Chapitre VI

Suites et Séries de fonctions

Table des matières

Dans ce chapitre, E et F désigne un espace vectoriel normé de dimension finie sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Toutes les fonctions que l'on considère dans ce chapitre sont, sauf indication contraire, des fonctions définies sur une partie A de E et à valeurs dans F.

Partie A

Convergences des suites et des séries de fonctions

1. Convergence simple

a. Suites de fonctions

Définition 1. *Convergence simple d'une suite de fonctions*

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de $A \subset E$ dans F.

On dit que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge simplement sur** A si, pour tout $x \in A$, la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans F est convergente.

Dans ce cas, on peut considérer la fonction $f : x \mapsto \lim_{n\to+\infty} f_n(x)$ de A dans F et on dit que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge simplement vers** f.

Exemple 1.

La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$ définie, pour $n \in \mathbb{N}$, par $f_n : t \mapsto t^n$ converge simplement sur $[0,1]$ vers la fonction

$$f : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0,1[\\ 1 & \text{si } x = 1. \end{cases}$$

Remarque 1.

L'exemple précédent nous montre que si une suite de fonctions continues converge simplement vers f, f n'est pas continue en général !

Exercice 1.

1. Écrire la définition de la convergence uniforme vers une fonction en termes "epsilonesques".

2. Pour $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des suites de fonctions qui converge simplement sur A vers des fonctions f et g respectivement, étudier la convergence simple des suites de fonctions $(\lambda f_n + \mu g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (où $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$) et $(f_n g_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
3. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions qui converge simplement sur A vers une fonction f. Que

dire de f lorsqu'à partir d'un certain rang, les f_n sont : positives ? croissantes ? dérivables ? périodiques (de même période T) ? strictement positives ?

Correction.

1. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de A dans F et $f : A \to F$. Alors $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers f sur A si, et seulement si,
$$\forall \varepsilon > 0,\ \forall x \in A,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \geq N, \quad \|f_n(x) - f(x)\|_F \leq \varepsilon.$$
2. On suppose que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent simplement vers f et g respectivement sur A. Soit $x \in A$. On a :
$$(\lambda f_n + \mu g_n)(x) = \lambda f_n(x) + \mu g_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \lambda f(x) + \mu g(x) = (\lambda f + \mu g)(x),$$
par linéarité du passage à la limite. Ainsi, $(\lambda f_n + \mu g_n)$ converge simplement vers $\lambda f + \mu g$ sur A.
De plus, on a, pour $x \in A$:
$$(f_n g_n)(x) = f_n(x) g_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(x)g(x) = (fg)(x),$$
donc $(f_n g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers fg sur A.
3. Par les propriétés de la limite, on remarque que la positivité, la croissance et la périodicité (avec une période commune) "passent" à la convergence simple.
Par contre, la dérivabilité ne passe pas (voire $f_n : t \to t^n$ sur $[0, 1]$) et la stricte positivité ne passe pas non plus (voire $f_n : t \to t^n$ sur $]0, 1]$).

Exercice 2.

Étudier la convergence simple de la suite de fonctions (f_n) définie, pour $n \in \mathbb{N}$, par :
$$a)\ f_n : t \mapsto \frac{1 + nt^2}{1 + nt}. \qquad b)\ f_n : t \mapsto \sin^n(t)\cos(t).$$
$$c)\ f_n : x \mapsto f_n(x) = \begin{cases} nx^2 & \text{si } x \in [-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}] \\ 6n\left(\frac{1}{\sin(\frac{1}{nx})} - \frac{1}{\tan(\frac{1}{nx})}\right) & \text{si } x \notin [-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}] \end{cases}$$

Correction.

a) Étudions la convergence simple de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sur R_+ :
Soit $x \in \mathbb{R}_+$. On a :
$$f_n(x) = \frac{1 + nx^2}{1 + nx} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \\ t & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Donc (f_n) converge simplement vers $f : t \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } t = 0 \\ t & \text{si } t > 0 \end{cases}$ sur $\mathbb{R}_+$.

b) Étudions la convergence simple de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur R.
Soit $t \in \mathbb{R}$. On a :

$$f_n(t) = \sin^n(t)cos(t) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \begin{cases} 0 & \text{si } t \in \{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \text{ car } cos(t) = 0 \\ 0 & \text{si } t \notin \{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \text{ car } |sin(t)| < 1 \end{cases}$$

Donc $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers la fonction nulle.

c) Étudions la convergence simple de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sur $\mathbb{R}$. Soit $x \in \mathbb{R}$.
Traitons tout d'abord le cas $x \neq 0$. Alors, à partir d'un certain rang N ($N = E(1/|x|) + 1$ par exemple), pour tout $n \geq N$, $x \notin [-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}]$. Par suite, pour tout $n \geq N$,

$$f_n(x) = 6n\left(\frac{1}{\sin(\frac{1}{nx})} - \frac{1}{\tan(\frac{1}{nx})}\right).$$

Or quand $n \to +\infty$, on a :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sin(\frac{1}{nx})} - \frac{1}{\tan(\frac{1}{nx})} &= \frac{\tan(\frac{1}{nx}) - \sin(\frac{1}{nx})}{\sin(\frac{1}{nx})\tan(\frac{1}{nx})} \\ &= \frac{\frac{1}{nx} + \frac{1}{3n^3x^3} + o(\frac{1}{n^3}) - (\frac{1}{nx} - \frac{1}{6n^3x^3} + o(\frac{1}{n^3}))}{\frac{1}{n^2x^2} + o(\frac{1}{n^2})} \\ &= \frac{\frac{1}{2n^3x^3} + o(\frac{1}{n^3})}{\frac{1}{n^2x^2} + o(\frac{1}{n^2})} \\ &\underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2nx} \end{aligned}$$

Ainsi, toujours pour $x \neq 0$ et $n \geq N$,

$$f_n(x) = 6n\left(\frac{1}{\sin(\frac{1}{nx})} - \frac{1}{\tan(\frac{1}{nx})}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{6n}{3nx} = \frac{3}{x}.$$

Il en résulte que :

$$f_n(t) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ \dfrac{3}{x} & \text{si } x \in \mathbb{R}^* \end{cases}$$

Donc (f_n) converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers la fonction $f : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ \dfrac{3}{x} & \text{si } x \in \mathbb{R}^* \end{cases}$.

La définition suivante est une simple reformulation de la précédente dans le cas particulier des séries :

Définition 2. *Convergence simple d'une série de fonctions*

Soit $\sum f_n$ une série de fonctions de $A \subset E$ dans F. On dit que $\sum f_n$ **converge simplement sur** A si la suite de ses sommes partielles converge simplement sur A i.e. si pour tout $x \in A$,

$\sum f_n(x)$ est convergente. Dans ce cas, on note $S : A \to F$ la fonction :

$$S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x).$$

Exemple 2.

— La série de fonctions $\sum f_n$ où $f_n : t \mapsto t^n$ converge simplement vers $t \mapsto \frac{1}{1-t}$ sur $]-1,1[$.

> En effet : soit $t \in]-1,1[$. On a :
>
> $$S_N = \sum_n = 0^N t^n = \frac{1-t^{N+1}}{1-t} \xrightarrow[N\to+\infty]{} \frac{1}{1-t} \text{ car } |t| < 1.$$

— La série de fonctions $\sum f_n$ où $f_n : t \mapsto \dfrac{t^n}{n!}$ converge simplement vers $t \mapsto e^t$ sur $\mathbb{R}$.

