Chapitre VIII

Espaces préhilbertiens réels et endomorphismes des espaces euclidiens

Table des matières

Dans ce chapitre, E désigne un espace vectoriel réel (pas forcément de dimension finie).

Partie A

Généralités

1. Rappels sur le produit scalaire

a. Produit scalaire

Définition 1. *Produit scalaire*

Une application $\varphi : E \times E \to \mathbb{R}$ est appelée **produit scalaire** sur E si φ est une forme bilinéaire symétrique définie positive de $E \times E$ dans $\mathbb{R}$.

Remarque 1.

Usuellement, on note un produit scalaire de deux vecteurs $(u|v)$, $\langle u|v \rangle$, $\langle u, v \rangle$ ou même $u \cdot v$. Dans la suite, on utilisera principalement la notation $(\cdot|\cdot)$.

Exercice 1.

Donner des exemples de produits scalaires sur les espaces : $\mathbb{R}^n$, $\ell^2(\mathbb{R})$, $C(I)$ où I est un intervalle fermé borné de $\mathbb{R}$ et $M_n(\mathbb{R})$.

Correction.

— pour $x = (x_1, ..., x_n)$ et $y = (y_1, ..., y_n)$ des vecteurs de $\mathbb{R}^n$, le produit scalaire canonique est donné par :

$$(x|y) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

— pour $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des vecteurs de $\ell^2(\mathbb{R})$, le produit scalaire canonique est donné par :

$$(u|v) = \sum_{i=0}^{\infty} u_i v_i$$

— pour f et g des vecteurs de $C(I)$, le produit scalaire canonique est donné par :

$$(f|g) = \int_I f(t)g(t)dt$$

— pour A et B des vecteurs de $M_n(\mathbb{R})$, le produit scalaire canonique est donné par :

$$(A|B) = \mathrm{Tr}({}^tAB) = \sum_{1\leq i,j\leq n} a_{i,j}b_{i,j}$$

Définition 2. *Espace préhilbertien*

Soit $(\cdot|\cdot)$ un produit scalaire sur E. Le couple $(E,(\cdot|\cdot))$, ou simplement E s'il n'y a pas d'ambiguïté, est appelé **espace préhilbertien**.
Si de plus E est de dimension finie, on dit que $(E,(\cdot|\cdot))$ est un **espace euclidien**.

b. Norme associée à un produit scalaire

Définition 3. *Norme associé au produit scalaire*

Soit E un espace préhilbertien réel. On note $\|\cdot\|$ et on appelle **norme associée au produit scalaire** $(\cdot|\cdot)$, l'application :

$$\|\cdot\| : \left| \begin{array}{ccc} E & \to & \mathbb{R}_+ \\ x & \mapsto & \|x\| = \sqrt{(x|x)}. \end{array} \right.$$

De plus, on note $d : E\times E \to \mathbb{R}_+$ et on appelle distance associée à $\|\cdot\|$, l'application définie, pour $x, y \in E$, par :

$$d(x,y) = \|x-y\|.$$

Théorème 1. *Inégalité de Cauchy-Schwarz*

Soit E un espace préhilbertien réel. On a l'inégalité suivante, pour tous $x, y \in E$:

$$|(x|y)| \leq \|x\|\|y\|$$

Et de plus, on a $|(x|y)| = \|x\|\|y\|$ si, et seulement si, x et y sont colinéaires.

Démonstration.

Soit $x, y \in E$ et $t \in \mathbb{R}$. On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie, pour $t \in \mathbb{R}$, par :

$$f(t) = \|tx+y\|^2 = (tx+y|tx+y).$$

Alors on a, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$f(t) = t^2(x|x) + 2(x|y) + (y|y) = t^2\|x\|^2 + 2(x|y) + \|y\|^2.$$

Pour $x \neq 0_E$, f est une fonction polynomiale de degré 2 et on a $f(t) \geq 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, donc son discriminant Δ est négatif i.e.

