Chapitre VII

Séries entières

Table des matières

Partie A : Définitions et généralités sur les séries entières **2**
1. Séries entières 2
2. Rayon de convergence 3
3. Calcul du rayon de convergence d'une série entière 6

Partie B : Propriétés des séries entières **10**
1. Opérations sur les séries entières 10
2. Régularité d'une série entière 12
3. Dérivée de la somme d'une série entière réelle 14
4. Primitive de la somme d'une série entière réelle 15

Partie C : Développements en série entière **16**
1. Développement en série entière d'une fonction d'une variable réelle 16
2. Développements en série entière usuels 18

Dans ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne le corps $\mathbb{R}$ ou le corps $\mathbb{C}$ et $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ désignent, sauf mention contraire, des suites à valeurs dans $\mathbb{K}$.

Partie A
Définitions et généralités sur les séries entières

1. Séries entières

Définition 1. *Série entière*

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans $\mathbb{K}$. On appelle **série entière** associée à la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, la série de fonction $\sum f_n$ où, pour $n \in \mathbb{N}$, la fonction $f_n : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ est définie par :

$$f_n : z \mapsto a_n z^n.$$

On notera (abusivement) $\sum a_n z^n$ la série entière associée à la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exemple 1.

On connaît déjà plusieurs séries entières :
— la série géométrique $\sum z^n$;
— la série de somme exponentielle $\sum \frac{z^n}{n!}$.

Exercice 1.

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes. Montrer que $\sum a_n z^{2n}$ est une série entière.

Correction.

Attention ! Il y a un piège ! $\sum a_n z^{2n}$ est bien une série entière : il s'agit de la série entière $\sum b_n z^n$ où, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{cases} b_n = a_{n/2} & \text{si } n \text{ est pair} \\ b_n = 0 & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

Définition 2. *Somme et domaine de convergence*

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière. On appelle **domaine de convergence** de la série entière $\sum a_n z^n$ l'ensemble

$$D = \{z \in \mathbb{C} \mid \sum a_n z^n \text{ converge }\}.$$

On appelle **somme de la série entière** $\sum a_n z^n$ la fonction somme $S : D \to \mathbb{C}$ de la série, i.e.

$$S : z \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n.$$

Remarque 1.

- Si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est à valeurs réelles, on peut également considérer le domaine réelle de convergence $D_\mathbb{R} = \{x \in \mathbb{R} \mid \sum a_n x^n \text{ converge } \}$ de la série entière et sa somme $S : D_\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ où $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.
- Le domaine de convergence d'une série entière $\sum a_n z^n$ est le plus grand ensemble sur lequel la série de fonctions $\sum a_n z^n$ converge simplement.

Question 1.

Que dire de la somme d'une série entière associée à une suite stationnaire en 0 ?

Réponse : Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite stationnaire en 0 ; on note $N = \min_{n\in\mathbb{N}}(a_n = 0)$ et $P = \sum_{n=0}^{N-1} a_n X^n \in \mathbb{C}[X]$. Alors la série $\sum a_n z^n$ converge pour tout $z \in \mathbb{C}$. En effet, la suite des sommes partielles est stationnaire en $\sum_{n=0}^{N-1} a_n z^n = P(z)$. De plus, pour la même raison, la somme S de la série entière est :

$$S : z \mapsto P(z).$$

On peut donc conclure que la somme d'une série entière associée à une suite stationnaire en 0 est une fonction polynomiale !

2. Rayon de convergence

a. Lemme d'Abel

Théorème 1. *Lemme d'Abel*

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans $\mathbb{K}$ et $z_0 \in \mathbb{C}^*$. Si la suite $(a_n z_0^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, alors, pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < |z_0|$, la série $\sum a_n z^n$ est absolument convergente.

Démonstration.

On suppose que suite $(a_n z_0^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée. Alors il existe $M > 0$ tel que $|a_n z_0^n| \leq M$.
Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < |z_0|$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$|a_n z^n| = |a_n z_0^n|.\left(\frac{z}{z_0}\right)^n \leq M\left(\frac{z}{z_0}\right)^n,$$

qui est le terme général d'une série géométrique de raison strictement inférieure à 1 car $|z| < |z_0|$. Par suite, $\sum |a_n z^n|$ est convergente. $\square$

b. Définition et propriétés du rayon de convergence

Lemme 1.