> En effet : soit $t \in \mathbb{R}$. En appliquant la règle de D'Alembert, on montre que $\sum \frac{t^n}{n!}$ est une série absolument convergente et donc convergente ; et de plus, sa somme vérifie
>
> $$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{n!} = e^t.$$

2. Convergence uniforme

a. Définition et premières propriétés

Définition 3. *Convergence uniforme d'une suite de fonctions*

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions et f une fonction de $A \subset E$ dans F.
On dit que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge uniformément vers** f **sur** A si :

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, N \in \mathbb{N},\ \forall\, x \in A,\ \forall\, n \geq N, \quad \|f_n(x) - f(x)\|_F \leq \varepsilon.$$

On dit que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge uniformément sur** A s'il existe f telle que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur A.

Question 1.

Comparer les définitions des convergences simple et uniforme en termes epsilonesques ! Quelle est la différence ?

On rappelle la notation suivante :

Notation 1. *Norme de la convergence uniforme*

Soit $\mathcal{F}_b(A,F)$ (ou encore $\mathcal{B}(A,F)$) l'espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ des fonctions bornées de $A \subset E$ dans F. On note $\|\cdot\|_\infty$ la **norme de la convergence uniforme** sur $\mathcal{F}_b(A,F)$ i.e. pour $f \in \mathcal{F}_b(A,F)$:

$$\|f\|_\infty = \sup_{x\in A} \|f(x)\|_F.$$

Proposition 1.

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions et f une fonction de A dans F. La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur A si, et seulement si :

i) Les fonctions $f_n - f$ sont bornées sur A à partir d'un certain rang N et,

ii) $\|f_n - f\|_\infty \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Démonstration.

- $(\Rightarrow)$. On suppose que (f_n) converge uniformément vers f sur A. Alors :

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, N \in \mathbb{N},\ \forall\, x \in A,\ \forall\, n \geq N, \quad \|f_n(x) - f(x)\|_F \leq \varepsilon.$$

  Prenons $\varepsilon = 1$. Alors il existe un rang $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, on a, pour tout $x \in A$, $\|f_n(x) - f(x)\|_F \leq 1$.
  Ainsi, à partir d'un certain rang, $f_n - f$ est bornée sur A par 1.
  Montrons désormais que $\|f_n - f\|_\infty \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
  Soit $\varepsilon > 0$. Alors

$$\exists\, N \in \mathbb{N},\ \forall\, x \in A,\ \forall\, n \geq N, \quad \|f_n(x) - f(x)\|_F \leq \varepsilon.$$

  Par suite, comme l'inégalité précédente est vraie pour tout $x \in A$, on a, pour tout $n \geq N$,

$$\|f_n - f\|_\infty = \sup_{x\in A} \|f_n(x) - f(x)\|_F \leq \varepsilon.$$

  Il en résulte que $\|f_n - f\|_\infty \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

- $(\Leftarrow)$. On suppose $i)$ et $ii)$. Du fait de $i)$, quitte à supprimer une nombre fini de termes de la suite (f_n) on peut supposer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n - f$ est bornée sur A. Ainsi, on peut considérer, pour chaque $n \in \mathbb{N}$, la quantité $\|f_n - f\|_\infty = \sup_{t\in A} \|f_n(t) - f(t)\|_F$.
  Soit $\varepsilon > 0$. D'après $ii)$, $\|f_n - f\|_\infty \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, il existe un rang $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout entier $n \geq N$,

$$\|f_n - f\|_\infty \leq \varepsilon.$$

  Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq N$ et $x \in A$. Alors on a :

$$\|f_n(x) - f(x)\|_F \leq \sup_{t\in A} \|f_n(t) - f(t)\|_F = \|f_n - f\|_\infty \leq \varepsilon.$$

  Il en résulte que la suite $(f_n - f)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f.

□

Proposition 2.

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions et f une fonction de A dans F. Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur A, alors $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers f sur A.

Démonstration.

On suppose que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur A. alors d'après la proposition précédente, il existe un rang $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, $f_n - f$ est bornée. Soit $x \in A$. Pour $n \geq N$, on a :

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \|f_n - f\|_\infty \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0,$$

d'où $f_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(x)$. Il en résulte que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers f sur A. □

Exemple 3.

— La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que, pour $n \in \mathbb{N}$, $f_n : x \mapsto \sqrt{x + \frac{1}{n}}$ converge uniformément vers $x \mapsto \sqrt{x}$ sur $\mathbb{R}_+$.

> En effet : soit $n \in \mathbb{N}^*$ et on note $f : x \mapsto \sqrt{x}$. On a, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$,
>
> $$|f_n(x) - f(x)| = |\sqrt{x + \frac{1}{n}} - \sqrt{x}| = \frac{\frac{1}{n}}{\sqrt{x + \frac{1}{n}} + \sqrt{x}} \leq \frac{\frac{1}{n}}{\sqrt{0 + \frac{1}{n}} + \sqrt{0}} = \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{\sqrt{n}}} = \frac{1}{\sqrt{n}}.$$
>
> Par suite, les fonctions $f_n - f$ sont bornées sur $\mathbb{R}_+$ et :
>
> $$\|f_n - f\|_\infty = \sup_{x\in\mathbb{R}_+} |f_n(x) - f(x)| \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

— La suite de fonctions de terme général $t \mapsto t^n$ ne converge pas uniformément sur $[0, 1[$.

> En effet, on remarque tout d'abord que (f_n) converge simplement vers le fonction nulle sur $[0, 1[$.
> Soit $n \in \mathbb{N}$ et on note $f : x \mapsto 0$. Comme $f_n : t \mapsto t^n$ est strictement croissante sur $[0, 1[$ (pour $n > 0$), on a :
>
> $$\|f_n - f\|_\infty = \sup_{t\in[0,1[} t^n = \lim_{t\to1^-} t^n = 1$$
>
> Par suite,
>
> $$\|f_n - f\|_\infty = 1 \underset{n\to+\infty}{\not\to} 0.$$

Proposition 3.

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des suites de fonctions de A dans F et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$. Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent uniformément vers respectivement f et g sur A, alors $(\lambda f_n + \mu g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers $\lambda f + \mu g$ sur A.

Démonstration.

On suppose $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent uniformément vers respectivement f et g sur A. Alors, à partir d'un certain rang N_1 (resp. N_2), pour tout $n \geq N_1$ (resp. $n \geq N_2$), $f_n - f$ (resp. $g_n - g$) est bornée sur A. Par suite, comme l'ensemble des fonctions bornées sur A est un espace vectoriel, à partir du rang $N = \max(N_1, N_2)$, pour tout $n \geq N$, $\lambda f_n + \mu g_n - (\lambda f + \mu g)$ est bornée sur A. Et de plus, on a :

$$\|\lambda f_n + \mu g_n - (\lambda f + \mu g)\|_\infty \leq |\lambda|\|f_n - f\|_\infty + |\mu|\|g_n - g\|_\infty \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0,$$

car $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent uniformément vers respectivement f et g sur A. Il en résulte que $(\lambda f_n + \mu g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers $\lambda f + \mu g$ sur A. □

Méthode : Montrer qu'une suite de fonctions converge uniformément.

- *Limite potentielle :* On étudie la convergence simple de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$. S'il y a convergence simple vers une fonction f sur A, on étudie alors la convergence uniforme vers f sur A.
- *Convergence uniforme vers la limite :* Pour montrer la convergence uniforme de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on cherche à obtenir une majoration de $\|f_n - f\|_\infty$ qui tende vers 0 i.e. une majoration **indépendante de** $x \in A$ du type (à partir d'un certain rang)

$$\|f_n(x) - f(x)\|_F \leq u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

où (u_n) est une suite de réels positifs qui tend vers 0 (**et qui ne dépend pas de** $x \in A$ **!!!**).

La suite (u_n) s'obtient la plus souvent par une majoration simple, quand c'est possible, de $\|f_n(x) - f(x)\|_F$ ou par une étude des extrema de la fonction $x \mapsto \|f_n(x) - f(x)\|_F$ (à n fixé).

Exercice 3.