$$\Delta = 4(x|y)^2 - 4\|x\|^2\|y\|^2 \leq 0.$$

Par suite,
$$(x|y)^2 \leq (\|x\|\|y\|)^2$$
Et cette inégalité est trivialement vraie pour $x = 0_E$ - et c'est même une égalité dans ce cas. La fonction racine étant croissante sur $\mathbb{R}_+$, il en résulte que pour tous $x, y \in E$:
$$|(x|y)| \leq \|x\|\|y\|.$$

De plus, si $x \neq 0_E$ et y colinéaire à x, alors il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $y = \lambda x$ et
$$|(x|y)| = |\lambda|\|x\|^2 = \pm\|x\|.|\lambda|\|x\| = \|x\|\|y\|.$$
Réciproquement, pour $x \neq 0_E$, si l'égalité est vérifiée, alors $\Delta = 4(x|y)^2 - 4\|x\|^2\|y\|^2 = 0$ donc f possède une racine λ i.e.
$$(\lambda x + y|\lambda x + y) = f(\lambda) = 0.$$
Donc par définie positivité du produit scalaire, $\lambda x + y = 0_E$; d'où x et y sont colinéaires. $\square$

Proposition 1.

Soit E un espace préhilbertien réel. La norme $\|\cdot\|$ associée au produit scalaire est une norme sur E.

Démonstration.

- $\|\cdot\|$ est positive par positivité du produit scalaire).
- Soit $x \in E$. Si $\|x\| = 0$, alors $(x|x) = 0$ donc $x = 0_E$ car le produit scalaire est défini positif.
- Soit $x \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Par bilinéarité de $(\cdot|\cdot)$, on a :
$$\|\lambda x\|^2 = (\lambda x|\lambda x) = \lambda^2(x|x) = \lambda^2\|x\|^2,$$
d'où l'homogénéité.
- Soit $x, y \in E$. On a :
$$\|x + y\|^2 = (x + y|x + y) = \|x\|^2 + 2(x|y) + \|y\|^2,$$
donc, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz :
$$\|x + y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2.$$
d'où l'inégalité triangulaire.

$\square$

Exercice 2.

Soit $x, y \in E$. Démontrer les égalités suivantes :

1. $d(x,y) = \sqrt{\|x\|^2 + \|y\|^2 - 2(x|y)}$.
2. $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right)$ *(Identité du parallélogramme).*
3. $(x|y) = \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right)$ *(Identité de polarisation).*

2. Rappels et compléments sur l'orthogonalité

Définition 4. *Orthogonalité*

Soit E un espace préhilbertien réel.

— Soit $x, y \in E$. On dit que x et y sont **orthogonaux** et on note $x \perp y$ si $(x|y) = 0$.

— Soit $A \subset E$. On note $A^\perp$ et on appelle **orthogonal** de A, l'ensemble :

$$A^\perp = \{x \in E \mid \forall\, a \in A,\ (a|x) = 0\}.$$

— Soit F, G des sous-espaces vectoriels de E. On dit que F et G sont **orthogonaux** et on note $F \perp G$ si, pour tout $x \in F$ et tout $y \in G$, $(x|y) = 0$. Autrement dit si $F \subset G^\perp$ (ou de manière équivalente, $G \subset F^\perp$).

Exercice 3.

Soit E un espace préhilbertien réel et $A \subset E$.

— Montrer que $A^\perp$ est un sous-espace vectoriel de E de deux façons.

— Montrer que $A^\perp$ est un fermé de E pour la norme $\|\cdot\|$.

Correction.

1. Pour la première façon, il s'agit d'utiliser la définition de sous-espace vectoriel.
   Pour la deuxième, on remarque que $A^\perp = \bigcap_{a \in A} \operatorname{Ker}(\varphi_a)$ où, pour $a \in A$, $\varphi_a : x \mapsto (a|x)$, donc $A^\perp$ est un sous-espace vectoriel de E comme intersection de sous-espaces vectoriels de E.