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans $\mathbb{K}$. L'ensemble $\{r \in \mathbb{R}_+ \mid (|a_n|r^n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est bornée}\}$ est un intervalle non vide de $\mathbb{R}$.

Démonstration.

On note $I = \{r \in \mathbb{R}_+ \mid (|a_n|r^n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est bornée}\}$. Alors I contient 0 car $(|a_n|0^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée. De plus, si $r \in I$, alors, pour tout $s \in [0, r]$, $s \in I$ car pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|a_n|s^n \leq |a_n|r^n$ donc $(|a_n|s^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.
Il en résulte que I est un intervalle de la forme $[0, a)$. $\square$

Ce lemme justifie la définition suivante :

Définition 3. *Rayon de convergence*

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière.

i) On appelle **rayon de convergence** et on note R la borne supérieure de l'intervalle $I = \{r \in \mathbb{R}_+ \mid (|a_n|r^n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est bornée}\}$ i.e.

$$R = \sup\{r \in \mathbb{R}_+ \mid (|a_n|r^n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est bornée}\}.$$

on convient que $R = +\infty$ si l'intervalle I n'est pas majoré.

ii) On appelle **disque ouvert de convergence** de la série entière $\sum a_n z^n$ l'ensemble $\mathbb{D}(0, R) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < R\}$.

iii) Si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est à valeurs dans $\mathbb{R}$, On appelle **intervalle ouvert de convergence** de la série entière $\sum a_n x^n$ l'intervalle $]-R, R[$.

Proposition 1.

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière, R son rayon de convergence et $z \in \mathbb{C}$.

— Si $|z| < R$, alors la série numérique $\sum a_n z^n$ converge absolument.

— Si $|z| > R$, alors la série numérique $\sum a_n z^n$ diverge grossièrement.

Démonstration.

— On suppose $|z| < R$. Comme $R = \sup\{r \in \mathbb{R}_+ \mid (|a_n|r^n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est bornée}\}$, alors il existe $r_0 \in \{r \in \mathbb{R}_+ \mid (|a_n|r^n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est bornée}\}$ tel que $|z| < r_0 < R$.
Par conséquent, la suite $(a_n r_0^n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant bornée, d'après le lemme d'Abel, la série $\sum a_n z^n$

est absolument convergente.

— On suppose $|z| > R$. Alors la suite $(a_n z^n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas bornée et donc ne converge pas vers 0. Ainsi, la série $\sum a_n z^n$ diverge grossièrement.

□

Remarque 2.

Si $|z| = R$, on ne peut, a priori, rien dire ! Il faut étudier la série dans ce cas.

Proposition 2.

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière, R son rayon de convergence et D son domaine de convergence. Alors on a :

$$\mathbb{D}(0,R) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < R\} \subset D \subset \overline{\mathbb{D}}(0,R) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq R\}.$$

Démonstration.

- Si $z \in \mathbb{D}(0,R)$ alors $|z| < R$. Par suite, d'après la proposition précédente, $\sum a_n z^n$ converge absolument et donc converge. D'où $z \in D$.
  Il en résulte que $\mathbb{D}(0,R) \subset D$.
- Si $z \notin \overline{\mathbb{D}}(0,R)$ alors $|z| > R$. Par suite, d'après la proposition précédente, $\sum a_n z^n$ diverge grossièrement. D'où $z \notin D$.
  Ainsi $\overline{D}(0,R)^c \subset D^c$ et donc $D \subset \overline{D}(0,R)$.

□

Exemple 2.

— Pour la série entière $\sum z^n$, le rayon de convergence est 1 et son domaine de convergence est $D = \mathbb{D}(0,1)$.

> On a
> $$\{r \in \mathbb{R}_+ \mid (r^n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est bornée}\} = [0,1].$$
> Donc le rayon de convergence R de $\sum z^n$ est :
> $$R = \sup[0,1] = 1.$$
> De plus, si $|z| = 1$, $|z^n| = |z|^n = 1 \underset{n\to+\infty}{\not\to} 0$, donc $\sum z^n$ diverge grossièrement.
>
> Il en résulte que $D = \mathbb{D}(0,1)$.