Étudier la convergence uniforme des suites de fonctions de termes généraux suivants :

1. pour $n \in \mathbb{N}$, $f_n : [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \to \mathbb{R}$ tel que $f_n : x \mapsto x^n$.
2. pour $n \in \mathbb{N}$, $f_n : [0, 1] \to \mathbb{R}$ tel que $f_n : x \mapsto x^n(1 - x)$.
3. pour $n \in \mathbb{N}$, $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tel que $f_n : x \mapsto \sin(x + \frac{1}{n})$.
4. pour $n \in \mathbb{N}$, $f_n : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ tel que $f_n : x \mapsto \frac{x}{n(1+x^n)}$.

Correction.

1. — CVS sur $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$. Soit $x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$. On a :

$$f_n(x) = x^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

car $|x| \leq \frac{1}{2} < 1$.
Par suite, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers $\mathbf{0}$ (la fonction nulle) sur $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$.

— CVU sur $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$. Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$, on a :

$$|f_n(x) - f(x)| = |x|^n \leq \frac{1}{2^n},$$

D'où $f_n - f$ est borné sur $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ et :

$$\|f_n - f\|_\infty \leq \frac{1}{2^n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Remarque : l'inégalité précédente est en fait une égalité.
Il en résulte que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers $\mathbf{0}$ sur $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$.

2. — CVS sur $[0, 1]$. Soit $x \in [0, 1]$. On a :

$$f_n(x) = x^n(1-x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \begin{cases} 0 \times (1-x) = 0 & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 1 \times 0 = 0 & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

Par suite, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers $\mathbf{0}$ (la fonction nulle) sur $[0, 1]$.

— CVU sur $[0, 1]$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On étudie sur $[0, 1]$ la fonction :

$$x \mapsto g_n(x) = |f_n(x) - f(x)| = x^n(1-x).$$

La fonction g_n est dérivable, et on a $g_n'(x) = x^{n-1}(n - (n+1)x)$.

x	0		$\frac{n}{n+1}$		1
$g_n'(x)$	0	$+$	0	$-$	
$g_n(x)$	0	$\nearrow$	$g_n(\frac{n}{n+1})$	$\searrow$	0

Par suite, on a :

$$\|f_n - f\|_\infty = g_n(\frac{n}{n+1}) = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n (1 - \frac{n}{n+1}) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{e} \times 0 = 0.$$

Il en résulte que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers $\mathbf{0}$ sur $[0, 1]$.

3. — CVS sur $\mathbb{R}$. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a, par continuité de la fonction sin sur $\mathbb{R}$ et donc en x :

$$f_n(x) = \sin(x + \frac{1}{n}) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \sin(x)$$

Par suite, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers $f = \sin$ sur $\mathbb{R}$.

— <u>CVU sur $\mathbb{R}$</u>. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{array}{rcl} |f_n(x) - f(x)| & = & |\sin(x+\frac{1}{n}) - \sin(x)| \\ & = & |\cos(x)\sin(\frac{1}{n}) + \sin(x)\left(\cos(\frac{1}{n}) - 1\right)| \\ & \leq & |\cos(x)||\sin(\frac{1}{n})| + |\sin(x)||\cos(\frac{1}{n}) - 1| \\ & \leq & |\sin(\frac{1}{n})| + |\cos(\frac{1}{n}) - 1| \end{array}$$

D'où $f_n - f$ est borné par 2 sur $\mathbb{R}$ et :

$$\|f_n - f\|_\infty \leq |\sin(\frac{1}{n})| + |\cos(\frac{1}{n}) - 1| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

car $\lim\limits_{t\to 0} \sin(t) = 0$ et $\lim\limits_{t\to 0} \cos(t) = 1$.

Il en résulte que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers sin sur $\mathbb{R}$.

Correction suite.

4. — <u>CVS sur $\mathbb{R}_+$</u>. Soit $x \in \mathbb{R}_+$. On a :

$$f_n(x) = \frac{x}{n(1+x^n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ 0 & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

Par suite, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers $\mathbf{0}$ (la fonction nulle) sur $\mathbb{R}_+$.

— <u>CVU sur $\mathbb{R}_+$</u>. Soit $n \geq 2$. On étudie sur $[0,1]$ la fonction :

$$x \mapsto g_n(x) = |f_n(x) - f(x)| = \frac{x}{n(1+x^n)}.$$

La fonction g_n est dérivable, et on a

$$g_n'(x) = \frac{n(1+x^n) - n^2x^n}{n^2(1+x^n)^2} = \frac{1-(n-1)x^n}{n(1+x^n)^2} = \frac{1-(n-1)x^n}{n(1+x^n)^2}$$

x	0		$\frac{1}{\sqrt[n]{n-1}}$		$+\infty$
$g_n'(x)$		$+$	0	$-$	
$g_n(x)$	0	$\nearrow$	$g_n(\frac{1}{\sqrt[n]{n-1}})$	$\searrow$	0

Par suite, on a :

$$\|f_n - f\|_\infty = g_n(\frac{1}{\sqrt[n]{n-1}}) = \frac{1}{\sqrt[n]{n-1}}.\frac{1}{n(1+\dfrac{1}{n-1})} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1 \times 0 = 0.$$

Il en résulte que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers $\mathbf{0}$ sur $\mathbb{R}_+$.

Remarque : on pouvait conclure plus rapidement en remarquant l'inégalité suivante :

$$g_n(x) = \frac{x}{n(1+x^n)} \le \frac{1}{n}.$$

En effet, pour $0 \le x \le 1$, $\frac{x}{1+x^n} \le \dfrac{1}{1+x^n} \le 1$ *;*

et pour $x > 1$, $x^n > x$, *donc* $\frac{x}{1+x^n} \le \dfrac{x}{1+x} \le 1$.

Méthode : Montrer qu'une suite de fonctions ne converge pas uniformément.

S'il n'y a pas convergence simple sur A, il n'y pas convergence uniforme.

Mais si on a déterminé une limite f pour la convergence simple, pour montrer que la suite (f_n) ne converge pas uniformément vers f, on peut :

- montrer que la fonction $f_n - f$ n'est pas bornée sur A, ou
- exhiber une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans A telle que la suite de terme général

$$\|f_n(x_n) - f(x_n)\|_F \textbf{ ne tend pas vers } 0.$$

Exercice 4.

Étudier la convergence uniforme des suites de fonctions de termes généraux suivants :

1. pour $n \in \mathbb{N}$, $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tel que $f_n : x \mapsto \frac{x^n}{n!}$.
2. pour $n \in \mathbb{N}$, $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tel que $f_n : x \mapsto \frac{nx}{1+n^2x^2}$.
3. pour $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tel que $f_n : x \mapsto \left(x + \frac{1}{n}\right)^2$.

Correction.

1. — CVS sur $\mathbb{R}$. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$f_n(x) = \frac{x^n}{n!} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Par suite, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers $\mathbf{0}$ (la fonction nulle) sur $\mathbb{R}$.

— CVU sur $\mathbb{R}$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$|f_n(x) - f(x)| = \frac{|x|^n}{n!} \xrightarrow[x\to\pm\infty]{} +\infty,$$

Par suite, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n - f$ n'est pas bornée sur $\mathbb{R}$.
Il en résulte que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas uniformément vers $\mathbf{0}$ sur $\mathbb{R}$.

2. — CVS sur $\mathbb{R}$. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

car, pour $x \neq 0$, $\dfrac{nx}{1+n^2x^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{nx}$.

Par suite, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers $\mathbf{0}$ (la fonction nulle) sur $\mathbb{R}$.

— CVU sur $\mathbb{R}$. Soit $n \in \mathbb{N}$. On considère, pour $x \in \mathbb{R}$:

$$g_n(x) = |f_n(x) - f(x)| = \frac{n|x|}{1+n^2x^2}.$$

On remarque que pour $x_n = \dfrac{1}{n}$, on a :

$$g_n(x_n) = \frac{n\frac{1}{n}}{1+n^2(\frac{1}{n})^2} = \frac{1}{2}$$

Donc :

$$\|f_n - f\|_\infty = \sup_{x\in\mathbb{R}} g_n(x) \geq g_n(x_n) = \frac{1}{2} \underset{n\to+\infty}{\not\to} 0.$$

Il en résulte que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas uniformément vers $\mathbf{0}$ sur $\mathbb{R}$.

