Chapitre V

Séries et familles sommables

Table des matières

Dans ce chapitre, E désigne un espace vectoriel normé sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On notera $\|\cdot\|$ la norme dont est munie E.

Partie A

Séries de vecteurs

1. Définitions

Définition 1. *Série*

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans E. On appelle **série de terme général** u_n et on note $\sum u_n$ la **suite** $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ où, pour $n \in \mathbb{N}$:

$$S_n = \sum_{i=0}^{n} u_i$$

Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, le terme $S_n = \sum_{i=0}^{n} u_i$ est appelé **somme partielle** d'ordre n de la série $\sum u_n$.

Remarque 1.

- Une série est une **suite** particulière ! Toutes les méthodes connues pour les suites peuvent donc s'appliquer pour les séries ! De plus, leurs particularités parmi les suites nous permettent de développer des outils adaptés à leur étude. Il est donc a priori plus aisé d'étudier une série quelconque qu'une suite quelconque !
- Une série est donc la suite de ses sommes partielles.
- Si le terme général u_n d'une série n'est défini qu'à partir du rang $n_0 \in \mathbb{N}$, on notera $\displaystyle\sum_{n\geq n_0} u_n$ la série de somme partielle d'ordre $n \geq n_0$: $S_n = \displaystyle\sum_{i=n_0}^{n} u_i$.

Définition 2. *Somme d'une série*

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans E. On dit que la série $\sum u_n$ **converge** dans $(E, \|\cdot\|)$ si la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de ses sommes partielles converge dans $(E, \|\cdot\|)$.
Dans ce cas, on appelle **somme de la série** $\sum u_n$ et on note $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ la quantité :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \lim_{N\to+\infty} S_N = \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=0}^{N} u_n.$$

Si la série $\sum u_n$ ne converge pas, on dira qu'elle **diverge**.

Dans la suite, $u=(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $v=(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ désignent des suites à valeurs dans E.

Proposition 1.

Si la série $\sum u_n$ converge, alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0_E.

Démonstration.

On suppose que $\sum u_n$ converge. Alors la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $S\in E$ et donc, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on a

$$u_n = S_n - S_{n-1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} S - S = 0_E.$$

□

Remarque 2.

La réciproque de cette proposition est fausse : la suite $(\frac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 0 et la série harmonique $\sum\limits_{n\geq 1}\dfrac{1}{n}$ diverge !

Cette proposition motive donc la définition suivante :

Définition 3. *Divergence grossière*

Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas vers 0_E, on dit que la série $\sum u_n$ **diverge grossièrement**.

Définition-Proposition 4. *Reste d'une série*

Si la série $\sum u_n$ converge, alors pour tout $n\in\mathbb{N}$, la série $\sum_{k\geq n+1} u_k$ converge. Ainsi, pour $n\in\mathbb{N}$, on appelle **reste d'ordre** n de la série $\sum u_n$ et on note R_n la somme de la série $\sum_{k\geq n+1} u_k$ i.e.

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k.$$

Remarque 3.

On ne parle de reste d'une série que si elle converge. De plus, dans ce cas, on remarque que pour tout $n\in\mathbb{N}$,

$$R_n = S - S_n \text{ où } S = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n.$$

Exercice 1.

Soit $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{1\}$ et $x \in E$. On considère la série $\sum u_n$ de terme général $u_n = \lambda^n x$. Discuter des cas évidents de convergence et de divergence grossière de $\sum u_n$.
En cas de convergence, déterminer la somme et les restes de la série.

Correction.

Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} u_i = \sum_{i=1}^{n} \lambda^i x = \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\right) x = \frac{1-\lambda^{n+1}}{1-\lambda} x.$$

Ainsi, si $|\lambda| < 1$, $\sum u_n$ converge et on a :

$$S = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \lim_{N \to +\infty} S_N = \frac{1}{1-\lambda} x,$$

et, pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$R_n = S - S_n = \frac{1}{1-\lambda} x - \frac{1-\lambda^{n+1}}{1-\lambda} x = \frac{\lambda^{n+1}}{1-\lambda} x.$$

Exercice 2.

Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$ une matrice nilpotente d'indice $p \in \mathbb{N}^*$. Déterminer la nature de la série $\sum A^n$ et en cas de convergence, déterminer sa somme.

Correction.

Pour tout $n \geq p$, $A^n = 0_n$, donc, pour $N \geq p$, on a :

$$\sum_{n=0}^{N} A^n = \sum_{n=0}^{p-1} A^n + \sum_{n=p}^{N} \underbrace{A^n}_{=0_n} = \sum_{n=0}^{p-1} A^n.$$

Ainsi, $\sum A^n$ est stationnaire en $\sum_{n=0}^{p-1} A^n$, d'où $\sum A^n$ converge et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} A^n = \sum_{n=0}^{p-1} A^n = I_n + A + \ldots + A^{p-1}.$$

Proposition 2.

La suite $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des restes de la série $\sum u_n$ converge vers 0_E.

Démonstration.

On a, avec S la somme de la série et S_n la somme partielle d'ordre $n \in \mathbb{N}$ de la série :

$$\lim_{n \to +\infty} R_n = \lim_{n \to +\infty} (S - S_n) = S - S = 0_E.$$

$\square$

Définition 5. *Série télescopique*

On dit que la série $\sum u_n$ est une **série télescopique** si le terme général u_n de la série s'écrit, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = v_{n+1} - v_n.$$

Proposition 3.

On suppose que la série $\sum u_n$ est télescopique avec, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = v_{n+1} - v_n$. Alors la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et la série $\sum u_n$ sont de même nature i.e. $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge si, et seulement si, $\sum u_n$ converge. De plus, en cas de convergence, on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \lim_{n \to +\infty} v_n - v_0.$$

Démonstration.

On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{i=0}^{n} u_i = \sum_{i=0}^{n} (v_{i+1} - v_i) = (v_{n+1} + \sum_{i=1}^{n} v_i) - ((\sum_{i=1}^{n} v_i) - v_0) = v_n - v_0.$$

d'où le résultat en passant à la limite quand $n \to +\infty$ dans cette égalité. $\square$

2. Espace vectoriel des séries convergentes

Proposition 4.

L'ensemble des séries convergentes de terme général dans E est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des suites à valeurs dans E.

De plus, l'application qui à une série convergente associe sa somme est une application linéaire i.e. pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ et toutes séries $\sum u_n$, $\sum v_n$:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (\lambda u_n + \mu v_n) = \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \mu \sum_{n=0}^{+\infty} v_n.$$

Démonstration.

On note $\mathcal{S}(E)$ l'ensemble des séries de terme général dans E et $\mathcal{S}_c(E)$ l'ensemble des séries convergentes.

> *Exercice :* Montrer que $\mathcal{S}(E)$ est un sous-espace vectoriel de $E^{\mathbb{N}}$ (ensemble des suites à valeurs dans E) - on démontrera (entre autres) que pour $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ et $\sum u_n, \sum v_n \in \mathcal{S}(E)$,
>
> $$\lambda \sum u_n + \mu \sum v_n = \sum (\lambda u_n + \mu v_n).$$

On rappelle (voire le chapitre Topologie des e.v.n.) que l'ensemble $c(E)$ des suites à valeurs dans E convergentes est un sous-espace vectoriel de $E^{\mathbb{N}}$.
On remarque que $\mathcal{S}_c(E) = \mathcal{S}(E) \cap c(E)$ donc $\mathcal{S}_c(E)$ est un sous-espace vectoriel de $E^{\mathbb{N}}$ comme intersection de sous-espaces vectoriels de $E^{\mathbb{N}}$.

De plus, considérons l'application $f : \mathcal{S}_c(E) \to \mathbb{K}$ telle que :

$$f : \sum u_n \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} u_n.$$

Soit $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ et $\sum u_n, \sum v_n \in \mathcal{S}_c(E)$. Alors,

$$\begin{aligned}
f(\lambda \sum u_n + \mu \sum v_n) &= f(\sum (\lambda u_n + \mu v_n)) \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} (\lambda u_n + \mu v_n) \\
&= \lim_{N \to +\infty} \sum_{n=0}^{N} (\lambda u_n + \mu v_n) \\
&= \lim_{N \to +\infty} \left(\lambda \sum_{n=0}^{N} u_n + \mu \sum_{n=0}^{N} v_n \right) \\
&= \lambda \lim_{N \to +\infty} \sum_{n=0}^{N} u_n + \mu \lim_{N \to +\infty} \sum_{n=0}^{N} v_n \\
&= \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \mu \sum_{n=0}^{+\infty} v_n \\
&= \lambda f(\sum u_n) + \mu f(\sum v_n)
\end{aligned}$$

Donc f est une application linéaire.

