb{K}[X]$. On rappelle que les polynômes P en $u \in \mathcal{L}(E)$ et en $A \in M_n(\mathbb{K})$ sont définis par :

$$P(u) = \sum_{i=0}^{k} a_i u^i = a_0 \mathrm{Id}_E + a_1 u + \ldots + a_k u^k \in \mathcal{L}(E),$$

et

$$P(A) = \sum_{i=0}^{k} a_i A^i = a_0 I_n + a_1 A + \ldots + a_k A^k \in M_n(\mathbb{K}).$$

On note, pour $u \in \mathcal{L}(E)$ et $A \in M_n(\mathbb{K})$:

$$\mathbb{K}[u] = \{P(u) \mid P \in \mathbb{K}[X]\} \quad \text{et} \quad \mathbb{K}[u] = \{P(A) \mid P \in \mathbb{K}[X]\}$$

On dit que $P \in \mathbb{K}[X]$ est un **polynôme annulateur** pour u (resp. pour A) si $P(u) = 0$ (resp. si $P(A) = 0_n$).

b. Polynômes annulateurs et éléments propres

Proposition 11.

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$.

i) Pour tous $P, Q \in \mathbb{K}[X]$, $P(u)$ et $Q(u)$ commutent.

ii) Pour tout $P \in \mathbb{K}[X]$, $\mathrm{Ker}(P(u))$ et $\mathrm{Im}(P(u))$ sont stables par u.

Démonstration.

i) On a, pour tous $i, j \in \mathbb{N}$, $u^i \circ u^j = u^j \circ u^i$ et u^i est linéaire donc en déduit que, pour tous $P, Q \in \mathbb{K}[X]$:

$$
\begin{aligned}
P(u)\circ Q(u) &= \sum_{i=0}^{k} a_i u^i \circ (\sum_{j=0}^{l} b_j u^j) \\
&= \sum_{i=0}^{k} a_i \sum_{j=0}^{l} b_j u^i \circ u^j \\
&= \sum_{j=0}^{l} b_j \sum_{i=0}^{k} a_i u^j \circ u^i \\
&= \sum_{j=0}^{l} b_j u^j \circ (\sum_{i=0}^{k} a_i u^i) \\
&= Q(u)\circ P(u)
\end{aligned}
$$

ii) Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. On a $u = Q(u)$ avec $Q = X$, donc u et $P(u)$ commutant d'après i). Donc, d'après la proposition 3, $\mathrm{Ker}(P(u))$ et $\mathrm{Im}(P(u))$ sont stables par u.

□

Proposition 12.

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, $A \in M_n(K)$, $\lambda \in \mathbb{K}$ et $P \in \mathbb{K}[X]$.

— Soit $x \in E$. Si $u(x) = \lambda x$ alors $P(u)(x) = P(\lambda)x$.

— Soit $X \in M_{n,1}(\mathbb{K})$. Si $AX = \lambda X$ alors $P(A)X = P(\lambda)X$.

Démonstration.

— On suppose $u(x) = \lambda x$. Alors on a :

$$P(u)(x) = \sum_{i=0}^{k} a_i u^i(x) = \sum_{i=0}^{k} a_i(\lambda^i x) = (\sum_{i=0}^{k} a_i \lambda^i)x = P(\lambda)x.$$

— On fixe une base $\mathcal{B}$ de E et on raisonne comme pour pour le point précédent en considérant A et X comme les matrices dans la base $\mathcal{B}$ de u et x respectivement.

□

Corollaire 3.

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, $A \in M_n(K)$, $\lambda \in \mathbb{K}$ et $P \in \mathbb{K}[X]$.

— Si λ est une valeur propre de u, alors $P(\lambda)$ est une valeur propre de $P(u)$ et

$$E_\lambda(u) = E_{P(\lambda)}(P(u)).$$

— Si λ est une valeur propre de A, alors $P(\lambda)$ est une valeur propre de $P(A)$ et

$$E_\lambda(A) = E_{P(\lambda)}(P(A)).$$

Proposition 13.

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, $A \in M_n(\mathbb{K})$ et $P \in \mathbb{K}[X]$.

— Si P est un polynôme annulateur de u, alors toute valeur propre de u est une racine de P ; autrement dit, pour $\lambda \in \mathrm{Sp}(u)$, $P(\lambda) = 0$.

— Si P est un polynôme annulateur de A, alors toute valeur propre de A est une racine de P ; autrement dit, pour $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$, $P(\lambda) = 0$.

Démonstration.

On suppose que P est un polynôme annulateur de u, i.e. $P(u) = 0$. Alors, pour $\lambda \in \mathbb{K}$ une valeur propre de u, d'après la proposition précédente, $\mathbb{P}(\lambda)$ est un valeur propre de l'endomorphisme $P(u)$ qui est l'endomorphisme nul. Or 0 est l'unique valeur propre de $0 \in \mathcal{L}(E)$. D'où $P(\lambda) = 0$ i.e. λ est une racine de P. $\square$

Exemple 4.

— Soit p un projecteur. Alors $p^2 = p$ donc $X^2 - X = (X-1)X$ est une polynôme annulateur de p et on a bien $\mathrm{Sp}(p) \subset \{0, 1\}$.

— Soit s une symétrie. Alors $s^2 = \mathrm{Id}_E$ donc $X^2 - 1 = (X-1)(X+1)$ est une polynôme annulateur de s et on a bien $\mathrm{Sp}(s) \subset \{-1, 1\}$.

Remarque 7.

ATTENTION, la réciproque de la proposition précédente est fausse ! Par exemple, $X^2(X-1)$ est un polynôme annulateur pour la matrice I_n mais 0 n'est pas valeur propre de I_n.

Proposition 14.

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, $A \in M_n(\mathbb{K})$ et $P \in \mathbb{K}[X]$.

— Si P est un polynôme annulateur de u et $P(0) \neq 0$, alors u est injectif (et donc bijectif car $\dim(E)$ est finie).

— Si P est un polynôme annulateur de A et $P(0) \neq 0$, alors A est inversible.

Démonstration.

On suppose que $P = \sum_{i=0}^k a_i X^i$ est un polynôme annulateur de u et que $P(0) \neq 0$. Alors $a_0 \neq 0$ et on a :

$$a_0 \mathrm{Id}_E + (\sum_{i=1}^k a_i u^{i-1}) \circ u = P(u) = 0,$$

donc $(\frac{-1}{a_0} \sum_{i=1}^k a_i u^{i-1}) \circ u = \mathrm{Id}_E$. Par suite, u est inversible et son inverse est $\frac{-1}{a_0} \sum_{i=1}^k a_i u^{i-1}$.

On raisonne de même pour $A \in M_n(\mathbb{K})$ pour démontrer que A est inversible et que son inverse est $\frac{-1}{a_0} \sum_{i=1}^k a_i A^{i-1}$. $\square$

Méthode : Calcul d'une inverse grâce à un polynôme annulateur. La démonstration précédente nous donne un moyen pratique de détermination de l'inverse d'un endomorphisme (en dimension finie) ou d'une matrice quand on a un polynôme annulateur P tel que $P(0) \neq 0$. En effet, pour $P = \sum_{i=0}^{k} a_i X^i$ avec $a_0 \neq 0$ un polynôme annulateur de u (resp. de A), on a :

$$u^{-1} = \frac{-1}{a_0} \sum_{i=1}^{k} a_i u^{i-1};$$

respectivement,

$$A^{-1} = \frac{-1}{a_0} \sum_{i=1}^{k} a_i A^{i-1}.$$

Exercice 8.

1. Déterminer l'inverse de $f : (x, y) \mapsto (2x + y, x + 2y)$
2. Déterminer l'inverse de $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Correction.

1. On a $f^2 - 3f = -3\mathrm{Id}_E$, donc $f^{-1} = \frac{-1}{3}(f - 3\mathrm{Id}_E)$.
2. On a $A^2 - 2A = 3I_n$, donc $A^{-1} = \frac{1}{3}(A - 3I_n)$.

2. Polynôme caractéristique

a. Polynôme caractéristique d'une matrice carrée

L'application $M \mapsto \det(M)$ est une fonction polynomiale en les coefficients de M. Ainsi, pour $A \in M_n(\mathbb{K})$ fixée, l'application $\lambda \mapsto \det(\lambda I_n - A)$ est une fonction polynomiale de la variable λ ; ce qui justifie la définition suivante :

Définition 9. *Polynôme caractéristique d'une matrice carrée*

Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$. On appelle **polynôme caractéristique de** A et on note $\chi_A(X)$ l'unique polynôme de $\mathbb{K}[X]$ tel que, pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$:

$$\chi_A(\lambda) = \det(\lambda I_n - A).$$

Remarque 8.

On notera directement $\chi_A(X) = \det(XI_n - A)$. Pour justifier cette notation, il faudrait pouvoir définir le déterminant d'une matrice à coefficients polynomiaux. Et c'est possible : au lieu d'utiliser le corps de base $\mathbb{K}$ pour les coefficients, on utilise le corps $\mathbb{K}(X)$ des fractions rationnelles. La théorie reste la même.

Proposition 15.

Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$. Le polynôme caractéristique χ_A est un polynôme unitaire de degré n et on a :

$$\chi_A(X) = X^n - \mathrm{Tr}(A)X^{n-1} + ... + (-1)^n\det(A).$$

Démonstration.

On a, pour $\lambda \in \mathbb{K}$,

$$\chi_A(\lambda) = \det(\lambda I_n - A) = \begin{pmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & \dots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \dots & \lambda - a_{nn} \end{pmatrix}$$

En utilisant la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_n)$ de $M_{n,1}(\mathbb{K})$, on a, pour $C_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix} \in M_{n,1}(\mathbb{K})$:

$$\chi_A(\lambda) = \det_{\mathcal{B}}(\lambda e_1 - C_1, ..., \lambda e_n - C_n).$$

L'application $\det_{\mathcal{B}}$ est multilinéaire, donc en développant l'expression précédente on remarque que l'on obtient un polynôme de degré au plus n et on a, pour $0 \leq k \leq n$ où c_{n-k} est le coefficient de $\chi_A(\lambda)$ correspondant à λ^{n-k} :

$$\begin{aligned} c_{n-k}\lambda^{n-k} &= \sum_{i_1 < ... < i_k \in [\![1,n]\!]} \det_{\mathcal{B}}(\lambda e_1, ..., -C_{i_1}, ..., \lambda e_j, ..., -C_{i_k}, ..., \lambda e_n) \\ &= (-1)^k \lambda^{n-k} \sum_{i_1 < ... < i_k \in [\![1,n]\!]} \det_{\mathcal{B}}(e_1, ..., C_{i_1}, ..., e_j, ..., C_{i_k}, ..., e_n). \end{aligned}$$

Par suite, on obtient le résultat en évaluant, c_{n-k} pour $k = 0, 1$ et n :

— $c_n = \det_{\mathcal{B}}(e_1, ..., e_n) = 1$

— $c_{n-1} = -\sum_{i=1}^n \det_{\mathcal{B}}(e_1, ..., C_i, ..., e_n) = -\sum_{i=1}^n a_{ii} = -\mathrm{Tr}(A)$.