3. — CVS sur $\mathbb{R}$. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a, par continuité sur $\mathbb{R}$ et donc en x de la fonction carrée :

$$f_n(x) = \left(x + \frac{1}{n}\right)^2 \xrightarrow[n\to+\infty]{} x^2.$$

Par suite, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers $f : x \mapsto x^2$ sur $\mathbb{R}$.

— CVU sur $\mathbb{R}$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$|f_n(x) - f(x)| = |\left(x + \frac{1}{n}\right)^2 - x^2| = |\frac{2x}{n} + \frac{1}{n^2}| \xrightarrow[x\to\pm\infty]{} +\infty,$$

Par suite, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n - f$ n'est pas bornée sur $\mathbb{R}$.
Il en résulte que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas uniformément vers f sur $\mathbb{R}$.

Exercice 5.

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des suites de fonctions à valeurs réelles qui convergent uniformément vers f et g respectivement. Est-ce que $(f_ng_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément ?

Correction.

Non, car la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, définie par $f_n : x \mapsto x + \frac{1}{n}$ pour $n \in \mathbb{N}$, converge uniformément vers $f : x \mapsto x$ sur $\mathbb{R}$ et on a prouvé précédemment que la suite de terme général $f_n^2 : x \mapsto (x + \frac{1}{n})^2$ ne converge pas uniformément vers $x \mapsto x^2$ sur $\mathbb{R}$.

b. Convergence uniforme des suites de fonctions bornées

Proposition 4.

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions bornées sur A. Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers une fonction f sur A, alors f est bornée sur A.

Démonstration.

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions bornées sur A. On suppose que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur A.

Par convergence uniforme, à partir d'un certain rang N, $f_n - f$ est bornée sur A. Par suite, pour tout $x \in A$, on a, pour $n \geq N$:

$$\|f(x)\|_F \leq \|f_n(x)\|_F + \|f_n(x) - f(x)\|_F \leq \|f_n\|_\infty + \|f_n - f\|_\infty$$

Donc f est bornée sur A. □

Question 2.

Cela est-il vrai dans le cas de la converge simple ?

Réponse : Non ! Considérons la fonction $f : x \mapsto x$ et la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie, pour $n \in \mathbb{N}$, par :

$$f_n : x \mapsto \begin{cases} f(x) = x & \text{si } x \in [-n, n] \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Alors, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un suite de fonctions bornées sur $\mathbb{R}$ qui converge simplement vers f qui n'est pas bornée sur $\mathbb{R}$.

(Et bien-sur, il ne peut y avoir convergence uniforme vers f sur $\mathbb{R}$ en vertu de la proposition précédente !)

Proposition 5.

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions bornées sur A. Alors $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément si, et seulement si, (f_n) converge dans l'espace vectoriel normé $(\mathcal{F}_b(A, F), \|\cdot\|_\infty)$.

Démonstration.

Il s'agit simplement de deux formulations différentes de la même propriété. □

Exercice 6.

Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $g : x \mapsto \dfrac{x}{1 + 27x^4}$

1. Calculer $\|g\|_\infty$.
2. On considère la suite de terme générale $f_n : x \mapsto g(nx)$. Étudier les convergences simple

et uniforme de cette suite.

Correction.

1. La fonction g est une fonction impaire et dérivable sur $\mathbb{R}$. On effectue son étude sur $\mathbb{R}_+$. Pour $x \in \mathbb{R}_+$, on a :

$$g'(x) = \frac{(1+27x^4) - 108x^4}{(1+27x^4)^2} = \frac{1-81x^4}{(1+27x^4)^2},$$

x	0		$\frac{1}{3}$		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{4}$	$\searrow$	0

Par suite, comme g est impaire, on a :

$$\|g\|_\infty = \sup_{x\in\mathbb{R}} |g(x)| = \sup_{x\in\mathbb{R}_+} |g(x)| = \frac{1}{4}.$$

2. — <u>CVS sur $\mathbb{R}$.</u> Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$f_n(x) = g(nx) = \frac{nx}{1+27n^4x^4} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ 0 & \text{si } x \neq 0, \end{cases}$$

car pour $x \neq 0$, $\dfrac{nx}{1+27n^4x^4} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{27n^3x^3}$.

Par suite, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers $f : x \mapsto 0$ sur $\mathbb{R}$.

— <u>CVS sur $\mathbb{R}$.</u> Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La fonction $\varphi : x \mapsto nx$ est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, donc :

$$\|f_n - f\|_\infty = \sup_{x\in\mathbb{R}} |g(nx)| = \sup_{y\in\mathbb{R}} |g(y)| = \frac{1}{4} \underset{n\to+\infty}{\not\to} 0.$$

Par suite, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas uniformément vers f sur $\mathbb{R}$.

Exercice 7.

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des suites de fonctions à valeurs réelles **bornées** qui convergent uniformément vers f et g respectivement. Est-ce que $(f_ng_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément ?

Correction.

Cette fois-ci, l'hypothèse "bornées" permet de conclure par l'affirmative.
En effet, d'après la proposition précédente, f et g sont bornées sur A. De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in A$, on a :

$$\begin{aligned} |(f_n g_n - fg)(x)| &= |f_n(x)g_n(x) - f(x)g_n(x) + f(x)g_n(x) - f(x)g(x)| \\ &\leq |f_n(x)g_n(x) - f(x)g_n(x)| + |f(x)g_n(x) - f(x)g(x)| \\ &\leq |g_n(x)|.|f_n(x) - f(x)| + |f(x)|.|g_n(x) - g(x)| \\ &\leq |g_n(x)|.|f_n(x) - f(x)| + |f(x)|.|g_n(x) - g(x)| \\ &\leq \|g_n\|_\infty \|f_n - f\|_\infty + \|f\|_\infty \|g_n - g\|_\infty \end{aligned}$$

Donc $f_n g_n - fg$ est bornée et on remarque que, par convergence uniforme de $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers g, on a :

$$\|g_n\|_\infty = \|g_n - g + g\|_\infty \leq \|g_n - g\|_\infty + \|g\|_\infty \xrightarrow[n\to+\infty]{} \|g\|_\infty.$$

Ainsi, on a :

$$\|f_n g_n - fg\|_\infty \leq \|g_n\|_\infty \|f_n - f\|_\infty + \|f\|_\infty \|g_n - g\|_\infty \xrightarrow[n\to+\infty]{} \|g\|_\infty \times 0 + \|f\|_\infty \times 0 = 0.$$

Donc $(f_n g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers fg.

c. Convergence uniforme sur une partie

Définition 4. *Convergence uniforme sur une partie*

Soit $B \subset A$ et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de I dans $\mathbb{R}$. On dit que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge uniformément sur** $B \subset A$ si, pour $(f_{n|_B})_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur B.

Exemple 4.

Pour tout $a > 0$, la suite de fonctions de terme général $f_n : t \mapsto \frac{1}{1+nt}$ converge uniformément sur $[a, +\infty[\subset \mathbb{R}_+^*$.