2. On reprend l'égalité $A^\perp = \bigcap_{a \in A} \operatorname{Ker}(\varphi_a)$ et on remarque que :

   — pour $a \in A$ et $x \in X$, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

   $$|f_a(x)| = |(a|x)| \leq \|a\|\|x\|.$$

   Donc f_a est $\|a\|$-lipschitzienne et donc continue pour $\|\cdot\|$.

   — $\operatorname{Ker}(\varphi_a) = \varphi_a^{-1}(\{0\})$ donc $\operatorname{Ker}(\varphi_a)$ est un fermé pour $\|\cdot\|$ comme image réciproque d'un fermé par une application continue.

   Par suite, $A^\perp$ est fermé pour $\|\cdot\|$ comme intersection de fermé.

Exemple 1.

— Dans un espace préhilbertien réel E, on a : $E^{\perp} = \{0_E\}$ et $\{0_E\}^{\perp} = E$.
— Dans $\mathbb{R}^2$ muni de son produit scalaire canonique, $\{(1,-1)\}^{\perp} = \{(x,x) \mid x \in \mathbb{R}\}$.
— Dans $\mathbb{R}^3$ muni de son produit scalaire canonique,

$$\mathrm{Vect}((1,1,1),(1,2,3)) \perp \mathrm{Vect}(1,-2,1).$$

Définition 5. *Famille orthogonale/orthonormale*

Soit E un espace préhilbertien réel et $\mathcal{F} = (x_i)_{i\in I}$ une famille de vecteurs de E. On dit que $\mathcal{F}$ est :

— **orthogonale** si, pour tous $i, j \in I$ avec $i \neq j$,

$$(x_i|x_j) = 0.$$

— **orthonormale** si, pour tous $i, j \in I$,

$$(x_i|x_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 0 \text{ si } i \neq j \\ 1 \text{ si } i = j \end{cases}$$

On dit qu'une famille de E est une **base orthonormale** si c'est une base et une famille orthonormale.

Exercice 4.

Soit E un espace préhilbertien réel et $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer les proposition suivantes :

1. Toute famille orthogonale de vecteurs non nuls de E est libre.
2. On suppose que E admet une base orthonormale $\mathcal{B} = (e_i)_{i\in I}$. Montrer que pour tout $x \in E$,
$$x = \sum_{i\in I} (x|e_i)e_i \quad \text{(somme finie)}.$$
3. (Théorème de Pythagore) Soit $(x_1, ...x_n)$ une famille finie orthogonale de vecteurs de E. Alors
$$\left\| \sum_{i=1}^{n} x_i \right\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^2.$$

Proposition 2. *Orthonormalisation de Gram-Schmidt*

Soit E un espace préhilbertien réel et $(x_1, ..., x_n)$ une famille libre de E. Alors il existe une famille $(e_1, ..., e_n)$ orthonormale de E telle que, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$:

$$\mathrm{Vect}(e_1, ..., e_k) = \mathrm{Vect}(x_1, ..., x_k).$$

Plus précisément, on peut construire un telle famille $(e_1, ..., e_n)$ par le procédé de Gram-Schmidt :

pour $k = 1, ..., n$

$$e_k = \frac{\varepsilon_k}{\|\varepsilon_k\|} \text{ où } \varepsilon_k = x_k - \sum_{i=1}^{k-1} (x_k|e_i)e_i.$$

Démonstration.

On raisonne par récurrence finie sur $k \in [\![1, n]\!]$ pour montrer que $\mathrm{Vect}(e_1, ..., e_k) = \mathrm{Vect}(x_1, ..., x_k)$ où les e_i sont donnés par le procédé de Gram-Schmidt :

- *Initialisation.* Pour $k = 1$, la propriété est vraie car

$$e_1 = \frac{\varepsilon_1}{\|\varepsilon_1\|} = \frac{x_1}{\|x_1\|}.$$

- *Hérédité.* Soit $k \in [\![1, n-1]\!]$. On suppose la propriété vraie pour k. On a, par hypothèse de récurrence :

$$\varepsilon_{k+1} = x_{k+1} + \underbrace{\sum_{i=1}^{k} (x_{k+1}|e_i)e_i}_{\in \mathrm{Vect}(x_1,...,x_k)} \in \mathrm{Vect}(x_1, ..., x_{k+1}).$$