— Pour la série entière $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2} z^n$, le rayon de convergence est 1 et son domaine de convergence est $D = \overline{\mathbb{D}}(0,1)$.

On a

$$\{r \in \mathbb{R}_+ \mid (\frac{1}{n^2}r^n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est bornée}\} = [0,1].$$

Donc le rayon de convergence R de $\sum \frac{1}{n^2}z^n$ est :

$$R = \sup[0,1] = 1.$$

De plus, si $|z| = 1$, $|\frac{1}{n^2}z^n| = \frac{1}{n^2}$ donc, d'après le critère de Riemann, $\sum \frac{z^n}{n^2}$ converge absolument.
Il en résulte que $D = \overline{\mathbb{D}}(0,1)$.

Exercice 2.

Déterminer le rayon de convergence et le domaine de convergence des séries entières $\sum \frac{z^n}{n!}$ et $\sum n!z^n$.

3. Calcul du rayon de convergence d'une série entière

a. Caractérisation du rayon de convergence

Proposition 3.

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière et R son rayon de convergence. Alors on a les égalités suivantes :
- $R = \sup\{\,|z| \mid (a_n z^n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est bornée}\}$;
- $R = \sup\{\,|z| \mid (a_n z^n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge}\}$;
- $R = \sup\left\{\,|z| \mid \sum a_n z^n \text{ converge}\right\}$;
- $R = \sup\left\{\,|z| \mid \sum a_n z^n \text{ converge absolument}\right\}$.

Méthode : Minoration et majoration du rayon de convergence

Étant donné une série entière $\sum a_n z^n$ de rayon de convergence R et $z_0 \in \mathbb{C}$, on a :
- la minoration $R \geq |z_0|$, si on est dans l'un des cas suivants :
  - i) la suite $(a_n z_0^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée ;
  - ii) la suite $(a_n z_0^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge ;
  - iii) la série $\sum a_n z_0^n$ converge ;
  - iv) la série $\sum a_n z_0^n$ converge absolument ;
- la majoration $R \leq |z_0|$, si on est dans l'un des cas suivants :
  - i) la suite $(a_n z_0^n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas bornée ;

ii) la série $\sum a_n z_0^n$ diverge ;

iii) la série $\sum |a_n z_0^n|$ diverge.

Exercice 3.

1. Déterminer le rayon de convergence de $\sum nz^n$.
2. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^{2n}$ en fonction de celui de $\sum a_n z^n$.

b. Comparaison

Proposition 4. *Comparaison des rayons de convergence*

Soit $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ des séries entières et R_a, R_b leurs rayons de convergence respectifs. Alors si, à partir d'un certain rang $N \in \mathbb{N}$, on a, pour tout $n \geq N$:

i) $|a_n| \leq |b_n|$, alors $R_a \geq R_b$;

ii) $a_n = O(b_n)$, alors $R_a \geq R_b$;

iii) $a_n = o(b_n)$, alors $R_a \geq R_b$;

iv) $|a_n| \underset{n\to+\infty}{\sim} |b_n|$ alors $R_a = R_b$.

Exercice 4.

1. Déterminer les rayons de convergence de $\displaystyle\sum \frac{2^n(1+5^n n^2)}{10^n(n+\sqrt{3n+1})} z^n$ et de $\displaystyle\sum \frac{\sin(\frac{n}{3^n})}{n+1} z^n$.
2. Déterminer le rayon de convergence de $\sum_{n\geq 1} d(n) z^n$ où, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $d(n) = \#\{d \in [\![1, n]\!] \mid d|n\}$.

c. Utilisation de la règle de D'Alembert

Théorème 2. *Règle de D'Alembert pour les séries entières*

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R telle que, à partir d'un certain rang $N \in \mathbb{N}$, pour tout $n \geq N$, $a_n \neq 0$. S'il existe $\ell \in [0, +\infty[\cup \{+\infty\}$ tel que :

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell,$$

alors on a :

$$R = \frac{1}{\ell} = \begin{cases} +\infty & \text{si } \ell = 0; \\ \frac{1}{\ell} & \text{si } \ell \in]0, +\infty[; \\ 0 & \text{si } \ell = +\infty. \end{cases}$$

Démonstration.