$\square$

Exercice 3.

Soit $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$. Discuter de la nature de la série $\sum A^n$.

Correction.

On a $A=\frac{1}{2}(I_2+J_a)$ où $J_a=\begin{pmatrix}0 & a\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ est nilpotente d'indice 2 et commute avec I_2. Ainsi en appliquant la formule du binôme, on obtient pour $n\geq 2$:

$$A^n=\frac{1}{2^n}(I_2+J_a)^n=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}J_a^iI_2^{n-i}=I_2+nJ_a;$$

par suite,

$$S_N=\sum_{n=0}^{N}A^n=\left(\sum_{n=0}^{N}\frac{1}{2^n}\right)I_2+\left(\sum_{n=0}^{N}\frac{n}{2^n}\right)J_a$$

Donc $\sum A^n$ converge car les séries numériques $\sum\frac{1}{2^n}$ et $\sum\frac{n}{2^n}$ converge. En effet, $\frac{1}{2}<1$ et $\frac{3}{4}<1$ donc les séries géométriques $\sum\frac{1}{2^n}$ et $\sum(\frac{3}{4})^n$ convergent et on a $\frac{n}{2^n}=o((\frac{3}{4})^n)$ donc, par comparaison avec le terme général d'une série convergente, on en déduit que $\sum\frac{n}{2^n}$ converge (on aurait pu utiliser la règle de D'Alembert, que l'on verra dans la prochaine partie, pour conclure la convergence de $\sum\frac{n}{2^n}$).

Proposition 5. *Utilisation d'une base*

On suppose que E est de dimension finie p. Soit $\mathcal{B}=(e_1,...,e_p)$ une base de E et $\sum u_n$ la série de terme général $u_n=\sum_{i=1}^{n}u_n^{(i)}e_i\in E$. Alors la série $\sum u_n$ converge si, et seulement si, pour tout $i\in[\![1,p]\!]$, la série numérique $\sum u_n^{(i)}$ converge. Dans ce cas, on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}u_n=\sum_{i=1}^{p}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}u_n^{(i)}\right)e_i.$$

Exercice 4.

1. Soit $p\in\mathbb{N}$ et $A\in\mathcal{S}_p(\mathbb{R})$ une matrice symétrique telle que pour tout $\lambda\in\mathrm{Sp}(A)$, $|\lambda|<1$. Démontrer que $\sum A^n$ est convergente et déterminer sa somme.
2. Application : déterminer la somme de la série $\sum\left(\frac{1}{8}\begin{pmatrix}1 & 0 & 3\\ 0 & 4 & 0\\ 3 & 0 & 1\end{pmatrix}\right)^n$.

Correction.

1. Comme A est symétrique réelle, A est diagonalisable dans une base orthonormale de $M_{n,1}(\mathbb{R})$. Ainsi il existe $P\in O_n(\mathbb{R})$ et $D=\mathrm{diag}(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$ avec $\alpha_1,...,\alpha_p\in\mathrm{Sp}(A)$ tels que $A=PD{}^tP$. Ainsi $|\alpha_i|<1$, pour tout $i\in[\![1,p]\!]$ et on a, pour tout $N\in\mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} S_N &= \sum_{n=0}^{N} A^n = P\left(\sum_{n=0}^{N} D^n\right) {}^tP \\ &= P \operatorname{diag}\left(\frac{1-\alpha_1^{N+1}}{1-\alpha_1}, \dots, \frac{1-\alpha_p^{N+1}}{1-\alpha_p}\right) {}^tP \\ &\xrightarrow[N\to+\infty]{} P \operatorname{diag}\left(\frac{1}{1-\alpha_1}, \dots, \frac{1}{1-\alpha_p}\right) {}^tP. \end{aligned}$$

Il en résulte que $\sum A^n$ converge et $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} A^n = P \operatorname{diag}\left(\frac{1}{1-\alpha_1}, \dots, \frac{1}{1-\alpha_p}\right) {}^tP$.

2. On a, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$A = \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{-1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

Donc

$$\sum_{n=0}^{+\infty} A^n = P \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} {}^tP = \begin{pmatrix} \frac{7}{5} & 0 & \frac{3}{5} \\ 0 & 2 & 0 \\ \frac{3}{5} & 0 & \frac{7}{5} \end{pmatrix}$$

3. Série absolument convergente

Dans ce paragraphe, on suppose que E est de **dimension finie** p.

Définition 6. *Série absolument convergente*

On dit que la série $\sum u_n$ de terme général $u_n \in E$ est **absolument convergente** si la série à termes positifs $\sum \|u_n\|$ est convergente.

Théorème 1.

Si la série $\sum u_n$ converge absolument, alors $\sum u_n$ converge. De plus, on a :

$$\left\|\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right\| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \|u_n\|.$$

Démonstration.

On suppose que $\sum u_n$ converge absolument. Alors $\sum \|u_n\|$ converge. Soit $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_p)$ un base de E. Comme E est de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes sur E ; ainsi, il existe $c \in \mathbb{R}_+$ tel que, pour tout $x \in E$, $\|x\|_\infty \leq c\|x\|$. Par suite, on a, pour tout $i \in [\![1, p]\!]$:

$$|u_n^{(i)}| \leq \|u_n\|_\infty \leq c\|u_n\|,$$

donc $\sum u_n^{(i)}$ est une suite numérique absolument convergente, donc convergente. Ainsi, les séries des composantes de $\sum u_n$ convergent, donc $\sum u_n$ converge. $\square$

Exercice 5.

Soit $p \in \mathbb{N}^*$. On munit l'espace vectoriel $M_p(\mathbb{K})$ d'une norme $\|\cdot\|$ qui est sous-multiplicative i.e. $\forall\, A, B \in M_p(\mathbb{K})$, $\|AB\| \leq \|A\|.\|B\|$.

Soit $A \in M_p(\mathbb{K})$ telle que $\|A\| < 1$.

1. Montrer que $\sum A^n$ est absolument convergente. Vers quelle limite converge la suite $(A^n)_{n\in\mathbb{N}}$?
2. En déduire que $I_p - A$ est inversible en déterminant son inverse.

Correction.

1. On a, par sous-multiplicativité de la norme $\|\cdot\|$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\|A^n\| \leq \|A\|^n$. Or $\sum \|A\|^n$ est une série géométrique de raison $\|A\| < 1$, donc le terme général $\|A^n\|$ de la série à termes positifs est majoré par le terme général d'une série convergente. Par suite, $\sum \|A^n\|$ converge ; d'où la série $\sum A^n$ est absolument convergente.

   Comme $\sum A^n$ est absolument convergente, $\sum A^n$ converge. Par suite, $\lim_{n\to+\infty} A^n = 0_n$.

2. On a, pour $N \in \mathbb{N}$,

$$(I_p - A)S_N = (I_p - A)\left(I_p + A + A^2 + ... + A^N\right) = I_p - A^{N+1},$$

   Par suite,

$$(I_p - A)\sum_{n=0}^{+\infty} A^n = \lim_{n\to+\infty} (I_p - A)S_N = I_p - \lim_{n\to+\infty} A^{N+1} = I_p.$$

   Ainsi, $I_p - A$ est inversible et $(I_p - A)^{-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} A^n$.

Partie B

Compléments sur les séries numériques

Dans cette partie, on considérera seulement des séries à termes **réels**.

1. Règle de D'Alembert

Proposition 6. *Comparaison logarithmique*

Soit (u_n) et v_n des suites de réels strictement positifs à partir d'un certain rang n_0 telles que pour tout $n \geq n_0$,

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{v_{n+1}}{v_n}.$$

Alors,

— si $\sum v_n$ converge, $\sum u_n$ converge ;

— si $\sum u_n$ diverge, $\sum v_n$ diverge.

Démonstration.

On a remarque que pour tout $n \geq n_0$, on a :

$$\frac{u_n}{u_{n_0}} = \prod_{i=n_0}^{n-1} \frac{u_{i+1}}{u_i} \leq \prod_{i=n_0}^{n-1} \frac{v_{i+1}}{v_i} = \frac{v_n}{v_{n_0}}$$

d'où :

$$u_n \leq \frac{u_{n_0}}{v_{n_0}} v_n.$$

Par suite, par comparaison de séries à termes positifs, on obtient que si $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ converge (et donc également la contraposée).

$\square$

Corollaire 1.

Soit $\sum u_n$ une série à termes strictement positifs. Si, à partir d'un certain rang n_0 :

— il existe $M \in]0, 1[$ tel que pour tout $n \geq n_0$, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leq M$, alors $\sum u_n$ converge.

— pour tout $n \geq n_0$, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$, alors $\sum u_n$ diverge.