On remarque tout d'abord que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas uniformément sur $\mathbb{R}_+^*$. En effet, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers $f : x \mapsto 0$ sur $\mathbb{R}_+^*$ mais on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\|f_n - f\|_\infty = \sup_{t\in\mathbb{R}}(\frac{1}{1+nt}) = 1 \underset{n\to+\infty}{\not\to} 0,$$

car f_n est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\lim_{t\to 0} \frac{1}{1+nt} = 1$.
Donc $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas uniformément sur $\mathbb{R}_+^*$.
Remarque : on aurait aussi pu utiliser le fait que, pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\|f_n - f\|_\infty = \|f_n\|_\infty \geq f_n(\frac{1}{n}) = \frac{1}{1+n\frac{1}{n}} = \frac{1}{2} \underset{n\to+\infty}{\not\to} 0.$$

Soit $a > 0$. Étudions la convergence uniforme sur $[a, +\infty[$.
Soit $n \in \mathbb{N}$. On a, pour tout $x \in [a, +\infty[$,

$$|f_n(t) - f(t)| = \frac{1}{1+nt} \leq \frac{1}{1+na}.$$

Ainsi, les $f_n - f$ sont bornés sur $[a, +\infty[$ et :

$$\|f_n - f\|_\infty \leq \frac{1}{1+na} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Il en résulte que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur $[a, +\infty[$.

Exercice 8.

Étudier la converge uniforme de la suite de terme général $f_n : x \mapsto e^{-nx}\sin(nx)$ sur les intervalles de la forme $[a, +\infty[$ avec $a > 0$ puis sur $\mathbb{R}_+$.

Correction.

— CVS sur $\mathbb{R}_+$. Soit $x \in \mathbb{R}_+$. On a :

$$f_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \text{ car } \sin(0) = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

car, pour $x > 0$, $e^{-nx} \xrightarrow[n\to]{} 0$ et $|\sin(nx)| \leq 1$.
Par suite, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers $f : x \mapsto 0$ sur $\mathbb{R}_+$.

— CVS sur $\mathbb{R}_+$. On considère la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ telle que, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $x_n = \frac{1}{n}$. Alors, on a :

$$|f_n(x_n) - f(x_n)| = e^{-n\frac{1}{n}} \sin(n\frac{1}{n}) = e\sin(1).$$

Par suite,

$$\|f_n - f\|_\infty \geq e\sin(1) \underset{n\to+\infty}{\not\to} 0.$$

Donc $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas uniformément sur $\mathbb{R}_+$.

— Soit $a > 0$. CVS sur $[a, +\infty[$. Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $x \in [a, +\infty[$,

$$|f_n(x) - f(x)| = e^{-nx}|\sin(nx)| \leq e^{-na}.$$

Par suite,

$$\|f_n - f\|_\infty \leq e^{-na} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Il en résulte que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur $[a, +\infty[$.

Définition 5. *Convergence uniforme sur tout segment*

Soit I un intervalle d'intérieur non vide et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de I dans $\mathbb{R}$. On dit que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge uniformément sur tout segment de** I si, pour tout segment $[a, b] \subset I$, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[a, b]$.

Exemple 5.

La suite de fonctions de terme général $f_n : t \mapsto t^n$ converge uniformément sur tout segment de $]-1, 1[$.

Exercice 9.

Étudier la converge uniforme de la suite de terme général $f_n : x \mapsto \frac{x^n}{n!}$ sur tout segment de $\mathbb{R}$.

3. Convergence uniforme des séries de fonctions

a. Généralités

Définition 6.

Soit $\sum f_n$ une série de fonctions de A dans F. On dit que $\sum f_n$ **converge uniformément sur** A si la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de ses sommes partielles converge uniformément sur A.

Proposition 6.

Soit $\sum f_n$ une série de fonctions de A dans F. Alors $\sum f_n$ converge uniformément sur A si, et seulement si, $\sum f_n$ converge simplement sur A et la suite $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des restes de $\sum f_n$ converge uniformément vers la fonction nulle 0 sur A.

Démonstration.

$\sum f_n = (S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers la fonction S sur A si, et seulement si, $(R_n)_{n\in\mathbb{N}} = (S - S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers la fonction $S - S = 0$ sur A. $\square$

Exemple 6.

— La suite de fonctions de terme général $f_n : x \mapsto x^n$ converge uniformément vers $x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$ sur tout segment de $]-1,1[$ mais ne converge pas uniformément sur $]-1,1[$.

Exercice 10.

1. Étudier la convergence uniforme de la série $\sum \frac{(-1)^n}{n+1+x^2}$ sur $\mathbb{R}$.
2. Étudier la convergence uniforme de la série $\sum \frac{x^n}{n!}$ sur $\mathbb{R}$.

b. Convergence normale des séries de fonctions

Définition 7. *Convergence normale*

Soit $\sum f_n$ une série de fonctions de A dans F. On dit que $\sum f_n$ **converge normalement sur** A si :

i) pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est bornée ; et

ii) la série $\sum \|f_n\|_\infty$ est convergente.

Exemple 7.

La série $\sum \dfrac{\cos(n^3 x)}{(n+1)^2}$ converge normalement sur $\mathbb{R}$.

> En effet, on a, pour $f_n : x \mapsto \dfrac{\cos(n^3 x)}{(n+1)^2}$:
>
> $$\|f_n\|_\infty = \sup_{x\in\mathbb{R}}\left(\left|\frac{\cos(n^3 x)}{(n+1)^2}\right|\right) \leq \frac{1}{(n+1)^2}$$
>
> Or d'après le critère de Riemann, $\frac{1}{(n+1)^2}$ est le terme général d'une série convergente. Ainsi, $\sum f_n$ converge normalement.

Proposition 7.

Soit $\sum f_n$ une série de fonctions de A dans F. Si $\sum f_n$ converge normalement sur A, alors $\sum f_n$ converge uniformément sur A.

Démonstration.

Si $\sum f_n$ converge normalement, alors les f_n sont bornés et $\sum \|f_n\|_\infty$ converge. La convergence de $\sum \|f_n\|_\infty$ revient à la convergence absolue de $\sum f_n$. Par suite, $\sum f_n$ converge dans $\mathcal{F}_b(A, F)$ vers f et donc $\sum f_n$ converge uniformément vers f sur A. $\square$

Remarque 2.

Attention, la réciproque est fausse : chercher parmi les exemples précédents une série de fonctions qui converge uniformément mais pas normalement.

Proposition 8.

Soit $\sum f_n$ une série de fonctions de A dans F. Si $\sum f_n$ converge normalement sur A, alors, pour tout $x \in A$, la série de vecteurs $\sum f_n(x)$ est absolument convergente, i.e. $\sum \|f_n(x)\|_F$ converge.

Méthode : Montrer qu'une série de fonctions converge normalement

Pour montrer la convergence normale de $\sum f_n$, on cherche à obtenir une majoration de $\|f_n\|_\infty$ qui tende vers 0 i.e. une majoration **indépendante de** $x \in A$ du type (à partir d'un certain rang)

$$\|f_n(x)\|_F \leq u_n$$

telle que $\sum u_n$ est une série numérique convergente (**et** u_n **ne dépend pas de** $x \in A$ **!!!**).

Exercice 11.

1. Étudier la convergence normale/uniforme/simple de $\sum \dfrac{e^{-nx}}{n^2}$ sur $\mathbb{R}_+$.
2. Étudier la convergence normale/uniforme/simple de $\sum_{n\geq 1} \dfrac{1}{n^2+x^2}$ puis de $\sum_{n\geq 0} \dfrac{1}{n^2+x^2}$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 12. *Fonction Zêta de Riemann*

La fonction ζ de Riemann est définie, pour $s \in]1, +\infty[$ par :

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}.$$

Justifier la définition de la fonction ζ sur $]1, +\infty[$ en étudiant la convergence simple de la série de fonctions. Que dire de la convergence uniforme de la série vers la fonction ζ ?

Partie B

Convergence uniforme : continuité, limites, intégration et dérivation

1. Continuité

Proposition 9.

Soit $a \in A$, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions et f une fonction de A dans F. Si la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur A et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue en a, alors f est continue en a.

Démonstration.

Pour tout $x \in A$, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$.

$$\|f(x) - f(a)\|_F \leq \|f(x) - f_n(x)\|_F + \|f_n(x) - f_n(a)\|_F + \|f_n(a) - f(a)\|_F.$$

Soit $\varepsilon > 0$.