— $c_0 = (-1)^n\det_{\mathcal{B}}(C_1, ..., C_n) = \det(A)$.

□

Exercice 9.

Soit $A = (a_{ij}) \in M_3(\mathbb{K})$. Exprimer le coefficient c_1 du monôme de degré 1 dans $\chi_A(X)$ en fonction des a_{ij}.

Correction.

On utilise les notations de la démonstrations précédente :

$$\begin{aligned}
c_1 &= \det_{\mathcal{B}}(C_1, C_2, e_3) + \det_{\mathcal{B}}(C_1, e_2, C_3) + \det_{\mathcal{B}}(e_1, C_2, C_3) \\
&= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & a_{13} \\ a_{21} & 1 & a_{23} \\ a_{31} & 0 & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.
\end{aligned}$$

Théorème 2.

Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Le scalaire λ est une valeur propre de A si, et seulement si, λ est une racine du polynôme caractéristique de A. Autrement dit :

$$\lambda \in \mathrm{Sp}(A) \;\Leftrightarrow\; \chi_A(\lambda) = 0.$$

Démonstration.

$\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$

si, et seulement si,

$\mathrm{Ker}(A - \lambda I_n) \neq \{0\}$

si, et seulement si,

$A - \lambda I_n \notin GL_n(\mathbb{K})$

si, et seulement si,

$\lambda I_n - A \notin GL_n(\mathbb{K})$

si, et seulement si,

$\det(\lambda I_n - A) = 0$

si, et seulement si,

$\chi_A(\lambda) = 0.$

$\square$

Corollaire 4.

Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$. *On rappelle que A possède au plus n valeurs propres.*

- Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, alors A a au moins une valeur propre.
- Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et n est impair, alors A a au moins une valeur propre.

Démonstration.

On note χ_A le polynôme caractéristique de A.

— Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, d'après le théorème de D'Alembert-Gauss, χ_A possède au moins une racine, donc d'après le théorème 2, A possède au moins une valeur propre.

— Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et n est impair, on a $\deg(\chi_A) = n$. Par suite, en appliquant le théorème des valeurs intermédiaires ou en raisonnant en terme de facteurs irréductibles, on peut montrer que χ_A possède au moins une racine, donc d'après le théorème 2, A possède au moins une valeur propre.

□

Méthode : Calcul des éléments propres d'une matrice $A \in M_n(\mathbb{K})$ dans le corps $\mathbb{K}$.

- On calcule le polynôme caractéristique χ_A de A.
- On factorise dans $\mathbb{K}$ le polynôme caractéristique χ_A de A et on détermine toutes ses racines.
- Chaque racine $\lambda \in \mathbb{K}$ de χ_A étant une valeur propre de χ_A, on résout le système

$$MX = \lambda X,$$

qui, NÉCESSAIREMENT, admet une infinité de solution (car λ est une valeur propre de A).
- Pour chaque racine λ de χ_A, le sous-espace propre associé à λ est égal à l'ensemble des solutions du système précédent :

$$E_\lambda(A) = \{X \in M_{n,1}(\mathbb{K}) \mid MX = \lambda X\}.$$

En pratique, on cherchera une base $(X_1, ..., X_k)$ de l'ensemble des solutions de $MX = \lambda X$ i.e. une famille libre maximale de vecteurs propres associés à λ, afin d'écrire :

$$E_\lambda(A) = \text{Vect}(X_1, ..., X_n).$$

Exercice 10.

Calculer les valeurs propres et les sous-espaces propres des matrices suivantes dans $\mathbb{R}$ puis dans $\mathbb{C}$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 6 & 0 \\ -2 & 0 & 7 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ \frac{3}{2} & 2 & -4 \\ 2 & 2 & -4 \end{pmatrix}$$

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 4 & 2 & 8 \\ -2 & 2 & -4 \end{pmatrix}$$

Correction.

1. $\chi_A = X^2 - 3X$, d'où $\mathrm{Sp}(A) = \{0, 3\}$ et on a :

$$E_0(A) = \mathrm{Vect}(\begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}) \text{ et } E_3(A) = \mathrm{Vect}(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix})$$

2. $\chi_B = X^3 - X^2 - 3X - 1$, d'où $\mathrm{Sp}(B) = \{-1, 1-\sqrt{2}, 1+\sqrt{2}\}$ et on a :

$$E_1(B) = \mathrm{Vect}(\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{5}{2} \end{pmatrix}),\ E_{1-\sqrt{2}}(B) = \mathrm{Vect}(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \sqrt{2}-1 \end{pmatrix}) \text{ et } E_{1+\sqrt{2}}(B) = \mathrm{Vect}(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -\sqrt{2}-1 \end{pmatrix})$$

3. $\chi_C = X^3 - 15X^2 + 72X - 108$, d'où $\mathrm{Sp}(B) = \{3, 6\}$ et on a :

$$E_3(C) = \mathrm{Vect}(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}) \text{ et } E_6(C) = \mathrm{Vect}(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix})$$

4. $\chi_D = X^3 + 2X^2 + X + 2$, d'où $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(D) = \{-2\}$ et $\mathrm{Sp}(D) = \{\pm i\}$. On a :

$$E_{-2}(D) = \mathrm{Vect}(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix})$$

et dans le cas de $\mathbb{C}$, on a de plus :

$$E_i(D) = \mathrm{Vect}(\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2}(i+2) \\ 1 \end{pmatrix}) \text{ et } E_{-i}(D) = \mathrm{Vect}(\begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2}(i+2) \\ 1 \end{pmatrix})$$

5. $\chi_E = X^3 + X^2 - 30X$, d'où $\mathrm{Sp}(E) = \{-6, 0, 5\}$ et on a :

$$E_{-6}(E) = \mathrm{Vect}(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}),\ E_0(E) = \mathrm{Vect}(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}) \text{ et } E_5(E) = \mathrm{Vect}(\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{20}{11} \\ \frac{2}{11} \end{pmatrix})$$

Exercice 11. *Matrice compagnon*

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $a_0, ...a_{n-1} \in \mathbb{K}$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \ddots & & \vdots & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$

Montrer que $\chi_A = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + ... + a_1 X + a_0$.

En déduire que pour tout polynôme unitaire $P \in \mathbb{K}[X]$, il existe une matrice $A \in M_n(\mathbb{K})$ telle que $P = \chi_A$.

Correction.

Voici deux méthodes pour obtenir le résultat (on explicite ici seulement la deuxième) :
1) On développe le déterminant $\det(\lambda I_n - A)$ par rapport à la dernière colonne.

2) On a $\det(\lambda I_n - A) = \begin{vmatrix} X & 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_0 \\ -1 & X & \cdots & \cdots & 0 & a_1 \\ 0 & -1 & \ddots & & \vdots & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & X & a_{n-2} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & X + a_{n-1} \end{vmatrix}$

En faisant l'opération : $L_0 \leftarrow \sum_{i=0}^{n-1} X^i L_i$, on obtient :

$\det(\lambda I_n - A) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & P(X) \\ -1 & X & \cdots & \cdots & 0 & a_1 \\ 0 & -1 & \ddots & & \vdots & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & X & a_{n-2} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & X + a_{n-1} \end{vmatrix}$

où $P(X) = X^n + a_{n-1}X^{p-1} + ... + a_1 X + a_0$.
On obtient alors le résultat en développant par rapport à la 1ere ligne.
Pour $P = X^n + a_{n-1}X^{p-1} + ... + a_1 X + a_0$ un polynôme unitaire de $\mathbb{K}[X]$, la matrice compagnon A de la question précédente a pour polynôme caractéristique le polynôme P.

Proposition 16.

Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$. Si A est triangulaire (supérieure ou inférieure), alors $\chi_A = \prod_{i=1}^{n}(X - \alpha_i)$ où $\alpha_1, ..., \alpha_n$ sont les coefficients diagonaux de A.

Démonstration.

On a, pour $\lambda \in K$,

$$\chi_A(\lambda) = \det(\lambda I_n - A) = \begin{vmatrix} \lambda - \alpha_1 & * & \dots & * \\ 0 & \lambda - \alpha_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \dots & 0 & \lambda - \alpha_n \end{vmatrix}$$

D'où $\chi_A(\lambda) = \prod_{i=1}^{n}(\lambda - \alpha_i)$. □

b. Polynôme caractéristique d'un endomorphisme

Lemme 1.

Soit $A, B \in M_n(\mathbb{K})$. Si A et B sont semblables, alors $\chi_A = \chi_B$.

Démonstration.

On suppose A et B semblables. Alors il existe $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $B = PAP^{-1}$. Par suite, on a :

$$\chi_B = \det(XI_n - PAP^{-1}) = \det(P(XI_n - A)P^{-1}) = \frac{\det(P)}{\det(P)}\det(\lambda I_n - A) = \chi_A.$$

$\square$

Définition 10.

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On appelle **polynôme caractéristique** de u et on note $\chi_u(X)$ le polynôme caractéristique de toute matrice représentant u, i.e. si $\mathcal{B}$ est une base de E et si $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$,

$$\chi_u := \chi_A$$

Remarque 9.

Le lemme précédent nous permet d'affirmer que le polynôme caractéristique d'un endomorphisme est bien défini : en effet, si A et B sont des matrices représentant u, elles sont semblables et donc ont même polynôme caractéristique.

Proposition 17.

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On a, pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$:

$$\chi_u(\lambda) = \det(\lambda \mathrm{Id}_E - u) = \lambda^n - \mathrm{Tr}(u)\lambda^{n-1} + ... + (-1)^n \det(u).$$

Démonstration.

Il suffit d'écrire $\chi_u = \chi_A$ avec A une matrice représentant u. On a alors

$$\chi_u = \chi_A = \lambda^n - \mathrm{Tr}(A)\lambda^{n-1} + ... + (-1)^n \det(A) = \lambda^n - \mathrm{Tr}(u)\lambda^{n-1} + ... + (-1)^n \det(u);$$

et de plus, la matrice $\lambda I_n - A$ est une matrice représentant $\lambda \mathrm{Id}_E - u$, donc

$$\chi_u = \chi_A = \det(\lambda I_n - A) = \det(\lambda \mathrm{Id}_E - u).$$

$\square$

Théorème 3.

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Le scalaire λ est une valeur propre de u si, et seulement si, λ est une racine du polynôme caractéristique de u. Autrement dit :

$$\lambda \in \mathrm{Sp}(u) \iff \chi_u(\lambda) = 0.$$

Démonstration.