Démonstration.

— On considère la suite géométrique $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de raison $0 < M < 1$. Alors $\sum v_n$ converge, et, à partir du certain rang n_0, on a :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq M = \frac{v_{n+1}}{v_n}.$$

Par suite, d'après la proposition précédente, $\sum u_n$ converge.

— La suite (u_n) à termes strictement positifs est croissante à partir du rang n_0, donc (u_n) ne converge pas vers 0. Ainsi $\sum u_n$ diverge grossièrement. (on aurait pu, comme dans le cas précédent, comparer $\sum u_n$ avec la série géométrique de raison 1).

□

Théorème 2. *Règle de D'Alembert*

Soit $\sum u_n$ une série à termes strictement positifs. On suppose que la suite $\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite $\ell \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$. Alors :

— Si $\ell < 1$, alors $\sum u_n$ converge.

— Si $\ell > 1$, alors $\sum u_n$ diverge.

Démonstration.

Comme $\frac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$, alors, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un certain rang n_0, tel que, pour tout $n \geq n_0$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} \in [\ell-\varepsilon, \ell+\varepsilon]$.

— On suppose $\ell < 1$. Alors pour $\varepsilon < 1-\ell$, on a, pour tout $n \geq n_0$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \ell+\varepsilon$ et on applique le corollaire précédent en posant $M = \ell+\varepsilon < 1$. Par suite, $\sum u_n$ converge.

— On suppose $\ell > 1$. Alors pour $\varepsilon = \ell - 1$, on a, pour tout $n \geq n_0$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq \ell - \varepsilon = 1$ et on applique le corollaire précédent . Par suite, $\sum u_n$ diverge.

□

Remarque 4.

— On peut voir, en regardant la construction de la démonstration de cette règle, que l'on compare la série $\sum u_n$ à une série géométrique. Ainsi, cette règle ne peut servir à étudier des suites dont la croissance est moins forte que celle d'une série géométrique.

— Ainsi dans le cas $\ell = 1$, on ne peut pas conclure comme en témoigne par exemple $\sum \frac{1}{n}$ et $\sum \frac{1}{n^2}$.

Exercice 6. *Applications de la règle de D'Alembert*

1. Montrer que $\sum \frac{x^n}{n!}$ converge pour tout $x \in \mathbb{R}$.

2. Étudier la nature de la série $\sum \dfrac{n!}{n^n}$.

3. Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Discuter de la nature de la série $\sum \dfrac{x^n}{\binom{2n}{n}}$ en fonction de x.

Correction.

1. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \left|\frac{x^n}{n!}\right|$. Alors on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{|x|^{n+1}}{|x|^n}.\frac{n!}{(n+1)!} = \frac{|x|}{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 < 1.$$

Ainsi, d'après la règle de D'Alembert, $\sum \dfrac{x^n}{n!}$ est absolument convergente et donc convergente.

2. On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}}.\frac{(n+1)!}{n!} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{e} < 1.$$

Ainsi, d'après la règle de D'Alembert, $\sum \dfrac{n!}{n^n}$ converge.

3. Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \frac{x^n}{\binom{2n}{n}}$. Alors on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{x(n+1)^2}{(2n+2)(2n+1)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{4}x \begin{cases} < 1 & \text{si } x < 4 \\ = 1 & \text{si } x = 4 \\ > 1 & \text{si } x > 4 \end{cases}$$

D'après la règle de D'Alembert, $\sum u_n$ converge si $x < 4$ et diverge si $x > 4$. Si $x = 4$, on a

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{4n+4}{4n+2} \geq 1.$$

Par suite, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante (et à valeurs positives) donc elle ne converge pas vers 0. Ainsi, $\frac{4^n}{\binom{2n}{n}}$ diverge grossièrement.

Exercice 7. *Exponentielle de matrice*

Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Soit $A \in M_p(\mathbb{K})$ muni d'une norme sous-multiplicative.

1. Montrer que la série $\sum \dfrac{A^n}{n!}$ est convergente. On note alors

$$\exp(A) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{A^n}{n!}.$$

2. Calculer $\exp(A)$ pour $A = \begin{pmatrix} -7 & -4 & -4 \\ 4 & 1 & 4 \\ 4 & 4 & 1 \end{pmatrix}$.

Correction.

1. Comme $\|\cdot\|$ est sous-multiplicative, on a, pour $n \in \mathbb{N}$, $\left\| \dfrac{A^n}{n!} \right\| \leq \dfrac{\|A\|^n}{n!}$ qui est le terme général d'une série géométrique de raison $\|A\| < 1$ et donc convergente. Ainsi, par majoration du terme général d'une série à termes positifs par le terme général d'une série convergente, $\sum \dfrac{A^n}{n!}$ est absolument convergente. Par suite, $\sum \dfrac{A^n}{n!}$ est convergente.

2. On remarque que si A est diagonalisable avec $A = PDP^{-1}$ où $P \in \mathrm{GL}_p(\mathbb{K})$ et $D = \mathrm{diag}(\alpha_1, ..., \alpha_p)$, on a :
$$\exp(A) = P\exp(D)P^{-1}$$
et
$$\exp(D) = \mathrm{diag}(e^{\alpha_1}, ..., e^{\alpha_p}).$$
Ainsi, dans notre cas, on a :
$$A = PDP^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$
d'où
$$\begin{aligned} \exp(A) = P\exp(D)P^{-1} &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e & 0 & 0 \\ 0 & e^{-3} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -e + 2e^{-3} & -e + e^{-3} & -e + e^{-3} \\ e - e^{-3} & e & e - e^{-3} \\ e - e^{-3} & e - e^{-3} & e \end{pmatrix} \end{aligned}$$

2. Critère des séries alternées

Définition 7. *Série alternée*

Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels. On dit que la série $\sum v_n$ est **alternée** s'il existe une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels tous de même signe telle que
$$\sum v_n = \sum (-1)^n u_n.$$

Exemple 1.

$\sum \dfrac{(-1)^n}{n}$ ou $\sum \sin\left(\pi(\sqrt{n^2+1})\right)$ sont des séries alternées.

Théorème 3. *Critère des séries alternées*

Soit $\sum v_n$ une série alternée. Si :

i) la suite $(|v_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et

ii) $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0,

alors $\sum v_n$ converge et on a les propriétés suivantes :

— si $v_0 \geq 0$, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$S_{2k+1} \leq \sum_{n=0}^{+\infty} v_n \leq S_{2k}.$$

— pour tout $n \in \mathbb{N}$, R_n est du signe de v_{n+1} et

$$|R_n| \leq |v_{n+1}|.$$

Démonstration.

Quitte à échanger la suite (v_n) par la suite $(-v_n)$, on suppose $v_0 \geq 0$. Cela implique que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $v_{2k} \geq 0$ et $v_{2k+1} \leq 0$ car la série est alternée.

On considère les suites $(a_k)_{k\in\mathbb{N}} = (S_{2k})_{k\in\mathbb{N}}$ et $(b_k)_{k\in\mathbb{N}} = (S_{2k+1})_{k\in\mathbb{N}}$. Montrons qu'elles sont adjacentes i.e. (a_k) est décroissante, (b_k) est croissante et $(a_k - b_k)$ converge vers 0.

— Soit $k \in \mathbb{N}$. On a

$$a_{k+1} - a_k = S_{2k+2} - S_{2k} = v_{2k+2} + v_{2k+1} = |v_{2k+2}| - |v_{2k+1}| \leq 0$$

car $(|v_n|)$ est décroissante d'après ii) ; et, grâce à un argument similaire, on a :

$$b_{k+1} - b_k = S_{2k+3} - S_{2k+1} = v_{2k+3} + v_{2k+2} = |v_{2k+2}| - |v_{2k+3}| \geq 0.$$

Par suite, (a_k) est décroissante et (b_k) est croissante.

— Soit $k \in \mathbb{N}$. On a

$$a_k - b_k = S_{2k} - S_{2k+1} = -v_{2k+1} = |v_{2k+1}| \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0$$

Il en résulte que $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes et converge ainsi vers une même limite notée S. Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a, pour $k = E(\frac{n}{2})$:

$$b_k = S_{2k+1} \leq S_n \leq S_{2_k} = a_k,$$

avec égalité à gauche lorsque n est impair, et égalité à droite lorsque n est pair. Ainsi, en passant à la limite quand n tend vers $+\infty$ dans l'inégalité précédente, et en remarquant que $k = E(\frac{n}{2}) \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$, on obtient que (S_n) converge vers S, d'où l'existence de la somme de la série $\sum v_n$ et on a donc, pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$S_{2k+1} \leq S = \sum_{n=0}^{+\infty} v_n \leq S_{2_k}.$$

$\square$

Remarque 5.