- Comme $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur A, alors il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $x \in A$ et pour tout $n \geq N$:

  $$\|f(x) - f_n(x)\|_F \leq \|f_n - f\|_\infty \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

  et c'est donc en particulier vrai pour $x = a$ également :

  $$\|f(a) - f_n(a)\|_F \leq \|f_n - f\|_\infty \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

- Soit $n \geq N$. Comme f_n est continue en a, alors il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x \in A$ avec $\|x - a\|_E \leq \delta$:

  $$\|f_n(x) - f_n(a)\|_F \leq \|f_n - f\|_\infty \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

Ainsi, en choisissant $n \geq N$, on exhibe un δ tel que pour tout $x \in A$ avec $\|x - a\|_E \leq \delta$,

$$\|f(x) - f(a)\|_F \leq \underbrace{\|f(x) - f_n(x)\|_F}_{\leq \frac{\varepsilon}{3}} + \underbrace{\|f_n(x) - f_n(a)\|_F}_{\leq \frac{\varepsilon}{3}} + \underbrace{\|f_n(a) - f(a)\|_F}_{\leq \frac{\varepsilon}{3}} \leq \varepsilon.$$

Par suite, f est continue en a. □

Corollaire 1.

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions et f une fonction de A dans F. Si la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur A et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue sur A, alors f est continue sur

A.

Proposition 10. *Cas particulier des séries*

Soit $a \in A$, $\sum f_n$ une série de fonctions et S une fonction de A dans F. Si la série $\sum f_n$ converge uniformément vers S sur A et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue en a (resp. sur A), alors S est continue en a (resp. sur A).

Remarque 3.

- Ainsi, on peut, après avoir établi la convergence simple d'une suite/série de fonctions continues, conclure directement à la non convergence uniforme si la fonction limite n'est pas continue !
- Comme la convergence normale d'une série de fonctions implique la convergence uniforme, une série de fonctions continues qui converge normalement converge vers une fonction S continue.

Théorème 1.

Soit $a \in A$, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions et f une fonction de A dans F. Si la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur un voisinage de a et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue en a, alors f est continue en a.

Soit $a \in A$, $\sum f_n$ une série de fonctions et S une fonction de A dans F. Si la série $\sum f_n$ converge uniformément vers S sur un voisinage de a et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue en a, alors S est continue en a.

Corollaire 2.

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions et f une fonction de A dans F. Si la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f au voisinage de tout point de A et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue sur A, alors f est continue sur A.

Soit $\sum f_n$ une série de fonctions et S une fonction de A dans F. Si la série $\sum f_n$ converge uniformément vers S au voisinage de tout point de A et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue sur A, alors S est continue sur A.

Exemple 8.

La série de fonction $\sum \dfrac{x^n}{n!}$ converge uniformément sur tout segment de $\mathbb{R}$ vers la fonction $S : x \mapsto \exp(x)$. Ainsi, la fonction S est continue sur $\mathbb{R}$ car $\sum \dfrac{x^n}{n!}$ converge uniformément au voisinage de tout point de $\mathbb{R}$.

Exercice 13.

1. Justifier que la fonction $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{1}{n^2+x^2}$ est bien définie sur $]0, +\infty[$ et qu'elle est continue sur cet intervalle.
2. Montrer que la fonction ζ de Riemann est continue sur $]1, +\infty[$.

2. Limites

a. Interversion de limites

Théorème 2. *Théorème de la double limite*

Soit $a \in \overline{A}$ et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions qui converge uniformément vers une fonction f sur A. Si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $\ell_n \in F$ tel que $f_n(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell_n$ alors :

i) il existe $\ell \in F$ tel que la suite $(\ell_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans F vers ℓ et,

ii) $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell$.

Autrement dit,

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a}\left(\lim_{n\to+\infty} f_n(x)\right) = \lim_{n\to+\infty}\left(\lim_{x\to a} f_n(x)\right).$$

Remarque 4.

Ce théorème reste valable dans les cas suivants :

— $A \subset \mathbb{R}$ et $a = \pm\infty$;

— $F = \mathbb{R}$; à partie d'un certain rang, $\ell_n = \lim_{x\to a} f_n(x) = \pm\infty$; et $\ell = \pm\infty$.

b. Cas des séries

Théorème 3. *Inversion limite/somme*

Soit $a \in \overline{A}$ et $\sum f_n$ une série de fonctions qui converge uniformément sur A. Si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $\ell_n \in F$ tel que $f_n(x) \xrightarrow[x\to a]{} \ell_n$ alors la série $\sum l_n$ converge et on a :

$$\lim_{x\to a} \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\lim_{x\to a} f_n(x)\right).$$

Remarque 5.

Comme pour les suites de fonctions, le théorème précédent reste valable dans les cas des limites "infinies".

Exercice 14.

1. Justifier l'existence et déterminer $\lim_{s\to+\infty}\zeta(s)$.
2. Justifier l'existence et déterminer $\lim_{x\to 0^+} x\sum_{n=0}\frac{1}{n^2+x}$.

3. Intégration

Dans ce paragraphe, les fonctions considérées sont définies sur un intervalle d'intérieur non vide I de $\mathbb{R}$ et sont à valeurs dans $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$; de plus, a, b sont des éléments de I tels que $a<b$.

a. Intégration sur un segment

On rappelle la notation suivante :

Notation 2. *Norme de la convergence en moyenne*

Soit $C([a,b],\mathbb{K})$ l'espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ des fonctions continues de $[a,b]$ dans $\mathbb{K}$. On note $\|\cdot\|_1$ la **norme de la convergence en moyenne** sur $C([a,b],\mathbb{K})$ i.e. pour $f\in C([a,b],\mathbb{K})$:

$$\|f\|_1=\int_a^b |f(t)|dt.$$

Proposition 11.

Soit (f_n) une suite de fonctions continues et f une fonction continue de $[a,b]$ dans $\mathbb{K}$. Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en moyenne vers f i.e. $\|f_n-f\|_1 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, alors

$$\lim_{n\to+\infty}\int_a^b f_n(t)dt=\int_a^b f(t)dt.$$

Démonstration.

On a :

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b f_n(t)dt-\int_a^b f(t)dt\right| &= \left|\int_a^b (f_n(t)-f(t))\,dt\right|\\ &\leq \int_a^b |f_n(t)-f(t)|\,dt\\ &= \|f_n-f\|_1 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.\end{aligned}$$

□

Lemme 1.

Sur $C([a,b],\mathbb{K})$, la norme de la convergence en moyenne est dominée par la norme de la convergence uniforme ; plus précisément, on a, pour tout $f \in C([a,b],\mathbb{K})$:

$$\|f\|_1 \leq (b-a)\|f\|_\infty.$$

Démonstration.

Soit $f \in C([a,b],\mathbb{K})$. On a :

$$\int_a^b \underbrace{|f(t)|}_{\leq \sup_{t\in[a,b]}|f(t)|} dt \leq \|f\|_\infty \int_a^b dt = (b-a)\|f\|_\infty.$$

□

Théorème 4. *Interversion limite/intégrale*

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues et f une fonction de $[a,b]$ dans $\mathbb{K}$. Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur $[a,b]$ alors $f \in C([a,b],\mathbb{K})$ et

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(t)dt = \int_a^b \lim_{n\to+\infty} f_n(t)dt = \int_a^b f(t)dt.$$

Démonstration.

On suppose que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur $[a,b]$. Alors, comme les (f_n) sont continues sur $[a,b]$, alors f est continue sur $[a,b]$. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n - f \in C([a,b],\mathbb{K})$ et on a, d'après le lemme précédent :

$$\|f_n - f\|_1 \leq (b-a)\|f_n - f\|_\infty \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Donc (f_n) converge en moyenne vers f. Par suite, d'après la proposition précédente, on a :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(t)dt = \int_a^b f(t)dt.$$

□

Exercice 15.

Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 n\sin^n(x)dx.$

b. Intégration des séries de fonctions

Théorème 5. *Interversion intégrale/somme*

Soit $\sum f_n$ une série de fonctions continues de $[a,b]$ dans $\mathbb{K}$. Si $\sum f_n$ converge uniformément sur $[a,b]$ vers sa somme S, alors on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\int_a^b f_n(t)dt\right) = \int_a^b S(t)dt = \int_a^b \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)\right) dt.$$

Exercice 16.

Montrer que $f : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin(nx)}{n^2}$ est définie et continue sur $[0,\pi]$, puis démontrer que $\int_0^\pi f(t)dt = \frac{7}{4}\zeta(3)$.

c. Primitives

Théorème 6.

Soit $a \in I$, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues et f une fonction de I dans $\mathbb{K}$. Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur tout segment de I, alors pour tout $x \in I$:

$$\lim_{n\to+\infty}\int_a^x f_n(t)dt = \int_a^x \lim_{n\to+\infty} f_n(t)dt = \int_a^x f(t)dt.$$

Soit $a \in I$ et $\sum f_n$ une série de fonctions continues de I dans $\mathbb{K}$. Si $\sum f_n$ converge uniformément sur tout segment de I vers sa somme S, alors on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\int_a^x f_n(t)dt\right) = \int_a^x S(t)dt = \int_a^x \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)\right) dt.$$

Exercice 17.

Montrer que pour tout $x \in]-1,1[$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n} = -\ln(1-x)$.

4. Dérivation

Dans ce paragraphe, les fonctions considérées sont définies sur un intervalle d'intérieur non vide I de $\mathbb{R}$ et sont à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$; de plus, a, b sont des éléments de I tels que $a < b$.

a. Dérivation des suites de fonctions

Théorème 7. *Interversion dérivation/limite*

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de classe C^1 sur I et f, g des fonctions de I dans $\mathbb{K}$. Si

i) la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers f sur I et ;

ii) la suite $(f_n')_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers g sur tout segment de I.

Alors la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur tout segment de I et la fonction f est de classe C^1 sur I où on a :

$$f' = \left(\lim_{n\to+\infty} f_n\right)' = g = \lim_{n\to+\infty} f_n'.$$

Corollaire 3. *Cas des fonctions de classe C^k*

Soit $k \in \mathbb{N}^*$, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de I dans $\mathbb{K}$ de classe C^k sur I. Si

i) pour tout $i \in [\![0, k-1]\!]$, la suite $(f_n^{(i)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers f sur I et ;

ii) la suite $(f_n^{(k)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur tout segment de I.

Alors la limite simple f de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de classe C^k sur I et, pour tout $k \in [\![0, k]\!]$, on a $f^{(k)} = \lim_{n\to+\infty} f_n^{(k)}$.

b. Dérivation des séries de fonctions

Théorème 8. *Interversion dérivation/somme*

Soit $\sum f_n$ une série de fonctions de I dans $\mathbb{K}$ de classe C^1 sur I. Si

i) la série $\sum f_n$ converge simplement vers sa somme S sur I et ;

ii) la série $\sum f_n'$ converge uniformément sur tout segment de I.

Alors la série $\sum f_n$ converge uniformément vers S sur tout segment de I et la fonction S est de classe C^1 sur I où on a :

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n\right)' = S' = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n'.$$

Exemple 9.

La série de fonctions $\sum f_n$ de terme général $f_n : x \mapsto \frac{x^n}{n!}$ est C^∞ de somme S sur $\mathbb{R}$ et on a $S' = S$.

Exercice 18.

1. Montrer que la série de fonctions $\sum f_n$ de terme général $f_n : x \mapsto x^n$ est C^∞ sur $]-1, 1[$. Pour $k \in \mathbb{N}$, en déduire une expression, pour tout $x \in]-1, 1[$, de :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \binom{k+n}{k} x^n.$$

2. Montrer que la fonction ζ est C^∞ sur $]1,+\infty[$ et pour $k \in \mathbb{N}$ déterminer $\zeta^{(k)}$.

3. Montrer que la fonction $\varphi : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{e^{-nx}}{n^2+1}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ et C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$. Montrer que f est croissante et déterminer $\lim_{x\to 0^+} f(x)$. En déduire que f n'est pas dérivable en 0.

Correction.

2. Montrons que $\zeta : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$ est de classe C^∞ sur $]1,+\infty[$. Pour cela, on vérifie les hypothèses du théorème d'interversion dérivation/somme (version C^∞) :
   i) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n : x \mapsto \frac{1}{n^x}$ est de classe C^∞ sur $]1,+\infty[$;
   ii) pour tout $k \in \mathbb{N}$, la série $\sum f_n^{(k)}$ converge uniformément sur tout segment de $]1,+\infty[$.

   i) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a, pour $x \in]1,+\infty[$, $f_n(x) = \frac{1}{n^x} = e^{-x\ln(n)}$. Ainsi, f_n est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ comme composée de la fonction exp et $x \mapsto -x\ln(n)$ qui sont C^∞ sur $\mathbb{R}$. Ainsi, en particulier, f_n est de classe C^∞ sur $]1,+\infty[$ et on a, pour $k \in \mathbb{N}$ et $x \in]1,+\infty[$:
   $$f_n^{(k)} = (-1)^k \ln(n)^k e^{-x\ln(n)} = \frac{(-1)^k \ln(n)^k}{n^x}.$$

   ii) Soit $k \in \mathbb{N}$. Soit $a > 1$. On étudie la convergence normale de $\sum f_n^{(k)}$ sur $[a,+\infty[$. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :
   $$\|f_n^{(k)}\|_\infty = \sup_{x\in[a,+\infty[} \left| \frac{(-1)^k \ln(n)^k}{n^x} \right| \leq \frac{\ln(n)^k}{n^a}.$$

   — Pour $k = 0$, $\dfrac{\ln(n)^k}{n^a} = \dfrac{1}{n^a}$ est le terme général d'une série convergente d'après le critère de Riemann car $a > 1$. Ainsi, $\sum f_n$ converge normalement sur $[a,+\infty[$.

   — Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $\beta > 0$, $\ln(n) = o(n^\beta)$; ainsi, pour $\beta = \dfrac{a-1}{2k} > 0$, on a :
   $$\frac{\ln(n)^k}{n^a} = o\left(\frac{1}{n^{a-k\beta}}\right)$$
   Or $a - k\beta = a - \frac{a-1}{2} = \dfrac{a+1}{2} > 1$ car $a > 1$; par suite, d'après le critère de Riemann, $\dfrac{1}{n^{a-k\beta}}$ est le terme général d'une série convergente et donc $\dfrac{\ln(n)^k}{n^a}$ l'est aussi par comparaison. Ainsi, $\sum f_n^{(k)}$ converge normalement sur $[a,+\infty[$

   Il en résulte que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\sum f_n^{(k)}$ converge uniformément sur $[a,+\infty$ pour tout $a > 1$ et donc sur tout segment de $]1,+\infty[$.
   Il en résulte que, par le théorème d'interversion dérivation/somme, ζ est de classe C^∞ sur $]1,+\infty[$, et on a, pour tout $k \in \mathbb{N}$ et tout $x \in]1,+\infty[$:
   $$\zeta^{(k)}(x) = \left(\sum_{n=1}^{+\infty} f_n\right)^{(k)}(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n^{(k)}(x) = (-1)^k \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln(n)^k}{n^x}.$$

Partie C

Approximation uniforme

Dans cette partie, les fonctions considérées sont définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ d'intérieur non vide et sont à valeurs dans un espace vectoriel F sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ de dimension finie. De plus, a, b désignent deux réels de I tels que $a < b$.