On écrit $\chi_u = \chi_A$ avec A une matrice représentant u et on a, pour $\lambda \in \mathbb{K}$:

$$\lambda \in \mathrm{Sp}(u) \iff \lambda \in \mathrm{Sp}(A) \iff \chi_A(\lambda) = 0 \iff \chi_u(\lambda) = 0.$$

□

Remarque 10.

Comme pour le cas des matrices, on en déduit que si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ou si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ avec $\dim(E)$ impair, alors tout endomorphisme de E possède au moins une valeur propre.

c. Polynôme caractéristique d'un endomorphisme induit

Proposition 18.

Soit F un sous-espace vectoriel de E et $u \in \mathcal{L}(E)$. Si F est stable par u, alors le polynôme caractéristique χ_{u_F} de l'endomorphisme u_F induit par u sur F divise χ_u

Démonstration.

On suppose que F est stable par u. Sot $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_n)$ une base de E adaptée à F où $\mathcal{B}' = (e_1, ..., e_p)$ forme une base de F. On pose $M = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ et $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(u_F)$. Alors il existe $B \in M_{p,n-p}(\mathbb{K})$ et $C \in M_{n-p,n-p}(\mathbb{K})$ telles que :

$$M = \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline 0 & C \end{array}\right)$$

Par suite, on a, en notant $Q = \det(XI_{n-p} - C) \in \mathbb{K}[X]$:

$$\begin{aligned} \chi_u &= \det(XI_n - M) \\ &= \left|\begin{array}{c|c} XI_p - A & -B \\ \hline 0 & XI_{n-p} - C \end{array}\right| \\ &= \det(XI_p - A).\det(XI_{n-p} - C) \\ &= \chi_A.Q \\ \chi_u &= \chi_{u_F} Q. \end{aligned}$$

Il en résulte que $\chi_{u_F} | \chi_u$. □

Remarque 11.

- On a alors $\mathrm{Sp}(u_F) \subset \mathrm{Sp}(u)$;
- Si χ_u est scindé (resp. scindé à racines simples) alors χ_{u_F} l'est aussi ;
- Par une récurrence finie, on obtient que si $E = \bigoplus_{i=1}^{k} F_i$ et chaque F_i est stable par u, alors

$$\chi_u = \prod_{i=1}^{k} \chi_{u_{F_i}} = \chi_{u_{F_1}} \cdots \chi_{u_{F_k}}.$$

3. Ordre de multiplicité d'une valeur propre

Définition 11. *Multiplicité d'une valeur propre*

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda \in \mathrm{Sp}(u)$. On définit l'**ordre de multiplicité** - ou plus simplement la **multiplicité**) de la valeur propre λ de u et on note $m(\lambda)$ l'ordre de multiplicité de λ comme racine du polynôme caractéristique χ_u de u.
On définit de même la multiplicité d'une valeur propre d'une matrice $A \in M_n(\mathbb{K})$.

Remarque 12.

- Autrement dit, si $\mathrm{Sp}(u) = \{\lambda_1, ..., \lambda_k\}$ avec $\lambda_1, ...\lambda_k$ deux à deux distinctes alors

$$\chi_u = P \prod_{i=1}^{k} (X - \lambda_i)^{m_i},$$

  où $P \in \mathbb{K}[X]$ n'a pas de racine dans $\mathbb{K}$ et on a, pour tout $i \in [\![1, k]\!]$:

$$m(\lambda_i) = m_i.$$

- On a donc :

$$\deg(P) + m(\lambda_1) + ... + m(\lambda_k) = n.$$

- En particulier, pour λ une valeur propre, on a : $1 \leq m(\lambda) \leq n = \dim(E)$.

Proposition 19.

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et λ une valeur propre de u. On a :

$$1 \leq \dim(E_\lambda(u)) \leq m(\lambda).$$

Démonstration.

On note $F = E_\lambda(u)$. Alors F est stable par u et l'endomorphisme induit $u_F \in \mathcal{L}(F)$ de u sur F est égal à l'homothétie $\lambda \mathrm{Id}_F$. Comme F est un sous-espace propre de u, on a $p = \dim(F) \geq 1$ et d'après la proposition précédente, on a :

$$(X-\lambda)^p = \chi_{u_F} | \chi_u = Q(X-\lambda)^{m(\lambda)},$$

avec $Q \in \mathbb{K}[X]$ et $(X-\lambda)$ premiers entre eux. Donc, d'après le lemme de Gauss, $(X-\lambda)^p | (X-\lambda)^{m(\lambda)}$.

Il en résulte que $1 \leq p = \dim(E_\lambda(u)) \leq m(\lambda)$. $\square$

Corollaire 5.

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Si λ est une valeur propre simple de u, alors $\dim(E_\lambda(u)) = 1$.

Démonstration.

On suppose que λ est une valeur propre simple de u, d'après la proposition précédente, $1 \leq \dim(E_\lambda(u)) \leq 1$ donc $\dim(E_\lambda(u)) = 1$. $\square$

Partie D

Diagonalisation et trigonalisation

Dans cette partie, E désigne un espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Endomorphismes et matrices diagonalisables

Définition 12. *Endomorphisme/matrice diagonalisable*

— Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On dit que u est **diagonalisable** s'il existe une base dans laquelle la matrice de u est diagonale.

— Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$. On dit que A est **diagonalisable** si elle semblable à une matrice diagonale, i.e. s'il existe $D \in M_n(\mathbb{K})$ diagonale et $P \in GL_n(\mathbb{K})$ tels que :

$$A = PDP^{-1}.$$

Proposition 20.

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Alors u est diagonalisable si, et seulement si, il existe une base de vecteurs propres de u.

Démonstration.

- $(\Rightarrow)$. Si u est diagonalisable, il existe une base $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_n)$ de E telle que $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \mathrm{diag}(\alpha_1, ..., \alpha_n)$. Par suite, on a, pour chaque $i \in [\![1,]\!]n$, par définition des coefficients de A,

$$u(e_i) = \alpha_i e_i \text{ et } e_i \neq 0_E.$$

Donc les éléments de $\mathcal{B}$ sont des vecteurs propres de u.

- $(\Leftarrow)$. Si $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_n)$ est une base de vecteurs propres associés respectivement à $\alpha_1, ..., \alpha_n \in \mathbb{K}$, alors :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \alpha_n \end{pmatrix} \begin{array}{c} e_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ e_n \end{array} \\ \begin{array}{cccc} u(e_1) & \dots & \dots & u(e_n) \end{array} \end{array}.$$

Donc la matrice de u est diagonale dans la base $\mathcal{B}$.

□

Exercice 12.

1. Soit $\mathbb{K}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à n. L'endomorphisme de $\mathbb{K}_n[X]$, $\Delta_n : P \mapsto P'$ est-il diagonalisable ?
2. Montrer que que les projecteurs et les symétries de E sont diagonalisables.

Correction.

1. Δ ne possède qu'une seule valeur propre 0, et les vecteurs propres associés à 0 sont les polynômes constants (non nuls). Ainsi, on ne peut pas obtenir une base de $\mathbb{K}_n[X]$ formée de vecteurs de propres de Δ_n.
2. Soit p le projecteur sur F parallèlement à G. Alors $E = F \oplus G$. On considère alors $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_p, e_{p+1}, ..., e_n)$ une base de E adaptée à $F \oplus G$. Par suite, on a :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(p) = \left(\begin{array}{c|c} I_p & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$$

Donc la matrice de p dans $\mathcal{B}$ est diagonale, d'où p est diagonalisable.

Soit s la symétrie associée au projecteur p sur F parallèlement à G i.e. $s = 2p - \text{Id}_E$. On considère de nouveau la base adaptée $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_p, e_{p+1}, ..., e_n)$ précédente. Par suite, on a :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(s) = \left(\begin{array}{c|c} 2I_p & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) - \left(\begin{array}{c|c} I_p & 0 \\ \hline 0 & I_{n-p} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} I_p & 0 \\ \hline 0 & -I_{n-p} \end{array}\right)$$

Donc la matrice de s dans $\mathcal{B}$ est diagonale, d'où s est diagonalisable.

Proposition 21.

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et $A \in M_n(\mathbb{K})$ une matrice représentant u dans une certaine base de E. Alors A est diagonalisable si, et seulement si, u est diagonalisable.

Démonstration.

u est diagonalisable si, et seulement si, il existe une matrice D diagonale représentant u. Or A et D représentent toutes deux u si, et seulement si, A et D sont semblables. Donc u est diagonalisable si, et seulement si, A est diagonalisable. $\square$

Corollaire 6.

Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$. Alors A est diagonalisable si, et seulement si, l'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ canoniquement associé à A est diagonalisable.

Démonstration.

On applique la proposition précédente au cas particulier : $E = \mathbb{K}^n$, $A = (a_{i,j}) \in M_n(\mathbb{K})$ et

$u \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n)$ tel que :

$$u : (x_1, ..., x_n) \mapsto \left(\sum_{j=1}^{n} a_{1,j}x_j, ..., \sum_{j=1}^{n} a_{n,j}x_j \right).$$

$\square$

Proposition 22.

Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$. Alors A est diagonalisable si, et seulement si, alors il existe D une matrice diagonale tel que $A = PDP^{-1}$ où $P = \left(\begin{array}{c|c|c} C_1 & \dots & C_n \end{array} \right)$ et $C_1, ..., C_n$ constituent une base de $M_{n,1}(\mathbb{K})$ formée de vecteurs propres de A.

Démonstration.

On suppose A diagonalisable. Alors l'endomorphisme u de $\mathbb{K}^n$ canoniquement associé à A est diagonalisable, donc il existe une base $\mathcal{B}' = (\varepsilon_1, ..., \varepsilon_n)$ de $\mathbb{K}^n$ formée de vecteurs propres de u. Soit P la matrice de passage de la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathbb{K}^n$ vers la base $\mathcal{B}'$. La formule de changement de base pour les matrices représentant un endomorphisme nous donne

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(u) = P^{-1}\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)P,$$

Or $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = A$ et $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'} = D = \mathrm{diag}(\lambda_1, ..., \lambda_n)$ où λ_i est la valeur propre associé à ε_i. Par suite,

$$A = PDP^{-1}.$$

$\square$

2. Diagonalisation

Proposition 23.

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ avec $\mathrm{Sp}(u) = \{\lambda_1, ..., \lambda_k\}$ avec $\lambda_1, ..., \lambda_k$ deux à deux distincts. Les assertions suivantes sont équivalentes :

i) u est diagonalisable ;

ii) $E = \bigoplus_{i=1}^{k} E_{\lambda_i}(u)$;

iii) $n = \dim(E) = \sum_{i=1}^{k} \dim(E_{\lambda_i}(u))$.

Démonstration.

On démontre ii)$\Leftrightarrow$iii), i)$\Leftarrow$ii) puis i)$\Rightarrow$ii).