Soit $z \in \mathbb{C}$. On applique le critère de D'Alembert à la série de terme général $u_n = |a_n z^n|$. Alors on a, pour tout $n \geq N$,

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \left|\frac{a_{n+1} z^{n+1}}{a_n z^n}\right| = \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| .|z|.$$

Par suite, si $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$ où :

— $\ell \in \mathbb{R}_+^*$, alors $\frac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell|z|$. Ainsi, d'après le critère de D'Alembert, si $|z| < \frac{1}{\ell}$, $\sum u_n$ converge et si $|z| > \frac{1}{\ell}$, $\sum u_n$ diverge. Par suite, $R = \frac{1}{\ell}$.

— $\ell = +\infty$, alors $\frac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$. Ainsi, d'après le critère de D'Alembert, pour tout $z \in \mathbb{C}^*$, $\sum u_n$ diverge donc $R = 0$.

— $\ell = 0$, alors $\frac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Ainsi, d'après le critère de D'Alembert, pour tout $z \in \mathbb{C}^*$, $\sum u_n$ converge. Par suite, $R = +\infty$.

$\square$

Remarque 3.

Attention le critère précédent n'est valable que si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est différente de 0 à partir d'un certain rang !

Ainsi, pour une série entière du type $\sum a_n z^{\varphi(n)}$ avec $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante, on appliquera directement la règle de D'Alembert sur la série (tout court) $\sum a_n z^{\varphi(n)}$ i.e. on étudie la limite de

$$\left|\frac{a_{n+1} z^{\varphi(n+1)}}{a_n z^{\varphi(n)}}\right| = \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| .|z^{\varphi(n+1)-\varphi(n)}|,$$

en fonction des valeurs de $z \in \mathbb{C}^*$ afin de majorer et minorer le rayon de convergence de la série entière.

Exercice 5.

1. Déterminer les rayons de convergence des séries entières

$$\sum_{n\geq 1} n^\alpha z^n \text{ où } \alpha \in \mathbb{R}; \quad \sum \frac{n^n}{n!} z^n; \quad \sum \binom{4n}{2n+1} z^n; \quad \sum_{n\geq n_0} \frac{P(n)}{Q(n)} z^n \text{ où } P, Q \in \mathbb{K}[X].$$

2. Déterminer les rayons de convergence des séries entières :

$$\sum n! z^{2n} \qquad \sum n! z^{n^2} \qquad \sum n^n z^{\binom{3n}{n}}.$$

Exercice 6. *Apparté : Transformée d'Abel*

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites à valeurs dans K. On considère les séries $\sum a_n b_n$ et $\sum a_n$. On note $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de ses sommes partielles de $\sum a_n b_n$ et $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ celle de $\sum a_n$.

1. Montrer que pour tout $N \in \mathbb{N}$,

$$S_N = A_N b_N - \sum_{n=0}^{N-1} A_n(b_{n+1} - b_n).$$

2. En déduire que si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée ; $b_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et $\sum(b_{n+1} - b_n)$ est absolument convergente, alors $\sum a_n b_n$ converge.

Exercice 7. *Étude d'une série entière sur la frontière du disque*

On considère la série entière $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{z^n}{n}$.

1. Montrer que son rayon de convergence est 1. Que dire de la convergence en $z = 1$?
2. Soit $z_0 \in \mathbb{U} \setminus \{1\}$. En utilisant la transformée d'Abel, montrer que $\sum_{n\geq 1} \dfrac{z_0^n}{n}$ converge.
3. En déduire le domaine de convergence de $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{z^n}{n}$.

Partie B

Propriétés des séries entières

1. Opérations sur les séries entières

a. Combinaisons linéaires

Proposition 5. *Produit par un scalaire*

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière et $\lambda \in \mathbb{C}^*$. Alors $\sum \lambda a_n z^n$ et $\sum a_n z^n$ ont le même rayon de convergence.

Démonstration.

Soit $z \in \mathbb{C}$. Comme $\lambda \neq 0$, la suite $(\lambda a_n z^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée si, et seulement si, $(a_n z^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.
Il en résulte que $\sum \lambda a_n z^n$ et $\sum a_n z^n$ ont même rayon de convergence. □

Proposition 6. *Somme*

Soit $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ des séries entières et R_a, R_b leurs rayons de convergence respectifs. Alors le rayon de convergence R de la série entière $\sum (a_n + b_n) z^n$ vérifie :

- si $R_a \neq R_b$, $R = \min(R_a, R_b)$
- si $R_a = R_b$, $R \geq R_a (= R_b)$.