Sous les hypothèses du critère des séries alternées, en particulier, $S = \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$ est du même signe que v_0 et lorsque $v_0 \geq 0$, $S \leq v_0$.

Exercice 8.

1. Étudier la nature $\sum \dfrac{(-1)^n}{n^\alpha}$ selon les valeurs de $\alpha \in \mathbb{R}$.
2. Montrer que le reste R_n de la série $\sum \dfrac{(-1)^n}{n^2}$ est le terme général d'une série convergente.
3. On considère la suite $\sum u_n$ de terme général :
$$u_n = \begin{cases} \frac{-1}{k^2} \text{ si } n = 2k \text{ est pair} \\ \frac{1}{k} \text{ si } n = 2k+1 \text{ est impair} \end{cases}$$
Quelle est la nature de cette série ? Qu'en conclure sur les hypothèses du critère des séries alternées ?

Correction.

1. *1er cas* $\alpha \leq 0$: on a $\frac{(-1)^n}{n^\alpha} = (-1)^n n^{-\alpha} \nrightarrow 0$ car $-\alpha \geq 0$ donc $\sum \dfrac{(-1)^n}{n^\alpha}$ diverge grossièrement.
2eme cas $\alpha > 0$. Alors $(\frac{1}{n^\alpha})_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante et tend vers 0, donc d'après le critère des séries alternées, $\sum \dfrac{(-1)^n}{n^\alpha}$ converge.
2. D'après la question précédente, $\sum \dfrac{(-1)^n}{n^2}$ converge ; on peut donc s'intéresser aux restes de cette série.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a :
$$R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k^2}.$$
Toujours d'après le critère des séries alternées, on a :
$$|R_n| \leq \left|\frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)^2}\right| = \frac{1}{(n+1)^2}$$
Ainsi, $|R_n|$ est bien le terme général d'une série convergente d'après le critère de Riemann car $\dfrac{1}{(n+1)^2} = o(\frac{1}{n^2})$.
Par suite, $\sum R_n$ est absolument convergente, et donc convergente.
3. Tout d'abord, on remarque que (u_n) est bien le terme général d'une série alternée qui vérifie $u_n \to 0$. Par contre, $(|u_n|)$ n'est pas décroissante...
On a, pour $2 \leq n = 2k$ un entier pair :
$$u_n + u_{n+1} = u_{2k} + u_{2k+1} = \frac{-1}{k^2} + \frac{1}{k} = \frac{k-1}{k^2}.$$

Ainsi, pour $N \in \mathbb{N}$, on a :

$$S_{2N+1} = \sum_{n=1}^{2N+1} u_n = 1 + \sum_{k=1}^{N} (u_{2k} + u_{2k+1}) = 1 + \sum_{k=1}^{N} \frac{k-1}{k^2}$$

Or, on a $\frac{k-1}{k^2} = o(\frac{1}{k})$ donc d'après le critère de Riemann, la série $\sum \frac{k-1}{k^2}$ diverge. Par suite, la suite $(S_{2N+1})_{N\in\mathbb{N}}$ diverge également !
Il en résulte que $\sum u_n$ diverge.
On en conclut que l'hypothèse de décroissance de la suite $(|u_n|)$ est nécessaire ! Si on l'omet, le théorème devient faux comme en atteste cet exemple.

3. Comparaison avec une intégrale

Théorème 4. *Comparaison série intégrale*

Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ une fonction **continue par morceaux et décroissante**. Alors la série :

$$\sum_{n\geq 1} \left(\int_{n-1}^{n} f(t)dt - f(n) \right)$$

converge.

Démonstration.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Alors on a :

$$0 = f(n) - f(n) \leq \int_{n-1}^{n} f(t)dt - f(n) \leq f(n-1) - f(n)$$

Donc la série est à termes positifs et on a, pour tout $N \geq 1$:

$$S_N = \sum_{n=1}^{N} \left(\int_{n-1}^{n} f(t)dt - f(n) \right) \leq \sum_{n=1}^{N} (f(n-1) - f(n)) = f(0) - f(N).$$

Or comme f est décroissante et minorée (par 0), f admet une limite $\ell \in \mathbb{R}_+$ en $+\infty$; ainsi, pour tout $N \geq 1$, $S_N \leq f(0) - \ell$. Par suite, par majoration uniforme des sommes partielles d'une série à termes positifs, la série converge. □

Corollaire 2.

Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ une fonction **continue par morceaux et décroissante**. Alors $\sum f(n)$ converge si, et seulement si, $\int_0^{+\infty} f(t)dt$ converge.

Démonstration.

On sait que $\sum_{n\geq 1}\left(\int_{n-1}^{n} f(t)dt - f(n)\right)$ converge, donc $\sum f(n)$ converge si, et seulement si, $\sum_{n\geq 1}\int_{n-1}^{n} f(t)dt$ converge. Or on a $\sum_{n\geq 1}\int_{n-1}^{n} f(t)dt$ converge si, et seulement si

$$\int_0^{\infty} f(t)dt = \lim_{N\to+\infty}\int_0^N f(t)dt = \lim_{N\to+\infty}\sum_{n=1}^{N}\int_{n-1}^{n} f(t)dt$$

existe dans $\mathbb{R}_+$. D'où le résultat. $\square$

Proposition 7. *Série-Intégrale : estimation des sommes partielles et des restes*

Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ une fonction **continue par morceaux et décroissante** et $n \in \mathbb{N}$. Alors les sommes partielles de la série $\sum f(n)$ vérifient pour tout $m \in \mathbb{N}$:

$$\int_{n+1}^{n+m+1} f(t)dt \leq S_{n+m} - S_n = f(n+1) + \ldots + f(n+m) \leq \int_n^{n+m} f(t)dt.$$

Et en cas de convergence de la série $\sum f(n)$, les restes de la série vérifient :

$$\int_{n+1}^{+\infty} f(t)dt \leq R_n \leq \int_n^{+\infty} f(t)dt.$$

Démonstration.

On a, pour tout $i \in \mathbb{N}^*$,

$$\int_i^{i+1} f(t)dt \leq f(i) \leq \int_{i-1}^{i} f(t)dt.$$

Donc, pour $m \in \mathbb{N}$, on a :

$$\sum_{i=n+1}^{n+m}\int_i^{i+1} f(t)dt \leq \sum_{i=n+1}^{n+m} f(i) \leq \sum_{i=n+1}^{n+m}\int_{i-1}^{i} f(t)dt,$$

et ainsi, on obtient le résultat concernant les sommes partielles. Si $\sum f(n)$ converge, alors $\int_0^{+\infty} f(t)dt$ converge et donc, les mêmes intégrales mais à partir de n et de $n+1$ convergent. De plus, d'après les inégalités précédentes, on a :

$$\underbrace{\lim_{m\to+\infty}\int_{n+1}^{n+m+1} f(t)dt}_{=\int_{n+1}^{+\infty} f(t)dt} \leq \underbrace{\lim_{m\to+\infty} S_{n+m} - S_n}_{=R_n} \leq \underbrace{\lim_{m\to+\infty}\int_n^{n+m} f(t)dt}_{=\int_n^{+\infty} f(t)dt}.$$

$\square$

Remarque 6.

En particulier, on a l'inégalité $\int_1^{N+1} f(t)dt \leq \sum_{n=1}^{N} f(n) \leq \int_0^N f(t)dt$.

Exercice 9.

Donner, selon la valeur de $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$, la nature des séries suivantes. En cas de divergence, donner un équivalent simple des sommes partielles et en cas de convergence, donner un équivalent simple des restes.

1. $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$.
2. $\displaystyle\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n(\ln(n))^\alpha}$.

Correction.

1. Pour $\alpha > 0$, la fonction $f : t \mapsto \frac{1}{t^\alpha}$ est continue et décroissante sur de $\mathbb{R}_+^*$ dans lui-même. Ainsi, d'après le théorème de comparaison série-intégrale (voire Corollaire 2), $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ converge si, et seulement si, $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha} dt$ converge. Or on a :

$$\int_1^x \frac{1}{t^\alpha} dt = \begin{cases} \dfrac{1}{1-\alpha}\left(x^{1-\alpha} - 1\right) & \text{si } \alpha \neq 1 \\ \ln(x) & \text{si } \alpha = 1 \end{cases}.$$

d'où les trois cas suivants :

1er cas : $0 < \alpha < 1$. Dans ce cas, $1 - \alpha > 0$, donc

$$\int_1^x \frac{1}{t^\alpha} dt = \frac{1}{1-\alpha}\left(x^{1-\alpha} - 1\right) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty.$$

Par suite, $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ diverge.