- ii)⇔iii). Les $E_{\lambda_i}(u)$ sont en somme directe, donc on a

$$\dim(\bigoplus_{i=1}^{k} E_{\lambda_i}(u)) = \sum_{i=1}^{k} \dim(E_{\lambda_i}(u)).$$

  Ainsi, $\bigoplus_{i=1}^{k} E_{\lambda_i}(u) = E$ si, et seulement si, $\sum_{i=1}^{k} \dim(E_{\lambda_i}(u)) = n$.

- i)⇐ii). On suppose u diagonalisable. Alors il existe une base de E formée de vecteurs propres de u i.e. formée d'éléments appartenant aux sous-espaces propres de u. Par suite, tout élément de E se décompose en somme d'éléments des sous-espaces propres qui sont en somme directe ; donc E est égal à la somme directe des sous-espaces propres.

- ii)⇐i). On suppose $\bigoplus_{i=1}^{k} E_{\lambda_i}(u) = E$. Si on considère une base $\mathcal{B}$ de E adapté à cette somme directe, on a :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} \lambda_1 I_{\dim(E_{\lambda_1}(u))} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_k I_{\dim(E_{\lambda_k}(u))} \end{pmatrix}$$

  qui est une matrice diagonale, donc u est diagonalisable.

□

Proposition 24.

Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$ avec $\mathrm{Sp}(A) = \{\lambda_1, ..., \lambda_k\}$ avec $\lambda_1, ..., \lambda_k$ deux à deux distincts. Les assertions suivantes sont équivalentes :

i) A est diagonalisable ;

ii) $M_{n,1}(\mathbb{K}) = \bigoplus_{i=1}^{k} E_{\lambda_i}(A)$;

iii) $n = \sum_{i=1}^{k} \dim(E_{\lambda_i}(A))$.

Démonstration.

On applique la proposition précédente à l'endomorphisme canoniquement associé à A. □

Exercice 13.

1. Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$. On suppose que A possède une unique valeur propre λ. Montrer que A est diagonalisable si, et seulement si, $A = \lambda I_n$.
2. Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$ une matrice nilpotente i.e. vérifiant qu'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^k = 0_n$. Montrer que A est diagonalisable si, et seulement si, $A = 0$.

Correction.

1. On suppose que λ est la seule valeur propre de A. Si A est diagonalisable, alors il existe D diagonale et $P \in GL_n(\mathbb{K})$ tels que $A = PDP^{-1}$. Comme A et D sont semblables, ils ont même polynôme caractéristique et donc même spectre $\mathrm{Sp}(A) = \{\lambda\} = \mathrm{Sp}(D)$. Or D s'écrit sous la forme $\mathrm{diag}(\alpha_1, ..., \alpha_n)$ et donc son spectre vérifie :
$$\{\alpha_1, ..., \alpha_n\} = \mathrm{Sp}(D) = \{\lambda\}.$$
Par suite, $\alpha_1 = ...\alpha_n = \lambda$ et donc $D = \lambda I_n$. Il en résulte que
$$A = PDP^{-1} = P\lambda I_n P^{-1} = \lambda PP^{-1} = \lambda I_n.$$

2. Soit A une matrice nilpotente. Alors il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^k = 0_n$. Ainsi le polynôme X^k est un polynôme annulateur pour A. Or, si P est un polynôme annulateur de A, toute valeur propre de A est racine de P. Or le polynôme X^k n'a que 0 pour racine. Donc si A possède une valeur propre, ça ne peut être que 0.
De plus, 0 est bien valeur propre de A, car A n'est pas inversible. Ainsi, A n'a que 0 pour valeur propre, donc, d'après la question 1., A est diagonalisable si, et seulement si, $A = 0I_n = 0_n$.

Remarque 13.

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et $\mathrm{sp}(u) = \{\lambda_1, ..., \lambda_k\}$ avec $\lambda_1, ..., \lambda_k$ deux à deux distinctes. Si u est diagonalisable, alors $E = \bigoplus_{i=1}^k E_{\lambda_i}(u)$ et si on note p_{λ_m} le projecteur sur $E_{\lambda_m}(u)$ parallèlement à $\bigoplus_{\substack{i=1 \\ i \neq m}}^k E_{\lambda_i}(u)$, alors
$$u = \lambda_1 p_{\lambda_1} + ... + \lambda_k p_{\lambda_k}$$

Théorème 4. *Théorème de diagonalisation d'un endomorphisme*

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Alors u est diagonalisable si, et seulement si, il vérifie les deux conditions suivantes :

i) le polynôme caractéristique χ_u de u est scindé.

ii) la multiplicité de chaque valeur propre de u est égale à la dimension de son sous-espace propre associé, i.e. pour tout $\lambda \in \mathrm{Sp}(u)$,
$$m(\lambda) = \dim(E_\lambda(u)).$$

Démonstration.

- $(\Rightarrow)$. On suppose u diagonalisable. On note $\lambda_1, ..., \lambda_k$ ses valeurs propres (deux à deux distinctes). Alors $E = \bigoplus_{i=1}^k E_{\lambda_i}(u)$ et l'endomorphisme u_i induit sur $E_{\lambda_i}(u)$ par u est égal à l'homothétie $u_i = \lambda_i \mathrm{Id}_{E_{\lambda_i}(u)}$.
De plus, en notant $d_i = \dim(E_{\lambda_i}(u))$ on a
$$\chi_u = \chi_{u_1} ... \chi_{u_k} = (X - \lambda_1)^{d_1} ... (X - \lambda_k)^{d_k}.$$

Donc, χ_u est scindé et pour tout $i \in [\![1,k]\!]$, $m(\lambda_i) = d_i$.

- $(\Leftarrow)$. On suppose i) et ii). D'après i), on a $\chi_u = \prod_{i=1}^{k}(X-\lambda_i)^{m_i}$ où les λ_i sont deux à deux distincts. Donc $\mathrm{Sp}(u) = \{\lambda_1, ..., \lambda_k\}$ et on a, d'après ii) :

$$n = \deg(\chi_u) = \sum_{i=1}^{n} m_i = \sum_{i=1}^{n} m(\lambda_i) = \sum_{i=1}^{n} \dim(E_{\lambda_i}(u)).$$

Donc d'après la proposition 23, u est diagonalisable.

□

Théorème 5. *Théorème de diagonalisation d'une matrice*

Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$. Alors A est diagonalisable si, et seulement si, il vérifie les deux conditions suivantes :

i) le polynôme caractéristique χ_A de A est scindé.

ii) la multiplicité de chaque valeur propre de A est égale à la dimension de son sous-espace propre associé, i.e. pour tout $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$,

$$m(\lambda) = \dim(E_\lambda(A)).$$

Démonstration.

On raisonne de la même manière que pour le théorème précédent. □

Corollaire 7.

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et $A \in M_n(\mathbb{K})$. On rappelle que $\dim(E) = n$.

— Si le polynôme caractéristique de u est scindé à racines simples i.e. si u possède n valeurs propres distinctes, alors u est diagonalisable.

— Si le polynôme caractéristique de A est scindé à racines simples i.e. si A possède n valeurs propres distinctes, alors A est diagonalisable.

Démonstration.

Si χ_u est scindé à racines simples alors, pour tout $\lambda \in \mathrm{Sp}(u)$, on a $1 \leq \dim(E_\lambda(u)) \leq m(\lambda) = 1$, donc $\dim(E_\lambda(u)) = m(\lambda)$. On applique alors le théorème précédent. □

Proposition 25. *Forme de la matrice diagonalisée*

Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$ où $\mathrm{Sp}(A) = \{\lambda_1, ..., \lambda_k\}$ avec $\lambda_1, ..., \lambda_k$ deux à deux distinctes. Si A est diagonalisable, alors $A = PDP^{-1}$ où :

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 I_{m(\lambda_1)} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_k I_{m(\lambda_k)} \end{pmatrix}$$

et P est la matrice de passage de la base canonique $\mathcal{B}$ de $M_n(\mathbb{K})$ vers une base $\mathcal{B}' = (C_1, ..., C_n)$ adaptée à la somme directe $\bigoplus_{i=1}^{k} E_{\lambda_i}(A)$, i.e.

$$P = \left(\; C_1 \mid ... \mid C_n \; \right)$$

Remarque 14.

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ avec $\mathrm{Sp}(u) = \{\lambda_1, ..., \lambda_k\}$ où $\lambda_1, ..., \lambda_k$ deux à deux distinctes et A sa matrice dans une certaine base $\mathcal{B}$. Si u est diagonalisable, alors $A = PDP^{-1}$ où D à la même forme que dans la proposition précédente et P est la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ de $M_n(\mathbb{K})$ vers une base $\mathcal{B}' = (C_1, ..., C_n)$ adaptée à la somme directe $\bigoplus_{i=1}^{k} E_{\lambda_i}(u)$.

Méthode : Diagonaliser une matrice $A \in M_n(\mathbb{K})$ dans $\mathbb{K}$.

- On calcule le polynôme caractéristique χ_A de A. S'il est scindé dans $\mathbb{K}$, on continue ; s'il ne l'est pas, A n'est pas diagonalisable.
- On calcule les éléments propres de A et on détermine la dimension de chaque sous-espace propre de A. Si la multiplicité de **chaque** valeur propre est égale à la dimension du sous-espace associé, alors A est diagonalisable et on continue ; sinon A n'est pas diagonalisable.
- On met A sous la forme $A = PDP^{-1}$ où P est la matrice formée par les vecteurs propres de A

Exercice 14.

Diagonaliser (si c'est possible) les matrices suivantes dans $\mathbb{R}$ puis $\mathbb{C}$:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 10 \\ 0 & 6 & 8 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} i & -1 & i \\ 0 & 1-3i & -2 \\ 0 & -4 & 1+3i \end{pmatrix}$$

Correction.

1. $\chi_A = X^3 + 3X^2 - 2 = (X-1)(X+2)^2$, d'où $\mathrm{Sp}(A) = \{-2, 1\}$ et on a :
$$E_1(A) = \mathrm{Vect}(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}) \text{ et } E_3(A) = \mathrm{Vect}(\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix};\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix})$$
d'où A est diagonalisable et $A = PDP^{-1}$ avec
$$D = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & -2 & 0\\0 & 0 & -2\end{pmatrix} \quad P = \begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\1 & 0 & 1\\1 & -1 & -1\end{pmatrix}$$

2. $\chi_B = X^3 - 7X^2 + 4X + 12 = (X+1)(X-2)(X+6)$ donc B est diagonalisable (polynôme scindé à racine simples) et $\mathrm{Sp}(B) = \{-1, 2, 6\}$ et on a :
$$E_{-1}(B) = \mathrm{Vect}(\begin{pmatrix}1\\\frac{11}{31}\\-\frac{21}{62}\end{pmatrix}), \quad E_2(B) = \mathrm{Vect}(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix})$$
$$E_6(B) = \mathrm{Vect}(\begin{pmatrix}1\\4\\0\end{pmatrix}).$$
d'où B est diagonalisable et $B = PDP^{-1}$ avec
$$D = \begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\0 & 2 & 0\\0 & 0 & 6\end{pmatrix} \quad P = \begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\\frac{12}{31} & 0 & 4\\-\frac{21}{62} & 0 & 0\end{pmatrix}$$

3. $\chi_C = X^3 + 4X = X(X^2+4) = X(X-2i)(X+2i)$, d'où C n'est pas diagonalisable dans $\mathbb{R}$ et $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(B) = \{0\}$ et C est diagonalisable dans $\mathbb{C}$ (polynôme scindé à racines simples).