Démonstration.

Soit $z \in \mathbb{C}$. Si $(a_n z^n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n z^n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont des suites bornées, alors la suite $((a_n + b_n) z^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, donc $|z| \leq R$. Ceci étant vrai pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < \min(R_a, R_b)$, on obtient :

$$R \geq \min(R_a, R_b).$$

Supposons que $R_a \neq R_b$. Quitte à échanger R_a et R_b, on suppose que $R_a < R_b$.
Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $R_a < |z| < R_b$. Alors la suite $((a_n + b_n) z^n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas bornée car $(a_n z^n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas bornée et $(b_n z^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.

> *Remarque :* pour démontrer le fait précédent, on peut utiliser la contraposée de l'assertion : "si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont bornées, alors $(u_n + v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.

Ainsi, on a $|z| \geq R$. Ceci étant vrai pour tout $z \in \mathbb{C}$ avec $\mathbf{R_a} < |\mathbf{z}| < R_b$, on obtient $\min(R_a, R_b) = R_a \geq R$.

Il en résulte que, si $R_a \neq R_b$,
$$R = \min(R_a, R_b).$$
□

Proposition 7. *Somme d'une combinaison linéaire de séries entières*

Soit $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ des séries entières de rayon de convergence respectifs R_a, R_b et $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$. On pose $R = \min(R_a, R_b)$. Alors, pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < R$, on a :
$$\sum_{n=0}^{+\infty} (\lambda a_n + \mu b_n) z^n = \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n + \mu \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n.$$

Exercice 8.

Déterminer les rayons de convergence et la somme dans le disque ouvert de convergence des séries entières suivantes :
$$\sum \mathrm{ch}(n) z^n \qquad \sum \sin(n\theta) z^n \quad (\text{où } \theta \in \mathbb{R}).$$

b. Produits de Cauchy

On rappelle ici la notion de produit de Cauchy dans le cas de séries entières :

Définition 4. *Produit de Cauchy de deux séries entières*

Soit $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ des séries entières. On appelle **produit de Cauchy** des séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$, la série entière $\sum c_n z^n$ où, pour $n \in \mathbb{N}$,
$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}.$$

Proposition 8. *Produit de Cauchy*

Soit $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ des séries entières et R_a, R_b leurs rayons de convergence respectifs. Alors le rayon de convergence R du produit de Cauchy $\sum c_n z^n$ des séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ vérifie $R \geq \min(R_a, R_b)$ et on a, pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < \min(R_a, R_b)$:
$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} \right) z^n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n \right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n \right).$$

Exercice 9.

Déterminer le rayon de convergence et la somme du produit de Cauchy de $\sum z^n$ et $1-z$. Qu'en conclure ?

2. Régularité d'une série entière

a. Convergence normale

Théorème 3.

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$. Alors :

— la série entière $\sum a_n z^n$ converge normalement sur tout compact de $\mathbb{D}(0,R)$ ($= \mathbb{C}$ si $R = +\infty$) ;

— si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est à valeurs réelles, la série entière $\sum a_n x^n$ converge normalement sur tout segment de $]-R,R[$ ($= \mathbb{R}$ si $R = +\infty$).

Démonstration.

— Soit $a > 0$ avec $a < R$. Montrons la série entière $\sum a_n z^n$ converge normalement $\overline{\mathbb{D}}(0,a)$. On note $f_n : z \mapsto a_n z^n$.

On a, pour $n \in \mathbb{N}$:

$$\|f_n\|_\infty = \sup_{z\in\overline{\mathbb{D}}(0,a)} (|a_n||z|^n) \leq |a_n|a^n.$$

Or $R = \sup\{r \in \mathbb{R}_+ \mid \sum |a_n|r^n \text{ converge}\}$, donc comme $a < R$, $|a_n|a^n$ est le terme général d'une série convergente.
Par suite, pour tout $0 < a < R$, la série entière $\sum a_n z^n$ converge normalement sur $\overline{\mathbb{D}}(0,a)$.