2eme cas : $\alpha = 1$. On a

$$\int_1^x \frac{1}{t} dt = \ln(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty,$$

Par suite, $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ diverge.

3eme cas : $\alpha > 1$. Dans ce cas, $\alpha - 1 > 0$, donc

$$\int_1^x \frac{1}{t^\alpha} dt = \frac{1}{\alpha - 1}\left(1 - \frac{1}{x^{\alpha-1}}\right) \xrightarrow[x\to+\infty]{} \frac{1}{\alpha-1}.$$

Par suite, $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha} dt$ converge et ainsi $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ converge.

On a donc bien le critère de Riemann : $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ converge si, et seulement si, $\alpha > 1$. (Pour $\alpha \leq 0$, on remarque que la série diverge grossièrement).

Intéressons nous désormais aux équivalents des restes et des sommes partielles :

On a, pour tout $i \geq 2$,
$$\int_{i-1}^{i} \frac{1}{t^\alpha} dt \leq \frac{1}{i^\alpha} \leq \int_{i}^{i+1} \frac{1}{t^\alpha} dt,$$

1er cas : $0 < \alpha < 1$. La série diverge, donc on s'intéresse à un équivalent des sommes partielles. On a
$$\int_1^{n+1} \frac{1}{t^\alpha} dt \leq 1 + \int_2^{n+1} \frac{1}{t^\alpha} dt \leq S_n(\alpha) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^\alpha} \leq 1 + \int_1^n \frac{1}{t^\alpha} dt \qquad (*)$$

Ainsi, on obtient :
$$\frac{1}{1-\alpha}\left((n+1)^{1-\alpha} - 1\right) \leq S_n(\alpha) \leq 1 + \frac{1}{1-\alpha}\left(n^{1-\alpha} - 1\right).$$

On remarque alors que :
$$\frac{1}{1-\alpha}\left((n+1)^{1-\alpha} - 1\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha} \underset{n\to+\infty}{\sim} 1 + \frac{1}{1-\alpha}\left(n^{1-\alpha} - 1\right);$$

par suite, d'après le théorème des gendarmes, $S_n(\alpha)\dfrac{1-\alpha}{n^{1-\alpha}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$. Il en résulte que :
$$S_n(\alpha) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^{1-\alpha}}{1-\alpha}.$$

2eme cas : $\alpha = 1$. La série diverge, donc on s'intéresse de nouveau à un équivalent des sommes partielles. D'après $(*)$, on obtient :
$$\ln(n+1) \leq S_n(1) \leq 1 + \ln(n).$$

Par suite,
$$S_n(1) \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n).$$

3eme cas : $\alpha > 1$. La série converge, donc on s'intéresse à un équivalent des restes. On a, pour $n \geq 1$:
$$\int_{n+1}^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha} dt \leq R_n(\alpha) \leq \int_n^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha} dt.$$

Ainsi,
$$\frac{1}{\alpha-1}\frac{1}{(n+1)^{\alpha-1}} \leq R_n(\alpha) \leq \frac{1}{\alpha-1}\frac{1}{n^{\alpha-1}}.$$

D'où, finalement,
$$R_n(\alpha) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\alpha-1}\frac{1}{n^{\alpha-1}}.$$

2. On réitère les mêmes techniques avec la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{x(\ln(x))^\alpha}$.

4. Sommation des relations de comparaison

a. En cas de convergence

Proposition 8.

Soit $\sum u_n$ et $\sum v_n$ des séries numériques avec $\sum v_n$ à termes positifs. On suppose que $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent. Alors les restes $R_n(u)$ et $R_n(v)$ respectifs des séries associées aux suites $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifient quand $n \to +\infty$:

— Si $u_n = O(v_n)$, alors $R_n(u) = O(R_n(v))$.

— Si $u_n = o(v_n)$, alors $R_n(u) = o(R_n(v))$.

— Si $u_n \sim v_n$, alors $R_n(u) \sim R_n(v)$.

b. En cas de divergence

Proposition 9.

Soit $\sum u_n$ et $\sum v_n$ des séries numériques avec $\sum v_n$ à termes positifs. On suppose que $\sum v_n$ diverge. Alors les sommes partielles $S_n(u)$ et $S_n(v)$ respectifs des séries associées aux suites $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifient quand $n \to +\infty$:

— Si $u_n = O(v_n)$, alors $S_n(u) = O(S_n(v))$.

— Si $u_n = o(v_n)$, alors $S_n(u) = o(S_n(v))$.

— Si $u_n \sim v_n$, alors $S_n(u) \sim S_n(v)$.

c. Applications

Exercice 10.

Retrouver un équivalent simple des restes de $\sum \frac{1}{n^2}$ grâce à une série télescopique.

Correction.

On a $\dfrac{1}{n^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n(n+1)}$. De plus $\sum \dfrac{1}{n^2}$ converge donc :

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k(k+1)}$$

Or, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{k(k+1)} = \dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{k+1}$ donc, par "télescopage",

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{n+1}.$$

Il en résulte que :

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}.$$

Exercice 11. *Développement asymptotique d'une suite récurrente*

On considère la suite récurrente $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 \in]0,1] \\ u_{n+1} = \sin(u_n) \quad \forall\, n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

1. Montrer que, pour tout $x \in]0,1]$, $0 < \sin(x) < x$. En déduire que (u_n) admet une limite $\lambda \in \mathbb{R}$ et la déterminer.
2. Chercher $\alpha > 0$ tel que la suite $\left(u_{n+1}^{-\alpha} - u_n^{-\alpha}\right)$ converge vers une limite non nulle et déterminer cette limite.
3. En déduire un équivalent en $+\infty$ de $\frac{1}{u_n^2}$. Déterminer ainsi un équivalent simple en $+\infty$ de u_n.

Correction.

1. Pour $x \in]0,1]$, $\sin(x) > 0$ car sin est strictement positive sur $]0,\pi[$. De plus, en étudiant la fonction $f : t \mapsto t - sin(t)$ sur $\mathbb{R}$, on obtient la stricte positivité de f sur $]0,1]$.

   Il en résulte que (u_n) est à valeurs dans $]0,1]$ et est décroissante. Ainsi, (u_n) est décroissante minorée et donc converge vers une limite $\ell \in [0,1]$. Par passage à la limite dans $u_{n+1} = \sin(u_n)$ (sin étant continue), on obtient $\ell = \sin(\ell)$ et donc $\ell = 0$ car c'est l'unique solution de $x = \sin(x)$ sur $[0,1]$.
   En conclusion, (u_n) converge vers 0.

2. Soit $\alpha > 0$. Comme $u_n \to 0$, on a $\sin(u_n) = u_n - \frac{u_n^3}{6} + o(u_n^3)$ et donc :

$$\begin{aligned} u_{n+1}^{-\alpha} - u_n^{-\alpha} &= (\sin(u_n))^{-\alpha} - u_n^{-\alpha} \\ &= (u_n - \tfrac{u_n^3}{6} + o(u_n^3))^{-\alpha} - u_n^{-\alpha} \\ &= u_n^{-\alpha}(1 - \tfrac{u_n^2}{6} + o(u_n^2))^{-\alpha} - u_n^{-\alpha} \\ &= u_n^{-\alpha}\left((1 - \frac{u_n^2}{6} + o(u_n^2))^{-\alpha} - 1\right) \end{aligned}$$

   Or, on a $(1-x)^{-\alpha} = 1 + \alpha x + o(x)$ quand $x \to 0$, donc, en prenant $x = \frac{u_n^2}{6} + o(u_n^2)$, on obtient :

$$u_{n+1}^{-\alpha} - u_n^{-\alpha} = u_n^{-\alpha}\left(1 + \alpha\frac{u_n^2}{6} + o(u_n^2) - 1\right) = \alpha\frac{u_n^{2-\alpha}}{6} + o(u_n^{2-\alpha}).$$

   Ainsi, pour $\alpha = 2$, $(u_{n+1}^{-\alpha} - u_n^{-\alpha})$ converge et :

$$\lim_{n\to+\infty} u_{n+1}^{-2} - u_n^{-2} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

3. D'après la question précédente, $\sum(u_{n+1}^{-2} - u_n^{-2})$ diverge grossièrement car $u_{n+1}^{-2} - u_n^{-2} \sim \frac{1}{3}$. Par suite, la somme partielle S_n de cette série vérifie :

$$S_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{3} = \frac{n+1}{3} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n}{3}.$$

Or, par télescopage, $S_n = u_n^2 - u_0^{-2}$, donc

$$\frac{3}{n}\frac{1}{u_n^2} = \frac{3}{n}S_n + \frac{3}{n}u_0^{-2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1 + 0 = 1.$$

Donc $\dfrac{1}{u_n^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{n}{3}$.