1. Définitions

Définition 8. *Subdivision d'un segment*

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\sigma = (a_i)_{i \in [\![0,n]\!]}$ une famille finie à valeurs dans $[a, b]$. On dit que σ est une **subdivision du segment** $[a, b]$ si

$$a = a_0 < a_1 < \ldots < a_{n-1} < a_n = b.$$

Définition 9. *Fonctions en escalier*

Soit $\varphi : [a, b] \to \mathbb{F}$. On dit que φ est une **fonction en escalier sur** $[a, b]$ s'il existe une subdivision $\sigma = (a_0, \ldots, a_n)$ de $[a, b]$ telle que pour tout $i \in [\![0, n-1]\!]$, $\varphi_{|]a_i, a_{i+1}[}$ est constante.

On note $\mathrm{Esc}([a, b], F)$ l'ensemble des fonctions en escalier sur $[a, b]$.

Définition 10. *Fonctions continues par morceaux*

Soit $f : I \to F$. On dit que f est **continue par morceaux sur le segment** $[a, b]$ s'il existe une subdivision $\sigma = (a_0, \ldots, a_n)$ de $[a, b]$ telle que pour tout $i \in [\![0, n-1]\!]$, $f_{|]a_i, a_{i+1}[}$ est continue et prolongeable par continuité sur $[a_i, a_{i+1}]$.

On dit que f est **continue par morceaux sur l'intervalle** I si f est continue par morceaux sur tout segment de I.

On note $C_{\mathrm{pm}}(I, F)$ l'ensemble des fonctions continues par morceaux sur I.

Exercice 19.

1. Dessiner quelques graphes de fonctions en escalier et continues par morceaux sur un segment.
2. Montrer que $C_{\mathrm{pm}}(I, F)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}_b(I, F)$.

2. Approximation uniforme par des fonctions en escalier

Théorème 9.

Soit $f \in C_{pm}([a,b],F)$. Alors, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\varphi \in \mathrm{Esc}([a,b],F)$ telle que $\|f-\varphi\|_\infty \leq \varepsilon$.

Autrement dit, toute fonction continue par morceaux sur $[a,b]$ est limite uniforme d'une suite de fonctions en escalier sur $[a,b]$.
Autrement dit, l'ensemble $\mathrm{Esc}([a,b],F)$ est dense dans $(C_{pm}([a,b],F), \|\cdot\|_\infty)$.

Démonstration.

- On traite tout d'abord le cas f continue sur $[a,b]$. Alors, d'après le théorème de Heine, f est uniformément continue sur $[a,b]$.
Soit $\varepsilon > 0$. Alors il existe $\delta > 0$ tel que, pour tout $x, y \in [a,b]$ avec $|x-y| \leq \delta$, $\|f(x) - f(y)\|_F \leq \varepsilon$. On construit alors une subdivision de $[a,b]$ de la façon suivante :
— comme la suite $(\frac{b-a}{n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 0, il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\frac{b-a}{n} \leq \delta$.
— pour $i \in [\![0,n]\!]$, on pose $a_i = a + i\frac{b-a}{n}$.
Ainsi, $\sigma = (a_0, \dots, a_n)$ est une subdivision de $[a,b]$. On définit alors la fonction en escalier $\varphi : [a,b] \to F$, pour $x \in [a,b]$, par :
$$\varphi(x) = \begin{cases} f(a) & \text{si } x = a \\ f(a_{i+1}) & \text{si } a_i < x \leq a_{i+1}, i \in [\![0,n-1]\!]. \end{cases}$$
Pour $x \in [a,b]$, on a l'alternative :
— $x = a$. Alors $\|f(a) - \varphi(a)\|_F = 0 \leq \varepsilon$.
— il existe $i \in i \in [\![0,n-1]\!]$ tel que $x \in]a_i, a_{i+1}]$. Alors $|x - a_{i+1}| \leq \delta$, donc :
$$\|f(x) - \varphi(x)\|_F = \|f(x) - f(a_i)\|_F \leq \varepsilon.$$
Dans tous les cas, $\|f(x) - \varphi(x)\|_F \leq \varepsilon$. Par suite, $\|f - \varphi\|_\infty \leq \varepsilon$.
- Traitons maintenant le cas général $f \in C_{pm}([a,b],F)$. On considère une subdivision $\sigma = (a_0, \dots, a_n)$ adaptée à f et on note, pour tout $i \in [\![0,n-1]\!]$, f_i le prolongement par continuité de $f_{|]a_i,a_{i+1}[}$ sur $[a_i, a_{i+1}]$.
Soit $\varepsilon > 0$. Comme pour chaque $i \in [\![0,n-1]\!]$, f_i est continue sur $[a_i, a_{i+1}]$, en appliquant le point précédent à f_i, on construit $\varphi_i \in \mathrm{Esc}([a,b],F)$ telle que $\|f_i - \varphi_i\|_\infty \leq \varepsilon$.
On définit alors la fonction en escalier $\varphi : [a,b] \to F$, pour $x \in [a,b]$, par :
$$\varphi(x) = \begin{cases} f(a_i) & \text{si } x = a_i, \ i \in [\![0,n]\!] \\ \varphi_i(x) & \text{si } a_i < x < a_{i+1}, \ i \in [\![0,n-1]\!]. \end{cases}$$
Pour $x \in [a,b]$, on a l'alternative :
— il existe $i \in i \in [\![0,n]\!]$ tel que $x = a_i$. Alors $\|f(a_i) - \varphi(a_i)\|_F = 0 \leq \varepsilon$.
— il existe $i \in i \in [\![0,n-1]\!]$ tel que $x \in]a_i, a_{i+1}[$. Alors, on a :
$$\|f(x) - \varphi(x)\|_F = \|f_i(x) - \varphi_i(x)\|_F \leq \|f_i - \varphi_i\|_\infty \leq \varepsilon.$$
Dans tous les cas, $\|f(x) - \varphi(x)\|_F \leq \varepsilon$. Par suite, $\|f - \varphi\|_\infty \leq \varepsilon$.
Pour démontrer ce point, on pouvait également remarquer que tout fonction continue par morceaux sur $[a,b]$ est la somme d'une fonction continue et d'une fonction en escalier. On conclut alors en approximant, grâce au premier point, cette fonction continue par une fonction en escalier.

□

Exercice 20.

Montrer que toute fonction continue sur le segment $[a, b]$ est limite uniforme d'une suite de fonctions affines par morceaux.

Exercice 21. *Cas particulier du Lemme intégrale de Riemann-Lebesgue*

Soit $f \in \mathbb{C}_{pm}([a, b], \mathbb{C})$. Montrer que $\int_a^b f(t)e^{int}dt \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

3. Approximation uniforme par des fonctions polynomiales

Notation 3. *Fonctions polynomiales*

On note $\mathcal{P}([a, b], \mathbb{K})$ l'ensemble des fonctions polynomiales de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{K}$ restreintes au segment $[a, b]$ i.e. si $p \in \mathcal{P}([a, b], \mathbb{K})$, il existe $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que, pour tout $x \in [a, b]$, $p(x) = P(x)$.

Théorème 10. *Théorème de Weierstrass*

Soit $f \in C([a, b], \mathbb{K})$. Alors, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $p \in \mathcal{P}([a, b], \mathbb{K})$ telle que $\|f - \varphi\|_\infty \leq \varepsilon$.
Autrement dit, toute fonction continue sur $[a, b]$ est limite uniforme d'une suite de fonctions polynomiales.
Autrement dit, l'ensemble $\mathcal{P}([a, b], \mathbb{K})$ est dense dans $(C([a, b], \mathbb{K}), \| \cdot \|_\infty)$.

Exercice 22.

Soit $f \in C([a, b], \mathbb{R})$. Montrer que si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\int_0^1 t^n f(t)dt = 0$, alors f est la fonction nulle sur $[a, b]$.