Ainsi, comme tout compact de $\mathbb{D}(0,R)$ est inclus dans un disque $\overline{\mathbb{D}}(0,a)$ avec $a < R$, on a convergence normale de $\sum a_n z^n$ sur tout compact de $\mathbb{D}(0,R)$.

— Soit $a > 0$ avec $a < R$. Montrons la série entière $\sum a_n x^n$ converge normalement $[-a,a]$. On note $f_n : x \mapsto a_n x^n$.

On a, pour $n \in \mathbb{N}$:

$$\|f_n\|_\infty = \sup_{x\in[-a,a]} (|a_n||x|^n) \leq |a_n|a^n.$$

Or $R = \sup\{r \in \mathbb{R}_+ \mid \sum |a_n|r^n \text{ converge}\}$, donc comme $a < R$, $|a_n|a^n$ est le terme général d'une série convergente.
Par suite, pour tout $0 < a < R$, la série entière $\sum a_n x^n$ converge normalement sur $[-a,a]$.

Ainsi, comme tout segment de $]-R,R[$ est inclus dans un intervalle $[-a,a]$ avec $0 < a < R$, on a convergence normale de $\sum a_n x^n$ sur tout segment $[-R,R]$.

Remarque : on aurait bien-sur pu utiliser le point précédent pour démontrer le cas réel.

□

Remarque 4.

Sur le disque $\mathbb{D}(0,R)$, la convergence n'est pas normale en général : par exemple, les séries entières $\sum z^n$ ou $\sum_{n\geq 1} \dfrac{z^n}{n}$ ne convergent pas normalement sur $\mathbb{D}(0,1)$.

b. Continuité

Théorème 4.

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R>0$. Alors sa somme

$$S : z \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$$

est continue sur le disque ouvert de convergence $\mathbb{D}(0,R)$.

c. Série entière dérivée

Définition 5. *Série entière dérivée*

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière. On appelle **série entière dérivée** de $\sum a_n z^n$, la série entière

$$\sum (n+1)a_{n+1}z^n.$$

Proposition 9.

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière. Alors $\sum a_n z^n$ et sa série entière dérivée $\sum (n+1)a_{n+1}z^n$ ont même rayon de convergence.

Corollaire 1.

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière. Les séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum \frac{a_n}{n+1} z^{n+1}$ ont même rayon de convergence.

Corollaire 2.

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière et $k \in \mathbb{Z}$. Les séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum n^k z^n$ ont même rayon de convergence.

Exercice 10.

Montrer que pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, Les séries entières $\sum a_n z^n$ et la série entière $\sum n^\alpha z^n$ ont même rayon de convergence.

3. Dérivée de la somme d'une série entière réelle

Théorème 5. *Dérivation d'une série entière réelle*

Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de la variable réelle de rayon de convergence $R > 0$. Alors sa somme f est de classe C^1 sur $]-R, R[$ et on a, pour tout $x \in]-R, R[$:

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}.$$

Démonstration.

D'après la proposition 9, $\sum_{n\geq 1} n a_n x^{n-1} = \sum (n+1) a_{n+1} x^n$ a pour rayon de convergence R. Par suite, les séries entières $\sum a_n x^n$ et $\sum_{n\geq 1} n a_n x^{n-1}$ convergent normalement sur tout segment de $]-R, R[$. On peut alors vérifier les hypothèses du théorème d'interversion dérivation/somme :

- pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n : x \mapsto a_n x^n$ est une fonction polynomiale et donc est de classe C^1 sur $]-R, R[$ et on a, pour tout $x \in]-R, R[$:

$$f_n'(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 0 \\ n a_n x^{n-1} & \text{si } n \geq 1 \end{cases}$$

- $\sum f_n$ converge simplement sur $]-R, R[$ car $\sum f_n$ converge normalement sur tout segment de $]-R, R[$.
- $\sum f_n'$ converge uniformément sur tout segment de $]-R, R[$ car $\sum f_n' = \sum_{n\geq 1} n a_n x^{n-1}$ converge normalement sur tout segment de $]-R, R[$.

Ainsi, d'après le théorème d'interversion dérivation/somme, $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est de classe C^1 sur $]-R, R[$ et, pour tout $x \in]-R, R[$:

$$f'(x) = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n \right)'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}.$$

□

On obtient alors, par récurrence :

Corollaire 3.

Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de la variable réelle de rayon de convergence $R > 0$. Alors sa somme f est de classe C^∞ sur $]-R, R[$ et on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$$

4. Primitive de la somme d'une série entière réelle

Théorème 6. *Primitive d'une série entière réelle*

Soit $\sum a_n x^n$ une série entière de la variable réelle de rayon de convergence $R > 0$, F une primitive sur $]-R, R[$ de sa somme f. Alors, pour tout $t \in]-R, R[$, on a :

$$F(x) = F(0) + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \frac{x^{n+1}}{n+1}.$$

Exemple 3.

On a, pour tout $x \in]-1, 1[$,

$$\ln(1-x) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}.$$

> En effet, $\ln(1-x) = -\int_0^x \frac{dt}{1-t}$, d'où
>
> $$\ln(1-x) = -\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}.$$

Exercice 11.

Déterminer une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que, pour tout $x \in]-1, 1[$,

$$\arctan(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n.$$

Partie C

Développements en série entière

Dans cette partie, U désigne un voisinage de 0 dans $\mathbb{R}$.

1. Développement en série entière d'une fonction d'une variable réelle

a. Définition et premier exemple

Définition 6. *Fonction développable en série entière*

Soit $r > 0$ et $f :]-r, r[\to \mathbb{C}$. On dit que f est **développable en série entière sur** $]-r, r[$ s'il existe une série entière $\sum a_n x^n$ telle que, pour tout $x \in]-r, r[$:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$$

Soit $f : U \to \mathbb{C}$. On dit que f est **développable en série entière** s'il existe $r > 0$ tel que f est développable en série entière sur $]-r, r[$.

Remarque 5.

Attention, le développement en série entière d'une fonction n'est pas, en général, valable sur tout l'ensemble de définition de la fonction !

Exemple 4.

Les fonctions suivantes sont développables en série entière :

— $x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$

— $x \mapsto \ln(1-x)$

— On a pour tout $x \in]-1, 1[$,

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$$

donc $x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$ est développable en série entière sur $]-1, 1[$.

— On remarque tout d'abord, que pour tout $x \in]-1, +\infty[$,

$$\ln(1-x) = -\frac{1}{1-x}.$$

Considérons alors la série entière $\sum x^n$ de rayon de convergence égal à 1 et notons f sa somme.

Alors f admet une primitive sur $]-1,1[$. On considère la primitive F de f qui s'annule en 0. Par le théorème d'interversion intégrale/somme, on a, pour tout $x \in]-1,1[$:

$$F(x) = \int_0^x f(t)dt = \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{+\infty} t^n\right) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\int_0^x t^n dt\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}.$$

Or, pour $t \in]-1,1[$, $f(t) = \dfrac{1}{1-t}$, donc pour $x \in]-1,1[$

$$\ln(1-x) = -\int_0^x \frac{1}{1-t}dt = -F(x) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}.$$

Par suite, $x \mapsto \ln(1-x)$ est développable en série entière sur $]-1,1[$.

Exercice 12.

Montrer que $\dfrac{1}{(1-x)^2}$ est développable en série entière sur $]-1,1[$.

Proposition 10. *Unicité du développement en série entière*

Soit $\sum a_n x^n$ et $\sum b_n x^n$ des séries entière de la variable réelle. S'il existe $r > 0$ tel que pour tout $x \in]-r,r[$:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n,$$

alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = b_n$.

b. Séries de Taylor

Définition 7. *Série de Taylor*

Soit $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction C^∞. On appelle **série de Taylor** (ou plus précisément, série de Taylor-MacLaurin) de f, la série entière :

$$\sum \frac{f_n^{(n)}(0)}{n!} x^n.$$

Théorème 7.

Soit $r > 0$ et $f :]-r,r[\to \mathbb{C}$. Si f est développable en série entière, alors f est C^∞ sur $]-r,r[$

et f coïncide avec sa série de Taylor-MacLaurin sur $]-r,r[$ i.e., pour tout $x\in]-r,r[$:

$$f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{f_n^{(n)}(0)}{n!}x^n.$$

Remarque 6.

Attention ! La réciproque du théorème précédent est fausse ! Par exemple, la fonction $f : x\mapsto e^{-\frac{1}{x^2}}$ (prolongée par continuité en 0 par $f(0)=0$) est C^∞ sur $\mathbb{R}$ mais n'est pas égale à sa série de Taylor-MacLaurin au voisinage de 0.