Il en résulte que :

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{3}{n}}.$$

> *Pour aller plus loin :* on peut également montrer que :
>
> $$u_n = \sqrt{\frac{3}{n}} + \frac{3\sqrt{3}\ln(n)}{10n^{3/2}} + o\left(\frac{\ln(n)}{n^{3/2}}\right)$$
>
> en utilisant les mêmes techniques que précédemment et un développement limité à l'ordre 2 en 0 de $x \mapsto \frac{1}{sin^2(x)} - \frac{1}{x^2}$.

Partie C

Familles sommables

1. Ensembles dénombrables

Dans ce paragraphe, E et F désignent des ensembles quelconques.

a. Généralités

Définition 8. *Dénombrabilité*

- On dit que E est **au plus dénombrable** s'il est en bijection avec une partie de $\mathbb{N}$.
- On dit que E est **dénombrable** s'il est en bijection avec $\mathbb{N}$.

Exemple 2.

- Un ensemble fini est au plus dénombrable.

  En effet, si son cardinal est n, alors il est en bijection avec la partie finie de $\mathbb{N}$, $[\![0, n]\!]$.

- L'ensemble $\mathbb{N}$ et $\mathbb{N}^*$ sont dénombrables.

  Pour la dénombrabilité de $\mathbb{N}$ il suffit de considérer l'identité. Quant à $\mathbb{N}^*$, l'application $f : n \mapsto n+1$ est une bijection de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}^*$ (sa réciproque est $g : n \mapsto n-1$).

- L'ensemble $\mathbb{Z}$ est dénombrable.

  On définit l'application $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ telle que, pour $n \in \mathbb{N}$

  $$f(n) = \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{si } n \text{ pair} \\ -\frac{n+1}{2} & \text{si } n \text{ impair} \end{cases}$$

  i.e. $f(0) = 0$, $f(1) = -1$, $f(2) = 1$, $f(3) = -2$, $f(4) = 2$, etc...
  f est bijective de réciproque $f^{-1} : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$:

  $$f^{-1}(n) = \begin{cases} 2k & \text{si } k \geq 0 \\ -(2k+1) & \text{si } k < 0 \end{cases}$$

Exercice 12.

Montrer que $2\mathbb{N}$ est un ensemble dénombrable.

Correction.

On définit $f : \mathbb{N} \to 2\mathbb{N}$ par :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad f(n) = 2n$$

Alors f est bijective : sa réciproque est $g : 2\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ où, pour tout $k \in 2\mathbb{N}$, $g(k) = \frac{k}{2}$.

En fait, on a le résultat général suivant :

Proposition 10.

Soit A une partie infinie de $\mathbb{N}$. Alors A est dénombrable.

Démonstration.

Soit A une partie infinie de $\mathbb{N}$. Alors A est non vide - car l'ensemble vide est un ensemble fini (de cardinal 0), et A est non majoré dans $\mathbb{N}$ car, si on suppose par l'absurde qu'il est majoré par $n \in \mathbb{N}$, alors $A \subset [\![0, n]\!]$ qui est fini, contradiction.

On construit par récurrence une suite strictement croissante (u_n) à valeurs dans A qui parcourt, dans l'ordre, tous les éléments de A :

— **Initialisation.** Comme A est une partie non vide de $\mathbb{N}$, A possède un plus petit élément $\min(A)$. On note alors $u_0 = \min(A)$.

— **Hérédité.** Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose $u_0, ..., u_n$ construits. Comme A n'est pas majoré par u_n, l'ensemble $\{k \in A \mid k > u_n\}$ est une partie non vide de $\mathbb{N}$ et donc possède un plus petit élément que l'on note u_{n+1} i.e.

$$u_{n+1} = \min(\{k \in A \mid k > u_n\}).$$

Ainsi la fonction de $\mathbb{N}$ dans A associée à la suite (u_n), $\varphi : n \mapsto u_n$, est une bijection.

En effet, elle est :

— *injective.* Pour tout $n \in \mathbb{N}$, par construction, on a $u_{n+1} > u_n$. Par suite la suite (u_n) est strictement croissante et donc la fonction φ l'est aussi. Ainsi, φ est injective.

— *surjective.* Soit $k \in A$. Comme la suite (u_n) est strictement croissante, il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que $u_{m+1} > k$. L'ensemble de ces m est une partie non vide de $\mathbb{N}$, donc il en existe un plus petit que l'on note n i.e. $u_{n+1} > k$ et $k \geq u_n$.
Or, par définition, u_{n+1} est le plus petit élément de A strictement plus grand que u_n donc l'inégalité $u_{n+1} > k > u_n$ est impossible. Ainsi, $\varphi(n) = u_n = k$. Par suite, φ est surjective.

□

Proposition 11.

L'ensemble E est au plus dénombrable si, et seulement si, il existe une injection de E dans $\mathbb{N}$.

Correction.

Si E est au plus dénombrable, alors il existe une bijection f de E dans $A \subset E$. Par suite, $f : E \to \mathbb{N}$ est injective.

Réciproquement, s'il existe une injection f de E dans $\mathbb{N}$, alors $f : E \to f(E)$ est une bijection de E dans la partie $f(E)$ de $\mathbb{N}$. Donc E est au plus dénombrable.

Exemple 3.

L'ensemble $\mathbb{N}^2$ est dénombrable : en effet, l'application $(n,m) \to 2^n 3^m$ est injective par unicité de la décomposition d'un nombre entier en facteurs premiers et de plus, $\mathbb{N}^2$ est infini.

Proposition 12.

Soit $A \subset E$. Si E est dénombrable, alors A est au plus dénombrable. Et de plus, si E est dénombrable et A est infini, alors A est dénombrable.

Démonstration.

On suppose E dénombrable. Alors il existe une bijection $f : E \to \mathbb{N}$. De plus, l'application $\mathrm{id}_{|A} : A \to E$ telle que, pour $a \in A$, $\mathrm{id}_{|A}(a) = a$ est injective. Par suite, l'application $g = \mathrm{id}_{|A} \circ f :$ $A \to \mathbb{N}$ est injective. Il en résulte que A est au plus dénombrable.

De plus, si A est infini, $g : A \to g(A)$ est une bijection et $g(A)$ est donc une partie infinie de $\mathbb{N}$. Par suite, $g(A)$ est dénombrable, donc il existe une bijection $h : g(A) \to \mathbb{N}$. Ainsi, $g \circ h$ est une bijection de A dans $\mathbb{N}$. Donc A est dénombrable. $\square$

Proposition 13.

On suppose E non vide. Alors E est au plus dénombrable si, et seulement si, il existe une surjection de $\mathbb{N}$ sur E.

Démonstration.

- $(\Rightarrow)$. On suppose E au plus dénombrable. Alors il existe $A \subset \mathbb{N}$ et $f : A \to E$ une bijection. Comme E est non vide, on choisit $x_0 \in E$ et on construit l'application $\tilde{f}$: pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$\tilde{f}(n) = \begin{cases} f(n) & \text{si } n \in A \\ x_0 & \text{si } n \notin A. \end{cases}$$
Alors on a $\tilde{f}(\mathbb{N}) = f(A) \cup \{x_0\} = f(A) = E$. Donc $\tilde{f}$ est une surjection de $\mathbb{N}$ sur E.
- $(\Leftarrow)$. On suppose qu'il existe $f : \mathbb{N} \to E$ une surjection. Montrons qu'il existe une application injective g de E dans $\mathbb{N}$. Comme f est surjective, pour tout $x \in E$, $f^{-1}(\{x\})$ est une partie non vide de $\mathbb{N}$. Ainsi, la fonction de E dans $\mathbb{N}$:
$$g : x \mapsto \min(f^{-1}(\{x\})$$
est injective. En effet, pour $x, y \in E$ tels que $g(x) = g(y)$, on a $x = f(g(x)) = f(g(y)) = y$. $\square$

Exercice 13.

Montrer de nouveau que $\mathbb{N}^2$ est dénombrable en exhibant (graphiquement) une surjection de $\mathbb{N}^2$ sur $\mathbb{N}$.

b. Opérations sur les ensembles dénombrables

Proposition 14. *Produit cartésien*

Si E, F sont dénombrables, alors $E \times F$ est dénombrable.

Démonstration.

On suppose E, F dénombrables. Alors il existe des bijections $f : E \to \mathbb{N}$ et $g : F \to \mathbb{N}$. Alors la fonction $(x, y) \mapsto (f(x), g(y))$ est une bijection de $E \times F$ dans $\mathbb{N}^2$ qui est lui-même dénombrable. Ainsi, on peut construire une bijection de $\mathbb{N}$ sur $E \times F$. Par suite, $E \times F$ est dénombrable. □

Exemple 4.