Par suite, $e_{k+1} = \dfrac{\varepsilon_{k+1}}{\|\varepsilon_{k+1}\|} \in \mathrm{Vect}(x_1, ..., x_{k+1})$. De plus, on a, pour $l \in [\![1, k]\!]$,

$$\begin{aligned}
(\varepsilon_{k+1}|\varepsilon_l) &= (x_{k+1} - \sum_{i=1}^{k} (x_{k+1}|e_i)e_i | x_l - \sum_{i=1}^{l-1} (x_l|e_i)e_i) \\
&= (x_{k+1}|x_l) - \sum_{i=1}^{k} (x_{k+1}|e_i)(x_l|e_i) - \sum_{i=1}^{l-1} (x_l|e_i)(x_{k+1}|e_i) + \sum_{i=1}^{l-1}\sum_{j=1}^{k} (x_l|e_i)(x_{k+1}|e_j)\underbrace{(e_i|e_j)}_{=0 \text{ si } j\neq i} \\
&= (x_{k+1}|x_l) - \sum_{i=1}^{k} (x_{k+1}|e_i)(x_l|e_i) - \sum_{i=1}^{l-1} (x_l|e_i)(x_{k+1}|e_i) + \sum_{i=1}^{l-1} (x_l|e_i)(x_{k+1}|e_i) \\
&= (x_{k+1}|x_l) - \sum_{i=1}^{k} (x_{k+1}|e_i)(x_l|e_i) - \sum_{i=1}^{l-1} (x_l|e_i)(x_{k+1}|e_i) + \sum_{i=1}^{l-1} (x_l|e_i)(x_{k+1}|e_i)
\end{aligned}$$

□

Corollaire 1.

Soit E un espace préhilbertien réel et F un sous-espace vectoriel de dimension finie. Alors F admet une base orthonormale.

Démonstration.

Comme F est de dimension finie (disons p), il existe une base $\mathcal{B} = (x_1, ..., x_p)$ de F. Alors on orthonormalise cette base grâce au procédé de Gram-Schmidt pour obtenir une base $\mathcal{B}'$ orthonormale de F. □

Exercice 5.

On munit $\mathbb{R}^3$ de son produit scalaire canonique. Déterminer, grâce au procédé de Gram-Schmidt, la base orthonormale de $\mathbb{R}^3$ obtenue à partir de la base formée des vecteurs

$$(1,1,1), \quad (1,2,3), \quad (1,-2,1).$$

Remarque 2.

Pour $A, B \subset E$ et F un sous-espace vectoriel de E, on a les propriétés suivantes :

- Si $A \subset B$ alors $B^\perp \subset A^\perp$,
- $A \subset (A^\perp)^\perp$.

Définition 6. *Somme directe orthogonale*

Soit E un espace préhilbertien réel et F, G des sous-espaces vectoriels de E. On dit que F et G sont en **somme directe orthogonale** si F et G sont en somme directe et $F \perp G$.

Dans ce cas, on note alors $F \overset{\perp}{\oplus} G$ la somme $F \oplus G$.

Proposition 3.

Soit E un espace préhilbertien réel et F un sous-espace vectoriel de E. Les sous-espaces vectoriels F et $F^\perp$ sont en somme directe orthogonale.

Démonstration.

Soit $x \in F \cap F^\perp$. Alors $(\underbrace{x}_{\in F} | \underbrace{x}_{\in F^\perp}) = 0$ donc par définie positivité de $(\cdot|\cdot)$, $x = 0_E$.
De plus, par définition, $F \perp F^\perp$.
Par suite, F et $F^\perp$ sont en somme directe orthogonal. $\square$

Définition 7. *Supplémentaire orthogonal*

Soit E un espace préhilbertien réel et F un sous-espace vectoriel de E. Si $F \overset{\perp}{\oplus} F^\perp = E$, on dit que $F^\perp$ est le supplémentaire orthogonal de E .