Exercice 15.

Chercher, si c'est possible, une base qui diagonalise l'endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$ défini par :
$$u : P = a + bX + cX^2 \mapsto u(P) = (3b+c) + bX + (-a+3b+3c)X^2$$
et, le cas échéant, donner sa matrice dans cette base.

Correction.

$$\mathcal{B} = \{1 - X - X^2, X, 1 - 3X - 2X^2\} \quad D = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 2\end{pmatrix}$$

3. Endomorphismes et matrices trigonalisables

Définition 13. *Endomorphisme/matrice trigonalisable*

— Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On dit que u est **trigonalisable** s'il existe une base dans laquelle la matrice de u est triangulaire supérieure.

— Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$. On dit que A est **trigonalisable** si elle semblable à une matrice triangulaire supérieure, i.e. s'il existe $T \in M_n(\mathbb{K})$ triangulaire supérieure et $P \in GL_n(\mathbb{K})$ tels que :

$$A = PTP^{-1}.$$

Proposition 26. *Forme d'une matrice trigonalisée*

Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$ et $\mathrm{Sp}(A) = \{\lambda_1, ..., \lambda_k\}$ avec $\lambda_1, ..., \lambda_k$ deux à deux distincts. Si A est trigonalisable, alors A est semblable à :

$$T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & * \\ 0 & \ddots & \ddots & & & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \lambda_1 & \ddots & & * & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & 0 & & \ddots & \lambda_k & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & & & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & \lambda_k \end{pmatrix}$$

Démonstration.

A et T ont même polynôme caractéristique qui est scindé et dont les racines sont $\lambda_1, ..., \lambda_k$ de multiplicités respectives $m(\lambda_1), ..., m(\lambda_k)$. Or T étant triangulaire, les coefficients diagonaux de T sont exactement les racines de χ_T et le nombre d'apparition d'un coefficient sur la diagonale est exactement sa multiplicité dans χ_T. D'où la forme annoncée pour T. $\square$

Proposition 27.

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et $A \in M_n(\mathbb{K})$ une matrice représentant u dans une certaine base de E. Alors A est trigonalisable si, et seulement si, u est trigonalisable.

Démonstration.

u est trigonalisable si, et seulement si, il existe une matrice T triangulaire représentant u. Or A et T représentent toutes deux u si, et seulement si, A et T sont semblables. Donc u est trigonalisable si, et seulement si, A est trigonalisable. $\square$

Corollaire 8.

Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$. Alors A est trigonalisable si, et seulement si, l'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ canoniquement associé à A est trigonalisable.

Démonstration.

On applique la proposition précédente au cas particulier : $E = \mathbb{K}^n$, $A = (a_{i,j}) \in M_n(\mathbb{K})$ et $u \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n)$ tel que :

$$u : (x_1, ..., x_n) \mapsto \left(\sum_{j=1}^{n} a_{1,j} x_j, ..., \sum_{j=1}^{n} a_{n,j} x_j \right).$$

□

4. Trigonalisation

Théorème 6. *Théorème de trigonalisation*

— Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$. Alors A est trigonalisable si, et seulement si, son polynôme caractéristique χ_A est scindé.
— Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Alors u est trigonalisable si, et seulement si, son polynôme caractéristique χ_u est scindé.

Démonstration.

On démontre la partie concernant les matrices. Pour les endomorphismes, il suffit d'utiliser l'équivalence $u \in \mathcal{L}(E)$ est trigonalisable si, et seulement si, une matrice représentant u est trigonalisable et de remarquer que u et sa matrice ont le même polynôme caractéristique.

- ($\Rightarrow$). Si A est trigonalisable, alors il existe une matrice triangulaire supérieure T semblable à A. Par suite on a $\chi_A = \chi_T$ et le polynôme caractéristique d'une matrice triangulaire est scindé. Donc χ_A est scindé.
- ($\Leftarrow$). On considère la propriété

$$\mathcal{P}_n : \text{"}\forall A \in M_n(\mathbb{K}),\ \chi_A \text{ est scindé} \quad \Rightarrow \quad A \text{ est trigonalisable."}$$

Montrons que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{P}_n$ est vraie par récurrence $n \in \mathbb{N}^*$.

— *Initialisation.* Pour $n = 1$, la propriété $\mathcal{P}_0$ est triviale : toute matrice de dimension 1 est triangulaire !

— *Hérédité.* Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose la propriété $\mathcal{P}_n$ vraie.

Soit $A \in M_{n+1}(\mathbb{K})$. On suppose que on polynôme caractéristique χ_A est scindé. Par suite, χ_A admet au moins une racine λ qui est valeur propre de A. Soit $C_1 \in M_{n+1,1}(\mathbb{K})$ un vecteur propre de A associé à λ. On complète C_1 en une base $\mathcal{B} = \{C_1, C_2, ..., C_{n+1}\}$ de $M_{n+1,1}(\mathbb{K})$. Alors, en posant $Q = \left(\begin{array}{c|c|c} C_1 & \dots & C_{n+1} \end{array} \right)$ i.e. Q est la matrice de passage de la base canonique de $M_{n+1,1}(\mathbb{K})$ vers $\mathcal{B}$, on a

$$Q^{-1}AQ = \left(\begin{array}{c|c} \lambda & B \\ \hline 0 & C \end{array} \right).$$

où $B \in M_{1,n}(\mathbb{K})$ et $C \in M_n(\mathbb{K})$.
Alors on a :
$$\chi_A = \chi_{Q^{-1}AQ} = (X - \lambda)\chi_C$$
Or comme χ_A est scindé et $\chi_C | \chi_A$, alors χ_C est scindé et ainsi, par hypothèse de récurrence, C est trigonalisable. Par suite, il existe $T' \in M_n(\mathbb{K})$ triangulaire et $R \in GL_n(\mathbb{K})$ tels que $C = RT'R^{-1}$. Alors, si on pose :
$$P' = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & R \end{array}\right) \quad \text{et} \quad P = QP'$$
on obtient :
$$P^{-1}AP = P'^{-1}Q^{-1}AQP' = P'^{-1} = \left(\begin{array}{c|c} \lambda & B \\ \hline 0 & C \end{array}\right) P' = \left(\begin{array}{c|c} \lambda & BR \\ \hline 0 & T' \end{array}\right).$$
Donc $T = P^{-1}AP$ est triangulaire ; d'où A est trigonalisable. Par suite, $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie. Ce qui achève la récurrence.

□

Corollaire 9.

- Toute matrice de $M_n(\mathbb{C})$ est trigonalisable.
- Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, tout endomorphisme de E est trigonalisable.

Démonstration.

□

Proposition 28.

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ avec $\mathrm{Sp}(u) = \{\lambda_1, ..., \lambda_k\}$ avec $\lambda_1, ..., \lambda_k$ deux à deux distincts. Si u est trigonalisable, alors :
$$\mathrm{Tr}(u) = \sum_{i=1}^{k} m(\lambda_i)\lambda_i \quad \text{et} \quad \det(u) = \prod_{i=1}^{k} \lambda_k^{m(\lambda_k)}.$$

Démonstration.

On suppose u trigonalisable. Alors il existe T triangulaire qui représente u et T est de la forme :

$$T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & \dots & \dots & \dots & \dots & * \\ 0 & \ddots & \ddots & & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \lambda_1 & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \lambda_k & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & \lambda_k \end{pmatrix}$$

d'où le résultat. □

Méthode : Trigonalisation d'une matrice.

- On calcule le polynôme caractéristique de la matrice. S'il est **scindé**, la matrice est trigonalisable, on continue.
- On détermine les sous-espaces propres ; on compare la dimension de chacun de ces sous-espaces et la multiplicité des valeurs propres correspondantes. Si chaque dimension est égale à la multiplicité correspondante, on diagonalise ; sinon, on doit trigonaliser.

  Dans le cas général, il n'y a pas de méthode à connaître ; mais nous allons voir comment trigonaliser une matrice A dans les différents cas possibles en dimension 3 sur des exemples. Dans la suite, u désignera l'endomorphisme canonique de $\mathbb{K}^3$ associé à A.

Méthode : Trigonalisation d'une matrice de $M_3(\mathbb{K})$ non diagonalisable.

1er cas : Deux valeurs propres distinctes de multiplicité 1 et 2 et chaque sous-espace propre de dimension 1.

Exemple représentatif :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

On a $\chi_A = (X-1)(X-2)^2$ et les sous-espaces propres sont :

$$E_1(A) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \text{ et } E_2(A) = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$$

- On forme une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ de $\mathbb{K}^3$ en prenant $e_1 = (1,1,1)$ et $e_2 = (0,1,-1)$ et en choisissant e_3 de manière à compléter en une base la famille e_1, e_2.
- On obtient alors $A = PTP^{-1}$ où :

$$T = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & * \\ 0 & 2 & * \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

  et P est formé des vecteurs e_1, e_2, e_3 mis en colonne.

Par exemple : On choisit $e_3 = e_1 \wedge e_2 = (-2, 1, 1)$ et on a :

$$u(e_3) = {}^t\left(A \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = (-8, 4, -8) = -4e_1 + 6e_2 + \mathbf{2}e_3.$$

d'où, dans ce cas, $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

Méthode : Trigonalisation d'une matrice de $M_3(\mathbb{K})$ non diagonalisable.

2eme cas : Une valeur propre triple et le sous-espace propre associé de dimension 2.

Exemple représentatif :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

On a $\chi_A = (X-1)^3$ et le sous-espace propre associé à 1 est :

$$E_1(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

- On forme une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ de $\mathbb{K}^3$ en prenant $e_1 = (1, 0, 0)$ et $e_2 = (0, -1, 1)$ et en choisissant e_3 de manière à compléter en une base la famille e_1, e_2.
- On obtient alors $A = PTP^{-1}$ où :

$$T = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & * \\ 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

  et P est formé des vecteurs e_1, e_2, e_3 mis en colonne.

  Par exemple : On choisit $e_3 = (0, 1, 1)$ et on a $u(e_3) = (8, 4, -8) = 2e_2 + \mathbf{1}.e_3$. d'où, dans ce cas, $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Méthode : Trigonalisation d'une matrice de $M_3(\mathbb{K})$ non diagonalisable.

3eme cas : Une valeur propre triple λ et le sous-espace propre associé de dimension 1.