L'ensemble $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels est dénombrable.

> En effet, l'application $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^* \to \mathbb{Q}$ telle que, pour $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$, $f(p, q) = \frac{p}{q}$ est surjective et l'ensemble $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ est dénombrable comme produit cartésien d'ensembles dénombrables. Par suite, il existe une surjection de $\mathbb{N}$ sur $\mathbb{Q}$, d'où $\mathbb{Q}$ est dénombrable.

Remarque 7.

Par récurrence, on obtient qu'un produit cartésien d'une famille finie (non vide) d'ensembles dénombrables est dénombrable.

Exercice 14.

Soit A, B des parties de E. Montrer que si A, B sont dénombrables, alors $A \cup B$ est dénombrable.

On a la généralisation suivante :

Proposition 15. *Réunion*

Soit $(A_i)_{i \in I}$ une famille de parties de E. Si I est au plus dénombrable et si, pour tout $i \in I$, A_i est au plus dénombrable, alors $\bigcup_{i \in I} A_i$ est au plus dénombrable. Et de plus, s'il existe $i \in I$ tel que A_i est dénombrable, alors $\bigcup_{i \in I} A_i$ est dénombrable.

Démonstration.

On suppose I non vide, au plus dénombrable et pour tout $i \in I$, A_i au plus dénombrable. Alors, pour chaque $i \in I$, il existe une surjection f_i de $\mathbb{N}$ dans A_i (quitte à le supprimer de la liste, on peut supposer A_i non vide). Alors la fonction $f : I \times \mathbb{N} \to \bigcup_{i \in I} A_i$ telle quel, pour $(i,n) \in I \times \mathbb{N}$:

$$f(i,n) = f_i(n).$$

est surjective. En effet, pour tout $a \in \bigcup_{i \in I} A_i$, il existe $i \in \mathbb{I}$ tel que $a \in A_i$ et il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $a = f_i(n)$; par suite, $a)f(i,n)$.
Ainsi, comme $I \times \mathbb{N}$ est dénombrable, il en résulte que $\bigcup_{i \in I} A_i$ est dénombrable. □

c. Exemples d'ensembles non dénombrables

Proposition 16.

Il n'existe aucune surjection de E sur l'ensemble $\mathcal{P}(E)$ des parties de E.

Démonstration.

Soit $f : E \to \mathcal{P}(E)$ une application. On note $A = \{x \in E \mid x \notin f(x)\}$. Alors $A \subset \mathcal{P}(E)$ n'a pas d'antécédent par f. En effet, pour $x \in E$ on a :

— *1er cas :* $x \in A$. Alors $f(x) \neq A$ car comme $x \in A$, par définition de A, $x \notin f(x)$.

— *2nd cas :* $x \notin A$. Alors $f(x) \neq A$ car comme $x \notin A$, par définition de A, $x \in f(x)$.

Dans tous les cas, $f(x) \neq A$.

Il en résulte que f n'est pas surjective. □

Remarque 8.

Il en résulte que $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ n'est pas dénombrable : en effet, il n'existe a fortiori aucune bijection de $\mathbb{N}$ dans $\mathcal{P}(\mathbb{N})$.

Exercice 15.

1. Montrer que $\mathcal{P}(E)$ est en bijection avec $\{0,1\}^E$.
2. On considère $X = \{0,1\}^{\mathbb{N}}$. Montrer que X n'est pas dénombrable grâce à l'argument diagonal de Cantor : supposer par l'absurde qu'il existe une énumération (indexée par $\mathbb{N}$) de X, et construire un élément de X qui ne peut pas être dans cette énumération (indice : argument "diagonal" !).
3. En déduire qu'un produit dénombrable d'ensembles au plus dénombrables n'est pas dénombrable en général et également que $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ n'est toujours pas dénombrable !

Proposition 17.

L'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels n'est pas dénombrable.

2. Familles sommables de nombres réels positifs

Dans ce paragraphe, I désigne un ensemble dénombrable.

a. Définitions

Définition 9. *Famille sommable*

Soit $(a_i)_{i\in I}$ de réels positifs est **sommable** si l'ensemble

$$\left\{\sum_{j\in J} a_j \mid J\subset I \text{ et } J \text{ fini}\right\}$$

est majoré ; autrement dit si :

il existe $M \geq 0$ tel que, pour toute partie J fini de I, $\sum_{j\in J} a_j \leq M$.

— Si la famille $(a_i)_{i\in I}$ est sommable, alors on appelle **somme de la famille** $(a_i)_{i\in I}$ et on note $\sum\limits_{i\in I} a_i$ la quantité :

$$\sum_{i\in I} a_i = \sup\left(\left\{\sum_{j\in J} a_j \mid J\subset I \text{ et } J \text{ fini}\right\}\right).$$

— Si la famille $(a_i)_{i\in I}$ n'est pas sommable, on convient que $\sum_{i\in I} a_i = +\infty$.

Exemple 5.

La famille $(\frac{1}{2^n})_{n\in\mathbb{N}}$ est sommable.

> En effet, pour toute partie finie J de $\mathbb{N}$, on a $J\subset [\![0,m]\!]$ où $m=\max(J)$, donc :
>
> $$\sum_{j\in J}\frac{1}{2^j} \leq \sum_{i=0}^{m}\frac{1}{2^i} = 2-\frac{1}{2^m} \leq 2.$$
>
> (Démontrer que la somme de la famille est en fait bien égale à 2 grâce à la définition précédente)

Proposition 18.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels positifs. Alors la famille $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est sommable si, et seulement si, $\sum u_n$ converge. Dans ce cas, on a :

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n.$$

b. Propriétés

Proposition 19. *Sous-familles sommable*

Soit $(a_i)_{i\in I}$ une famille de réels positifs. Si $(a_i)_{i\in I}$ est sommable, alors pour tout $J \subset I$ la sous-famille $(a_j)_{j\in J}$ est sommable et

$$\sum_{j\in J} a_j \leq \sum_{i\in I} a_i.$$

Proposition 20.

Soit $(a_i)_{i\in I}$ et $(b_i)_{i\in I}$ des familles de réels positifs telles que pour tout $i \in I$, $a_i \leq b_i$. Si $(b_i)_{i\in I}$ est sommable, alors $(a_i)_{i\in I}$ est sommable et

$$\sum_{i\in I} a_i \leq \sum_{i\in I} b_i.$$

Proposition 21.

Soit $(a_i)_{i\in I}$ et $(b_i)_{i\in I}$ des familles de réels positifs et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}_+$. Si $(a_i)_{i\in I}$ et $(b_i)_{i\in I}$ sont sommables, alors la famille $(\lambda a_i + \mu b_i)_{i\in I}$ est sommable et

$$\sum_{i\in I} (\lambda a_i + \mu b_i) = \lambda \sum_{i\in I} a_i + \mu \sum_{i\in I} b_i.$$

Proposition 22. *Changement d'indice*

Soit σ une bijection d'un ensemble J sur I et $(a_i)_{i\in I}$ une famille de réels positifs. Alors $(a_i)_{i\in I}$ est sommable si et seulement si, $(a_{\sigma(j)})_{j\in J}$ est sommable. Dans ce cas, on a :

$$\sum_{i\in I} a_i = \sum_{j\in J} a_{\sigma(j)}.$$

c. Sommation par paquets

Définition 10. *Partition*

Soit $(I_\omega)_{\omega\in\Omega}$ une famille de partie de I. On dit que $(I_\omega)_{\omega\in\Omega}$ est une **partition** de I si $\displaystyle\bigcup_{\omega\in\Omega} I_\omega = I$ et pour tout $\omega, \omega' \in \Omega$ avec $\omega \neq \omega'$, $I_\omega \cap I_{\omega'} = \emptyset$.

Exemple 6.

Les ensembles $2\mathbb{N}$ et $2\mathbb{N}+1$ forment une partition de $\mathbb{N}$.

Proposition 23. *Sommation par deux paquets*

Soit J, K des parties de I tels que (J, K) est une partition de I et $(a_i)_{i\in I}$ une famille de réels positifs. Alors $(a_i)_{i\in I}$ est sommable si, et seulement si $(a_j)_{j\in J}$ et $(a_k)_{k\in K}$ sont sommables. Dans ce cas, on a :

$$\sum_{i\in I} a_i = \sum_{j\in J} a_j + \sum_{k\in K} a_k.$$

Exercice 16.

On admet l'égalité $\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^2} = \dfrac{\pi^2}{6}$. En déduire que $\sum_{n\geq 1} \dfrac{1}{(2n+1)^2}$ converge et déterminer sa somme.