2. Développements en série entière usuels

a. L'exponentielle, les fonctions trigonométriques et hyperboliques

Définition 8. *Exponentielle complexe*

Pour $z\in\mathbb{C}$, on pose :

$$\exp(z)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^n}{n!}$$

Théorème 8.

La fonction $x\mapsto e^x$ est développable en série entière sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x\in\mathbb{R}$, $e^x=\exp(x)$.

Exercice 13.

1. Montrer que pour tout $z\in\mathbb{C}$,

$$\exp(z+z')=\exp(z)\exp(z').$$

2. En déduire que :
   a) $\exp(z)\neq 0$
   b) $\exp(-z)=\dfrac{1}{\exp(z)}$;
   c) $\overline{\exp(z)}=\exp(\overline{z})$;
   d) $|\exp(z)|=e^{\mathrm{Re}(z)}$;
   e) $|\exp(z)|=1 \iff z\in i\mathbb{R}$.

Définition 9. *Les fonctions cosinus et sinus*

On définit les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ notées cos et sin, pour $x \in \mathbb{R}$, par :

$$\cos(x) = \mathrm{Re}(\exp(ix)) \qquad \text{et} \qquad \sin(x) = \mathrm{Im}(\exp(ix)).$$

Exercice 14.

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :
$$\cos(x) = \frac{\exp(ix) + \exp(-ix)}{2}, \quad \sin(x) = \frac{\exp(ix) - \exp(-ix)}{2i} \quad \text{et} \quad \cos^2(x) + \sin^2(x) = 1.$$
2. Montrer que pour $z = x + iy \in \mathbb{C}$, $\exp(z) = e^x\left(\cos(y) + i\sin(y)\right)$.

À toujours savoir retrouver ! Les développements en série entières sur $\mathbb{R}$ des fonctions trigonométriques et hyperboliques :

$$\cos(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} \qquad \sin(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\mathrm{ch}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} \qquad \mathrm{sh}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Correction.

Montrons que sin est développable en série entière sur $\mathbb{R}$ et déterminons ce développement.
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :
$$\sin(x) = \frac{\exp(ix) - \exp(-ix)}{2i}.$$
Or, les fonctions $x \mapsto e^{\pm ix}$ sont développables en série entière sur $\mathbb{R}$, et on a, pour tout $x \in \mathbb{R}$:
$$e^{\pm ix} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\pm ix)^n}{n!}$$
La série entière $\sum a_n x^n$ avec $a_n = \dfrac{(ix)^n - (-ix)^n}{n!}$ est de rayon de convergence égal à $+\infty$ car il s'agit de la somme des séries entières $\sum \frac{(ix)^n}{n!}$ et $\sum -\frac{(-ix)^n}{n!}$ qui ont un rayon de convergence égal à $+\infty$. Et de plus, on a, pour tout $x \in \mathbb{R}$:
$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(ix)^n}{n!} + \sum_{n=0}^{+\infty} -\frac{(-ix)^n}{n!} = \exp(ix) - \exp(-ix) = 2i\sin(x).$$
Ainsi, sin est développable en série entière sur $\mathbb{R}$ et on a, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
2i\sin(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(ix)^n - (-ix)^n}{n!} \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} i^n(1-(-1)^n)\frac{x^n}{n!} \\
&= \sum_{n \text{ impair}} 2i^n \frac{x^n}{n!} \\
&= \sum k = 0^{+\infty} 2 \underbrace{i^{2k+1}}_{=i((i)^2)^k = i(-1)^k} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} 2i(-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!},
\end{aligned}$$

d'où

$$\sin(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}.$$

b. Les fonctions $x \mapsto (1+x)^\alpha$

Théorème 9.

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Alors la fonction $x \mapsto (1+x)^\alpha$ est développable en série entière sur $]-1,1[$ et on a, pour tout $x \in]-1,1[$:

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)}{n!} x^n.$$

À toujours savoir retrouver ! Les développements en série entières sur $]-1,1[$ de :

$$\frac{1}{(1-x)^k} = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{n+k}{k} x^n \qquad \ln(1+x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n}$$

$$\arctan(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} \qquad \arcsin(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$