On utilise ici la méthode de réduction de Jordan (par souci de simplicité) :
On cherche une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ de $\mathbb{K}^3$ telle que :

- On cherche $e_3 \notin \mathrm{Ker}\left((u - \lambda \mathrm{Id}_E)^2\right)$;
- on pose $e_2 = u(e_3) - \lambda e_3$; (d'où $u(e_3) = e_2 + \lambda e_3$) ;
- on pose $e_1 = u(e_2) - \lambda e_2$; (d'où $u(e_2) = e_1 + \lambda e_2$).

Et on prouvera plus tard qu'on a nécessairement $u(e_1) = \lambda e_1$ grâce au théorème de Cayley-

Hamilton. Ainsi, on obtient $A = PTP^{-1}$ où :

$$T = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

et P est formé des vecteurs e_1, e_2, e_3 mis en colonne.

Exercice 16.

Trigonaliser les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2 & -4 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}+i & \frac{1}{2} & -i \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}+i & -i \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Correction.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

$$B = \begin{pmatrix} -i & -i & 0 \\ i & -i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i & 1 & 0 \\ 0 & i & 1 \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -i & -i & 0 \\ i & -i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1}$$

Partie E

Polynômes annulateurs et réduction

Dans cette partie, l'espace vectoriel E est supposé de dimension finie n.

1. Rappels sur le polynôme minimal

Dans le chapitre précédent, on a introduit la notion de polynôme minimal d'un élément d'une algèbre, on rappelle ici les principaux points de ce concept dans le contexte des algèbres de dimension finie $\mathcal{L}(E)$ et $M_n(\mathbb{K})$.

Proposition 29. *Idéal annulateur*

- Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. L'ensemble $I_u = \{P \in \mathbb{K}[X] \mid P(u) = 0\}$ appelé **idéal annulateur de** u est un idéal de $\mathbb{K}[X]$ non réduit à $\{0\}$.
- Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$. L'ensemble $I_A = \{P \in \mathbb{K}[X] \mid P(A) = 0_n\}$ appelé **idéal annulateur de** A est un idéal de $\mathbb{K}[X]$ non réduit à $\{0\}$.

Démonstration.

On a déjà démontré ce résultat dans la partie Algèbres du chapitre Structures algébriques. On rappelle tout de même la démonstration dans notre contexte :

I_u est un idéal de $K[X]$ comme noyau du morphisme d'anneaux $f : P \mapsto P(u)$ de $\mathbb{K}[X]$ dans $\mathcal{L}(E)$.

Montrons que u possède un polynôme annulateur non nul. Comme $\mathcal{L}(E)$ est de dimension finie égale à n^2, la famille $(\mathrm{Id}_E, u, ..., u^{n^2})$ est liée car composée de $n^2 + 1$ vecteurs dans un espace de dimension n^2 donc il existe $\lambda_0, ..., \lambda_{n^2} \in \mathbb{K}$ non tous nuls tels que

$$\sum_{i=0}^{n^2} \lambda_i u^i = 0.$$

Par suite $P = \sum_{i=0}^{n^2} \lambda_i X^i$ est un polynôme annulateur non nul de u d'où $I_u \neq \{0\}$. □

Définition 14. *Polynôme minimal*

- Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On appelle **polynôme minimal de** u et on note π_u le générateur unitaire de l'idéal annulateur I_u de u. En particulier, $I_u = \pi_u \mathbb{K}[X]$.
- Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$. On appelle **polynôme minimal de** A et on note π_A le générateur unitaire de l'idéal annulateur I_A de A. En particulier, $I_A = \pi_A \mathbb{K}[X]$.

Remarque 15.

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$.

— Si E est de dimension $n \geq 1$, $\deg(\pi_u) \geq 1$.

— On a $\deg(\pi_u) = 1$ si, et seulement si, u est une homothétie.

Proposition 30.

— Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et $d = \deg(\pi_u)$. La famille $(\mathrm{Id}_E, u, ..., u^{d-1})$ est une base de l'algèbre $\mathbb{K}[u] = \{P(u) \mid P \in \mathbb{K}[X]\}$ engendré par u.

— Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$ et $d = \deg(\pi_A)$. La famille $(I_n, A, ..., A^{d-1})$ est une base de l'algèbre $\mathbb{K}[A] = \{P(A) \mid P \in \mathbb{K}[X]\}$ engendré par A.

Démonstration.

On a déjà démontré ce résultat dans la partie Algèbres du chapitre Structures algébriques. On rappelle tout de même la démonstration dans notre contexte :

On suppose que u admet un polynôme minimal π_u avec $d = \deg(\pi_u)$. Montrons que $\left(u^k\right)_{0 \leq k \leq d-1}$ est une base de $\mathbb{K}[u]$.

- *Famille libre :* soit $\lambda_0, ..., \lambda_{d-1} \in \mathbb{K}$ des scalaires tels que $\displaystyle\sum_{k=1}^{d-1} \lambda_k u^k = 0$. S'il existe $i \in [\![0, d-1]\!]$ tel que $\lambda_i \neq 0$, $\sum_{k=1}^{d-1} \lambda_k X^k$ est un polynôme annulateur non nul de u de degré $< d = \pi_u$. Contradiction car π_u est de degré minimal parmi les polynômes annulateurs. Donc pour tout $i \in [\![0, d-1]\!]$, $\lambda_i = 0$. Donc la famille $\left(u^k\right)_{0 \leq k \leq d-1}$ est libre.
- *Famille génératrice :* Soit $P(u) \in \mathbb{K}[u]$. Alors $P \in \mathbb{K}[X]$ et en faisant la division euclidienne de ce polynôme par π_u, on obtient qu'il existe $Q, R \in \mathbb{K}[X]$ tels que $P = \pi_u Q + R$ et $\deg(R) < d - 1$. Par suite,
$$P(u) = \underbrace{\pi_u(u)}_{=0_A} Q(u) + R(u) = R(u).$$
et R est de degré $\leq d - 1$ donc il existe $\lambda_0, ..., \lambda_{d-1} \in \mathbb{K}$ tels que $R = \displaystyle\sum_{k=1}^{d-1} \lambda_k X^k$. Il en résulte que :
$$P(u) = R(u) = \sum_{k=1}^{d-1} \lambda_k X^k \in \mathrm{Vect}\left(u^k\right)_{0 \leq k \leq d-1}.$$

Donc $\left(u^k\right)_{0 \leq k \leq d-1}$ est une base de $\mathbb{K}[u]$. $\square$

2. Théorème de Cayley-Hamilton

Proposition 31.

— Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors $\lambda \in \mathrm{Sp}(u)$ si, et seulement si, $\pi_u(\lambda) = 0$.
— Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$ si, et seulement si, $\pi_A(\lambda) = 0$.

Démonstration.

- ($\Rightarrow$). Si λ est une valeur propre de u, alors λ est racine de tout polynôme annulateur de u. Or π_u est un polynôme annulateur de u. Donc $\pi_u(\lambda) = 0$.
- ($\Leftarrow$). On suppose $\pi_u(\lambda) = 0$. Alors on a la factorisation
$$\pi_u = (X - \lambda)P,$$
où $P \in \mathbb{K}[X]$ et $\deg(P) = \deg(\pi_u) - 1 < \deg(\pi_u)$. Par suite,
$$0 = \pi_u(u) = (u - \lambda \mathrm{Id}_E) \circ P(u).$$
Supposons par l'absurde que λ n'est pas valeur propre de u. Alors $u - \lambda \mathrm{Id}_E$ est injective et donc bijective car E est de dimension finie; d'où $P(u) = 0$. Ce qui est impossible par minimalité du degré du polynôme minimal parmi les polynômes annulateurs de u.
Il en résulte que λ est une valeur propre de u.

□

Corollaire 10.

— Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Alors π_u et χ_u ont les mêmes racines.
— Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$. Alors π_A et χ_A ont les mêmes racines.

Démonstration.

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. D'après la proposition précédente, les racines de π_u sont exactement les valeurs propres de u qui sont également les racines de χ_u. □

Théorème 7. *Théorème de Cayley-Hamilton*

— Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Le polynôme caractéristique χ_u de u est un polynôme annulateur de u i.e.
$$\chi_u(u) = 0.$$
— Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$. Le polynôme caractéristique χ_A de A est un polynôme annulateur de A i.e.
$$\chi_A(A) = 0_n.$$

Démonstration Non exigible.

On suppose u trigonalisable. Soit $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_n)$ une base de trigonalisation de u. On note

$T = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ et on a, pour $\lambda_1, ..., \lambda_n$ les n valeurs propres de u (pas forcément distinctes donc) :

$$T = (t_{ij}) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & \dots & * \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Par suite, on a $\chi_u = \chi_T = \prod_{i=1}^{n}(X - \lambda_i)$. Pour $i = 1, ..., n$, on note $F_i = \mathrm{Vect}(e_1, ..., e_i)$, $F_0 = \{0_E\}$ et $P_i = X - \lambda_i$. Alors on a :

$$\chi_u(u) = P_1(u) \circ ... \circ P_n(u).$$

Montrons que pour $i \in [\![1, n]\!]$, que $P_i(u)(F_i) \subset F_{i-1}$.

- Cas $i = 1$. On a
$$P_1(u)(e_1) = u(e_1) - \lambda_1 e_1 = \lambda_1 e_1 - \lambda_1 e_1 = 0_E,$$
d'où $P_1(u)(F_1) \subset \{0_E\} = F_0$.
- Cas $i \in [\![1, n-1]\!]$. Pour $x \in F_i$, on a $x = \alpha e_i + \underbrace{x_{i-1}}_{\in F_{i-1}}$.
Comme F_{i-1} est stable par u, alors F_{i-1} est stable par $P_i(u)$ d'où $P_i(u)(x_{i-1}) \in F_{i-1}$. De plus, on a :
$$\begin{aligned} P_i(u)(e_i) &= u(e_i) - \lambda_i e_i \\ &= (t_{1i}e_1 + ... + t_{ii-1}e_{i-1} + \underbrace{t_{ii}}_{=\lambda_i} e_i) - \lambda_i e_i \\ &= t_{1i}e_1 + ... + t_{ii-1}e_{i-1} \in F_{j-1}. \end{aligned}$$
Donc $P_i(u)(x) = \alpha P_i(u)(e_i) + P_i(u)(x_{i-1}) \in F_{j-1}$.