On peut généraliser la proposition précédente de la façon suivante :

Théorème 5. *Sommation par paquets*

Soit $(I_\omega)_{\omega\in\Omega}$ une partition au plus dénombrable de I et $(a_i)_{i\in I}$ une famille de réels positifs. Alors $(a_i)_{i\in I}$ est sommable, si, et seulement si,

— pour tout $\omega \in \Omega$, la famille $(a_i)_{i\in I_\omega}$ est sommable de somme $\alpha_\omega = \displaystyle\sum_{i\in I_\omega} a_i$,

— la famille $(\alpha_\omega)_{\omega\in\Omega}$ est sommable.

Dans ce cas, on a :

$$\sum_{i\in I} a_i = \sum_{\omega\in\Omega} \left(\sum_{i\in I_\omega} a_i \right).$$

Corollaire 3.

Soit $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une partition au plus dénombrable de I et $(a_i)_{i\in I}$ une famille de réels positifs. Alors $(a_i)_{i\in I}$ est sommable, si, et seulement si,

— pour tout $n \in \mathbb{N}$, la famille $(a_i)_{i\in I_n}$ est sommable,

— la série $\displaystyle\sum \left(\sum_{i\in I_n} a_i \right)$ est convergente.

Dans ce cas, on a :

$$\sum_{i\in I} a_i = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{i\in I_n} a_i\right).$$

3. Familles sommables de nombres complexes

Dans ce paragraphe, I désigne un ensemble dénombrable.

a. Définitions

Définition 11. *Famille sommable de nombres complexes*

Soit $(a_i)_{i\in I}$ une famille de nombres complexes. On dit que la famille $(a_i)_{i\in I}$ est **sommable** si la famille $(|a_i|)_{i\in I}$ de réels positifs est sommable.

Remarque 9.

Ainsi, d'après ce qu'on a vu précédemment, une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est sommable si, set seulement si, la série de terme général $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est absolument convergente.

Définition 12. *Somme d'une famille sommable de réels*

Soit $(a_i)_{i\in I}$ une famille sommable de nombres réels. On pose, pour chaque $i \in I$, $a_i^+ = \max(0, a_i)$ et $a_i^- = \min(0, a_i)$. On appelle **somme** de la famille $(a_i)_{i\in I}$ et on note $\sum\limits_{i\in I} a_i$ la quantité :

$$\sum_{i\in I} a_i = \sum_{i\in I} a_i^+ + \sum_{i\in I} a_i^-.$$

Définition 13. *Somme d'une famille sommable de complexes*

Soit $(a_i)_{i\in I}$ une famille sommable de nombres complexes. On appelle **somme** de la famille $(a_i)_{i\in I}$ et on note $\sum\limits_{i\in I} a_i$ la quantité :

$$\sum_{i\in I} a_i = \sum_{i\in I} \mathrm{Re}(a_i) + i\sum_{i\in I} \mathrm{Im}(a_i).$$

Proposition 24.

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes. La famille $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est sommable si, et seulement si, la série $\sum a_n$ est absolument convergente. Dans ce cas, on a :

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n = \sum_{i=0}^{n} a_n.$$

b. Propriétés

Proposition 25. *Changement d'indice*

Soit σ une bijection d'un ensemble J sur I et $(a_i)_{i\in I}$ une famille de nombres complexes. Alors $(a_i)_{i\in I}$ est sommable si et seulement si, $(a_{\sigma(j)})_{j\in J}$ est sommable. Dans ce cas, on a :

$$\sum_{i\in I} a_i = \sum_{j\in J} a_{\sigma(j)}.$$

Remarque 10.

En combinant les deux précédentes propositions, on obtient que la somme d'une série absolument convergente est invariante par changement bijectif d'indice. Dans le cas d'une série semi-convergente, par exemple $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n}$, on peut, en appliquant une permutation d'indice bien choisie, faire converger la série obtenue vers n'importe quel nombre réel, et même la faire diverger !

Proposition 26. *Inégalité triangulaire*

$(a_i)_{i\in I}$ une famille de nombres complexes. Si $(a_i)_{i\in I}$ est sommable, alors

$$|\sum_{i\in I} a_i| \leq \sum_{i\in I} |a_i|.$$

Proposition 27.

Soit $(a_i)_{i\in I}$ et $(b_i)_{i\in I}$ des familles à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$. Si $(a_i)_{i\in I}$ et $(b_i)_{i\in I}$ sont sommables, alors la famille $(\lambda a_i + \mu b_i)_{i\in I}$ est sommable et

$$\sum_{i\in I}(\lambda a_i + \mu b_i) = \lambda \sum_{i\in I} a_i + \mu \sum_{i\in I} b_i.$$

Question 1.

De quelle structure peut-on munir l'ensemble des familles sommables sur le corps $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$?

c. Sommation par paquets

Théorème 6. *Sommation par paquets*

Soit $(I_\omega)_{\omega\in\Omega}$ une partition au plus dénombrable de I et $(a_i)_{i\in I}$ une famille de complexes. Alors $(a_i)_{i\in I}$ est sommable, si, et seulement si,

- pour tout $\omega \in \Omega$, la famille $(a_i)_{i\in I_\omega}$ est sommable de somme $\alpha_\omega = \sum_{i\in I_\omega} a_i$,
- la famille $(\alpha_\omega)_{\omega\in\Omega}$ est sommable.

Dans ce cas, on a :

$$\sum_{i\in I} a_i = \sum_{\omega\in\Omega}\left(\sum_{i\in I_\omega} a_i\right).$$

Corollaire 4.

Soit $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une partition au plus dénombrable de $\mathbb{N}$ et $(a_i)_{i\in I}$ une famille de complexes. Alors $(a_i)_{i\in I}$ est sommable, si, et seulement si,

- pour tout $n \in \mathbb{N}$, la famille $(a_i)_{i\in I_n}$ est sommable,
- la série $\sum\left(\sum_{i\in I_n} |a_i|\right)$ est convergente.

Dans ce cas, on a :

$$\sum_{i\in I} a_i = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{i\in I_n} a_i\right).$$

4. Applications des familles sommables

a. Sommes doubles

Théorème 7. *Somme double de réels positifs*

Soit $(a_{m,n})_{(m,n)\in\mathbb{N}^2}$ une famille de réels positifs. Alors $(a_{m,n})_{(m,n)\in\mathbb{N}^2}$ est sommable si, et seulement si :

- pour tout $n \in \mathbb{N}$, la série $\sum_{m\geq 0} a_{m,n}$ converge et
- la série $\sum\left(\sum_{m=0}^{+\infty} a_{m,n}\right)$ converge.

Dans ce cas, on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{m=0}^{+\infty} a_{m,n}\right) = \sum_{m=0}^{+\infty}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_{m,n}\right).$$

Corollaire 5. *Somme double de complexes*

Soit $(a_{m,n})_{(m,n)\in\mathbb{N}^2}$ une famille de complexes. Si $(a_{m,n})_{(m,n)\in\mathbb{N}^2}$ est sommable alors :

$$\sum_{(m,n)\in\mathbb{N}^2} a_{m,n} = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{m=0}^{+\infty} a_{m,n}\right) = \sum_{m=0}^{+\infty}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_{m,n}\right) = \sum_{k=0}^{+\infty}\left(\sum_{m+n=k}^{+\infty} a_{m,n}\right).$$

Exercice 17.

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Étudier la sommabilité de la famille $(a_{m,n})_{(m,n)\in\mathbb{N}^2}$ où, pour $(m,n)\in\mathbb{N}^2$,

$$a_{m,n} = \frac{1}{(m+n+1)^\alpha}.$$

b. Produit de Cauchy

Proposition 28.

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des suites de nombres complexes. Si $\sum a_n$ et $\sum b_n$ sont absolument convergentes, alors

$$\sum_{(m,n)\in\mathbb{N}^2} a_m b_n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n\right).$$

Définition 14. *Produit de Cauchy*

Soit $\sum a_n$ et $\sum b_n$ des séries de nombres complexes. On appelle **produit de Cauchy** des séries $\sum a_n$ et $\sum b_n$ la série $\sum c_n$ de terme général défini, pour $n\in\mathbb{N}$, par :

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}.$$

Théorème 8.

Soit $\sum a_n$ et $\sum b_n$ des séries de nombres complexes. Si $\sum a_n$ et $\sum b_n$ sont absolument convergentes, alors leur produit de Cauchy $\sum c_n$ est absolument convergent et on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{p+q=n} a_p b_q\right).$$

Exercice 18.

Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 1$. Montrer que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)z^n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} z^n\right)^2$. En déduire que

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)z^n = \frac{1}{(z-1)^2}.$$