Alors, on a bien, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, que $P_i(u)(F_i) \subset F_{i-1}$.
Ainsi, on a :

$$\begin{aligned} \chi_u(u)(E) &= P_1(u) \circ ... \circ P_{n-1}(u) \circ P_n(u)(F_n) \\ &\subset P_1(u) \circ ... \circ P_{n-1}(u)(F_{n-1}) \\ &\subset \\ &\vdots \\ &\subset \\ &\subset P_1(u)(F_1) \\ &\subset F_0 = \{0_E\}. \end{aligned}$$

Et donc :

$$\chi_u(u)(E) = \{0_E\} \text{ i.e. } \chi_u(u) = 0.$$

Si u n'est pas trigonalisable, alors on considère une matrice $A \in M_n(\mathbb{K})$ représentant u comme une matrice de $M_n(\mathbb{C})$. Alors A est trigonalisable dans $M_n(\mathbb{C})$ et donc l'endomorphisme u' de $\mathbb{C}^n$ canoniquement associé à A l'est aussi. D'après ce qui précède, on a $\chi_{u'}(u') = 0$ et donc $\chi_A(A) = 0_n$. Le polynôme caractéristique de A est à coefficients dans $\mathbb{K}$, donc on a également $\chi_u(u) = 0$.

Dans tous les cas, on $\chi_u(u) = 0$. $\square$

Remarque 16.

Autrement dit, π_u divise χ_u (et π_A divise χ_A).

Exercice 17.

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Montrer que A est inversible et exprimer A^{-1} en fonction de puissances de A.

Correction.

On a $\chi_A = X^3 - 3X^2 + 4X - 2$, donc d'après le théorème de Cayley-Hamilton,

$$0_n = \chi_A(A) = A^3 - 3A^2 + 4A - 2.$$

Par suite,

$$A^{-1} = \frac{1}{2}(A^2 - 3A + 4I_3).$$

3. Lemme de décomposition des noyaux

Théorème 8. *Lemme de décomposition des noyaux*

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et $P_1, ..., P_k \in \mathbb{K}[X]$ deux à deux premiers entre eux. Alors, pour $P = P_1 ... P_k$, on a :

$$\mathrm{Ker} P(u) = \bigoplus_{i=1}^{k} \mathrm{Ker} P_i(u).$$

Démonstration.

On montre le résultat par récurrence sur $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$.

— *Initialisation : $k = 2$* Soit $A, B \in \mathbb{K}[X]$ premiers entre eux et $P = AB$. On procède par double inclusion.

Comme $\mathbb{K}[u]$ est commutatif, on a :

$$A(u) \circ B(u) = P(u) = B(u) \circ A(u),$$

d'où $\mathrm{Ker}(A(u)) \subset \mathrm{Ker}(P(u))$ et $\mathrm{Ker}(B(u)) \subset \mathrm{Ker}(P(u))$. Par suite,

$$\mathrm{Ker}(A(u)) + \mathrm{Ker}(B(u)) \subset \mathrm{Ker}(P(u))$$

D'après le théorème de Bézout, il existe $U, V \in \mathbb{K}[X]$ tels que $AU + BV = 1$, donc

$$A(u) \circ U(u) + B(u) \circ V(u) = \mathrm{Id}_E. \quad (*)$$

- Montrons tout d'abord que la somme $\mathrm{Ker}(A(u)) + \mathrm{Ker}(B(u))$ est directe i.e. $\mathrm{Ker}(A(u)) \cap \mathrm{Ker}(B(u)) = \{0_E\}$.

Soit $x \in \mathrm{Ker}(A(u)) \cap \mathrm{Ker}(B(u))$. Alors on a, d'après $(*)$ et en utilisant le fait que $\mathbb{K}[u]$ est une algèbre commutative :

$$x = U(u)\left(\underbrace{A(u)(x)}_{=0_E}\right) + V(u)\left(\underbrace{B(u)(x)}_{=0_E}\right) = 0_E.$$

Par suite, $\mathrm{Ker}(A(u)) \cap \mathrm{Ker}(B(u)) = \{0_E\}$.

- Soit $x \in \mathrm{Ker}(P(u))$. On note $y = A(u) \circ U(u)(x)$ et $z = B(u) \circ V(u)(x)$. D'après $(*)$, $x = y + z$, et de plus, on a :

$$A(u)(z) = A(u) \circ B(u) \circ U(u)(x) = P(u) \circ U(u)(x) = U(u)\left(\underbrace{P(u)(x)}_{=0_E}\right) = 0_E$$

donc $z \in \mathrm{Ker}(A(u))$ et, par le même raisonnement, on obtient $y \in \mathrm{Ker}(B(u))$.
Par suite, $x = z + y \in \mathrm{Ker}(A(u)) \oplus \mathrm{Ker}(B(u))$.

Il en résulte que
$$\mathrm{Ker}(A(u)) \oplus \mathrm{Ker}(B(u)) = \mathrm{Ker}(P(u)).$$

— *Hérédité :* Soit $k \geq 2$. On suppose le propriété vraie pour k. Soit $P = P_1 ... P_{k+1}$ avec $P_1, ..., P_{k+1}$ premiers entre eux deux à deux.
On pose $A = P_1...P_k$ et $B = P_{k+1}$. Alors A et B sont premiers entre eux, $P = AB$. D'après le raisonnement effectué pour l'initialisation, on a $\mathrm{Ker}(P(u)) = \mathrm{Ker}(A(u)) + \mathrm{Ker}(B(u))$. Par suite, d'après l'hypothèse de récurrence, on a :

$$\mathrm{Ker}(P(u)) = \mathrm{Ker}(A(u)) + \mathrm{Ker}(B(u)) = \bigoplus_{i=1}^{k} \mathrm{Ker} P_i(u) \oplus \mathrm{Ker} P_{k+1}(u).$$

Ce qui achève le raisonnement par récurrence.

□

Corollaire 11.

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et $P_1, ..., P_k \in \mathbb{K}[X]$ deux à deux premiers entre eux. Alors $P = P_1...P_k$ est un polynôme annulateur de u si, et seulement si,

$$E = \bigoplus_{i=1}^{k} \mathrm{Ker} P_i(u).$$

Démonstration.

On applique le lemme de décomposition des noyaux pour obtenir :

$$\mathrm{Ker} P(u) = \bigoplus_{i=1}^{k} \mathrm{Ker} P_i(u).$$

Or P est un polynôme annulateur de u si, et seulement si, on a $\mathrm{Ker} P(u) = E$, d'où le résultat. $\square$

Remarque 17.

On retrouve que pour p un projecteur et s une symétrie, $\mathrm{Ker}(p)$ et $\mathrm{Ker}(p - \mathrm{Id}_E)$ sont supplémentaires ainsi que $\mathrm{Ker}(s - \mathrm{Id}_E)$ et $\mathrm{Ker}(s + \mathrm{Id}_E)$.

Exercice 18.

1. Soit $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a^2 + 4b > 0$ et $\mathcal{U}$ l'ensemble des suites récurrentes doubles dont le terme général vérifie $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$. Montrer que $\mathcal{U}$ est le noyau de l'endomorphisme $P(s)$ où
$$P = X^2 - aX - b \quad \text{et} \quad s : u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto (u_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}.$$
En déduire une expression explicite de $\mathcal{U}$.
2. Soit $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a^2 + 4b > 0$ et $\mathcal{S}$ l'ensemble des fonctions f de $C^\infty(\mathbb{R})$ telles que $f'' = af' + bf$. Montrer que $\mathcal{S}$ est le noyau de l'endomorphisme $P(D)$ où
$$P = X^2 - aX - b \quad \text{et} \quad D : f \mapsto f'.$$
En déduire une expression explicite de $\mathcal{S}$.

Correction.

1. On a, pour $u = (u_n) \in \mathbb{R}^\mathbb{N}$,
$$P(s)(u) = s^2(u) - as(u) - b\mathrm{id}(u) = u_{n+2} - au_{n+1} - bu_n$$
Donc on a bien $\mathcal{U} = \mathrm{Ker}(P(s)) = \{u \in \mathbb{R}^\mathbb{N} \mid P(s)(u) = 0\}$. On a $\Delta(P) = a^2 + 4b > 0$ par hypothèse, donc P possède deux racines $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ distinctes. Ainsi $P = (X - r_1)(X - r_2)$ et $X - r_1, X - r_2$ sont premiers entre eux, donc, d'après le lemme de décomposition des noyaux :
$$\mathcal{U} = \mathrm{Ker}(P(s)) = \mathrm{Ker}(s - r_1\mathrm{id}) \oplus \mathrm{Ker}(s - r_2\mathrm{id}).$$
Or, pour $r \in \mathbb{R}$,
$$\mathrm{Ker}(s - r\mathrm{id}) = \{u = (u_n) \mid \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = ru_n\} = \{(Ar^n)_{n\in\mathbb{N}} \mid A \in \mathbb{R}\}.$$
Il en résulte que :
$$\mathcal{U} = \{(Ar_1^n + Br_2^n)_{n\in\mathbb{N}} \mid A, B \in \mathbb{R}\}.$$
2. Par un raisonnement similaire, on obtient, pour r_1, r_2 les deux racines réelles distinctes de P :
$$\mathcal{S} = \{t \mapsto \alpha e^{r_1 t} + \beta e^{r_2 t} \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\},$$
en remarquant que :
$$\mathrm{Ker}(D - r\mathrm{id}) = \{f \in C^\infty(\mathbb{R}) \mid f' = rf\} = \{t \mapsto \alpha e^{rt} \mid \alpha \in \mathbb{R}\}.$$

4. Polynômes annulateurs et diagonalisation

Théorème 9.

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On a équivalence entre les assertions :

i) u est diagonalisable ;

ii) u possède un polynôme annulateur scindé à racines simples ;

iii) le polynôme minimal π_u de u est scindé à racines simples.

Le même résultat est valable pour $A \in M_n(\mathbb{K})$.

Démonstration.

On démontre i)$\Rightarrow$ ii) $\Rightarrow$ iii) $\Rightarrow$ i)

- i)$\Rightarrow$ ii). On suppose u diagonalisable et on note $\mathrm{Sp}(u) = \{\lambda_1, ..., \lambda_k\}$ avec $\lambda_1, ..., \lambda_k$ deux à deux distinctes. Alors on a
$$E = \bigoplus_{i=1}^{k} E_{\lambda_i}(u) = \bigoplus_{i=1}^{k} \mathrm{Ker}(u - \lambda_i \mathrm{Id}_E).$$
Par suite, d'après le corollaire 11, le polynôme scindé à racines simples $P = \prod_{i=1}^{k}(X - \lambda_i)$ est annulateur de u.
- ii)$\Rightarrow$ iii). Si u possède un polynôme annulateur scindé à racines simples P alors $\pi_u | P$ et donc π_u est scindé à racines simples.
- iii)$\Rightarrow$ i). On suppose que π_u est scindé à racines simples i.e. $\pi_u = \prod_{i=1}^{k}(X - \lambda_i)$ avec $\lambda_1, ..., \lambda_k$ deux à deux distincts. Alors $\mathrm{Sp}(u) = \{\lambda_1, ..., \lambda_k\}$ et d'après le corollaire 11, on a : $E = \bigoplus_{i=1}^{k} \mathrm{Ker}(u - \lambda_i \mathrm{Id}_E) = \bigoplus_{i=1}^{k} E_{\lambda_i}(u)$. Par suite, u est diagonalisable.

$\square$

Corollaire 12.

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et F un sous-espace vectoriel de E stable par u. Si u est diagonalisable, alors l'endomorphisme $u_F \in \mathcal{L}(F)$ induit par u sur F est diagonalisable.

Démonstration.

Si u est diagonalisable, alors π_u est scindé à racines simples d'après le théorème précédent. Or on a $\pi_u(u_F) = 0$: en effet, pour tout $x \in F$, $\pi_u(u_F)(x) = \pi_u(u)(x) = 0_E$; par suite, u_F possède un polynôme annulateur scindé à racines simples. D'après le théorème précédent, u_F est diagonalisable. $\square$

5. Endomorphismes nilpotents et matrices nilpotentes

On rappelle ici la notion de nilpotence évoquée dans le chapitre Structures algébriques usuelles :

Définition 15. *Endomorphisme nilpotent/Matrice nilpotente*

— Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On dit que u est **nilpotent** s'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $u^k = 0$. On appelle alors **indice de nilpotence** le plus petit entier $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $u^p = 0$.

— Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$. On dit que A est **nilpotente** s'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^k = 0_n$. On appelle alors **indice de nilpotence** le plus petit entier $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^p = 0_n$.

Exemple 5.

Une matrice triangulaire dont la diagonale est composée de 0 - on appelle ce type de matrices des matrices triangulaires **strictes** - est nilpotente.

Proposition 32.

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On a équivalence entre les assertions :

i) u est nilpotent ;

ii) $\chi_u = X^n$ (où $n = \dim(E)$) ;

On a le même résultat pour $A \in M_n(\mathbb{K})$.

Démonstration.

- i)$\Rightarrow$ ii). On suppose u nilpotent d'indice p. Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$ une matrice représentant u dans une certaine base $\mathcal{B}$ de E. La matrice A est trigonalisable dans $M_n(\mathbb{C})$. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre de A et $X \in M_{n,1}(\mathbb{C})$ un vecteur propre associé. Alors on a, pour tout $k \in \mathbb{N}$:
$$A^k X = \lambda^k X.$$
Or $A^p = 0$ donc $\lambda^p X = 0$ avec $X \neq 0$, d'où $\lambda^p = 0$. Ainsi, $\lambda = 0$, donc 0 est la seule valeur propre de A. A étant trigonalisable, son polynôme caractéristique est donc $\chi_A = X^n$. Par suite, $\chi_u = \chi_A = X^n$.
- ii)$\Rightarrow$ i). On suppose $\chi_u = X^n$. (On peut conclure directement avec le théorème de Cayley-Hamilton mais on n'a pas besoin d'utiliser un si puissant résultat ici). Comme χ_u est scindé, u est trigonalisable et donc il existe une base $\mathcal{B}$ dans laquelle la matrice T de u est triangulaire stricte car 0 est la seule valeur propre de u. Or T est nilpotente car triangulaire stricte, donc il existe $k \geq 1$ tel que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u^k) = T^k = 0_n$. Ainsi, $u^k = 0$.

$\square$

Corollaire 13.

— Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Alors u est nilpotent si, et seulement si, u est trigonalisable et $\mathrm{Sp}(u) = \{0\}$.

— Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$. Alors A est nilpotente si, et seulement si, A est trigonalisable et $\mathrm{Sp}(A) = \{0\}$.

Démonstration.

On a u est nilpotent si, et seulement si, $\chi_u = X^n$ si, et seulement si, u est trigonalisable et son unique valeur propre est 0. $\square$

Proposition 33.

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Si u est nilpotent d'indice p, alors :

- pour tout $x \in E$ tel que $u^{p-1}(x) \neq 0_E$, la famille $(x, u(x), ..., u^{p-1}(x))$ est libre ;
- $p \leq n = \dim(E)$.

Démonstration.

- Soit $a_0, ..., a_{p-1} \in \mathbb{K}$ tels que $\sum_{i=0}^{p-1} a_i u^i(x) = 0_E$. On a :

$$0_E = u^{p-1}(\sum_{i=0}^{p-1} a_i u^i(x)) = a_0 u^{p-1}(x).$$

  donc $a_0 = 0$ car $u^{p-1}(x) \neq 0_E$, puis, on a :

$$0_E = u^{p-2}(\sum_{i=1}^{p-1} a_i u^i(x)) = a_1 u^{p-1}(x).$$

  d'où $a_1 = 0$. On continue ainsi de proche en proche pour trouver finalement :

$$a_0 = a_1 = ... = a_{p-1} = 0.$$

  Donc $(x, u(x), ..., u^{p-1}(x))$ est une famille libre.
- Comme p est le plus petit entier de $\mathbb{N}^*$ tel que $u^p = 0$, alors $u^{p-1} \neq 0$. Par suite, il existe $x \neq 0_E$ tel que $u^{p-1}(x) \neq 0_E$. Ainsi, en utilisant le point précédent, la famille $(x, u(x), ..., u^{p-1}(x))$ est une famille libre de E de p vecteurs, par suite, $p \leq \dim(E)$.
  On pouvait également utiliser le théorème de Cayley-Hamilton : on a $\chi_u = X^n$, donc $u^n = 0$ d'où $p \leq n = \dim(E)$ par minimalité de l'indice de nilpotence p.

$\square$

Théorème 10.

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et π_u son polynôme minimal. Si π_u est scindé de racines (pas forcément simples) deux à deux distinctes $\lambda_1, ..., \lambda_k \in \mathbb{K}$, alors

$$E = \bigoplus_{i=1}^{k} F_i$$

où, pour $i \in [\![1, k]\!]$, F_i est un sous-espace stable par u et

$$u_{F_i} = \lambda_i \mathrm{Id}_{F_i} + n_i,$$

avec n_i un endomorphisme nilpotent de F_i.

Démonstration.

On suppose que $\pi_u = \prod_{i=1}^{k}(X-\lambda_i)^{p_i}$. Alors, comme $\pi_u(u)=0$, d'après le lemme de décomposition des noyaux, on a :

$$E = \mathrm{Ker}(\pi_u) = \bigoplus_{i=1}^{k} \mathrm{Ker}\left((u-\lambda_i \mathrm{Id}_E)^{p_i}\right).$$

Pour $i=1,...,k$, on pose $F_i = \mathrm{Ker}\left((u-\lambda_i\mathrm{Id}_E)^{p_i}\right)$. Soit $i \in [\![1,k]\!]$. Alors F_i est stable par u car u et le polynôme en u, $(u-\lambda_i\mathrm{Id}_E)^{p_i}$ commutent.
On note alors u_{F_i} l'endomorphisme induit par u sur F_i. On a, pour tout $x \in F_i$:

$$(u_{F_i}-\lambda_i\mathrm{Id}_{F_i})^{p_i}(x) = (u-\lambda_i\mathrm{Id}_E)^{p_i}(x) = 0_E$$

donc $(u_{F_i}-\lambda_i\mathrm{Id}_{F_i})^{p_i} = 0 \in \mathcal{L}(F_i)$. Par suite $n_i = u_{F_i}-\lambda_i\mathrm{Id}_{F_i} \in \mathcal{L}(F_i)$ est nilpotent et on a bien :

$$u_{F_i} = \lambda_i\mathrm{Id}_{F_i} + n_i.$$

□

Exercice 19.

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On suppose que son polynôme minimal π_u est scindé i.e. $\pi_u = \prod_{i=1}^{k}(X-\lambda_i)^{p_i}$ où λ_1,...,λ_k sont deux à deux distincts.
Pour $i \in [\![1,k]\!]$, on pose $F_i = \mathrm{Ker}\left((u-\lambda_i\mathrm{Id}_E)^{p_i}\right)$.

Montrer que, pour tout $i \in [\![1,k]\!]$,

$$\dim(F_i) = m(\lambda_i),$$

où $m(\lambda_i)$ est la multiplicité de la valeur propre λ_i (dans le polynôme χ_u).

On admettra que si le polynôme minimal est scindé, alors le polynôme caractéristique l'est aussi.

Correction.

Soit $j \in [\![1,k]\!]$. Alors F_j est stable par u. Comme dans la démonstration précédente, on remarque que $(X-\lambda_j)^{p_j}$ est un polynôme annulateur de u_{F_j}. Ainsi, comme $\pi_{u_{F_j}} | (X-\lambda_j)^{p_j}$, $\pi_{u_{F_j}} = (X-\lambda_j)^{q_j}$ avec $q_j \leq p_j$ (on peut même prouver qu'il y a égalité).
Par suite, en utilisant le fait que $\pi_{u_{F_j}} | \chi_{u_{F_j}}$, on obtient $\chi_{u_{F_j}} = (X-\lambda_j)^{\dim(F_j)}$ car $\pi_{u_{F_j}}$ et $\chi_{u_{F_j}}$ sont scindés et ont les mêmes racines.
On obtient donc, en remarquant que $\chi_{u_{F_j}} | \chi_u$

$$\dim(F_j) \leq m(\lambda_j).$$

Comme $\pi_u(u)=0$, d'après le lemme de décomposition des noyaux, on a :

$$E = \mathrm{Ker}(\pi_u) = \bigoplus_{j=1}^{k} F_j,$$

d'où

$$n = \sum_{j=1}^{k} \dim(F_j)$$

Soit $i \in [\![1, k]\!]$. Alors on a :

$$\dim(F_i) = n - \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{k} \dim(F_j).$$

Or $n = \sum_{i=1}^{k} m(\lambda_i)$ car χ_u est scindé. Par suite,

$$m(\lambda_i) \leq m(\lambda_i) + \underbrace{\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{k} (m(\lambda_j) - \dim(F_j))}_{\geq 0} = \dim(F_i) \leq m(\lambda_i).$$

Par suite, $\dim(F_i) = m(\lambda_i)$.

Remarque 18.

Ce théorème et l'exercice précédent nous fournissent donc (sous l'hypothèse π_u scindé) la forme d'une matrice triangulaire T représentant u dans une base adaptée à la somme directe des F_i, où N_i est une matrice nilpotente (la matrice de n_i) :

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 I_{m(\lambda_1)} + N_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_k I_{m(\lambda_k)} + N_k \end{pmatrix}$$

Annexe

Matrices symétriques

Nous démontrerons le résultat suivant dans le chapitre relatif aux espaces préhilbertiens :

Théorème.

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice à **coefficients réels** et **symétrique** i.e. ${}^tA = A$.
Alors il existe $P \in GL_n(\mathbb{R})$ orthogonale i.e. ${}^tP = P^{-1}$ et une matrice diagonale $D \in M_n(\mathbb{R})$ telle que :

$$A = PD{}^tP.$$

Ainsi, en particulier, A est diagonalisable.

Remarque.

Attention ce résultat est faux pour les matrices à coefficients complexes.

Exercice 20.

Diagonaliser à l'aide d'une matrice orthogonale la matrice $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.