Proposition 4.

Soit E un espace préhilbertien réel et F, G des sous-espaces vectoriels de E.

- On suppose que F et G sont supplémentaires. Alors $F \perp G$ si, et seulement si, $G = F^\perp$.
- Si $E = F \overset{\perp}{\oplus} F^\perp$, alors $(F^\perp)^\perp = F$.

Démonstration.

- On suppose $F \perp G$. Alors $G \subset F^\perp$. Montrons l'inclusion réciproque.
  Soit $x \in F^\perp = E = F \oplus G$. Alors $x = \underbrace{x_F}_{\in F} + \underbrace{x_G}_{\in G}$ et on a :
  $$\begin{aligned}(x - x_G | x - x_G) &= (x - x_G | x_F) \\ &= \underbrace{(x|x_F)}_{=0} - \underbrace{(x|x_G)}_{=0} \\ &= 0.\end{aligned}$$
  Donc, par définie positivité de $(\cdot|\cdot)$, $x - x_G = 0_E$, d'où $x = x_G \in G$.
  Par suite, $G = F^\perp$.
  La réciproque est immédiate car $F^\perp \perp F$.
- On applique le point précédent à "F" $= F^\perp$ et "G" $= F$. Comme $F^\perp \perp F$, on obtient alors $F = (F^\perp)^\perp$.

□

Exemple 2.

On considère les espaces vectoriels suivants munis de leurs produits scalaires canoniques respectifs.
- Dans $\mathbb{R}^3$, on considère le plan $\mathcal{P}$ d'équation $\mathcal{P} : x+y = 0$. Alors la droite $\mathcal{P}^\perp = \mathrm{Vect}(1,1,0)$ est le supplémentaire orthogonal de $\mathcal{P}$.
- Dans $\ell^2(\mathbb{N})$, on considère le sous-espace vectoriel F des suites stationnaires en 0. Alors $F^\perp = \{0\}$ et donc F n'admet pas de supplémentaire orthogonal.

Proposition 5.

Soit E un espace préhilbertien réel et F un sous-espace vectoriel de E de dimension finie.

Alors $E = F \overset{\perp}{\oplus} F^\perp$ et $(F^\perp)^\perp = F$.

Démonstration.

D'après la proposition 3, F et $F^\perp$ sont en somme directe orthogonale. Montrons alors que $E = F + F^\perp$.
Soit $x \in E$. Le sous-espace vectoriel F de E est de dimension finie alors on peut considérer une base orthonormale $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_p)$ de F. On pose $x_F = \sum_{i=1}^p (x|e_i)e_i \in F$. Alors on a, pour tout $j \in [\![1, p]\!]$:
$$\begin{aligned}(x - x_F | e_j) &= (x|e_j) - (x_F|e_j) \\ &= (x|e_j) - \sum_{i=1}^p (x|e_i)(e_i|e_j) \\ &= (x|e_j) - (x|e_j) = 0.\end{aligned}$$
Par suite, $x - x_F$ est orthogonal avec chacun des éléments d'une base de F, donc $x - x_F \in F^\perp$.
Ainsi, $x = x_F + (x - x_F) \in F + F^\perp$.

Il en résulte que $E = F \overset{\perp}{\oplus} F^\perp$.

De plus, d'après ce qui précède, on a $E = \overset{\perp}{\oplus} F^\perp$ et on applique alors la proposition 4. □

Corollaire 2.

Soit E un espace **euclidien** et F un sous-espace vectoriel de E. Alors

$$\dim(F) + \dim(F^{\perp}) = \dim(E).$$

Démonstration.

Comme E est de dimension finie, alors F et $F^{\perp}$ sont de dimension finie et donc d'après la proposition précédente, on a $E = F \overset{\perp}{\oplus} F^{\perp}$, d'où le résultat. □

Théorème 2. *Théorème de représentation de Riesz*

Soit E un espace **euclidien** et φ une forme linéaire sur E. Alors il existe un unique vecteur $a \in E$ tel que, pour tout $x \in E$,

$$\varphi(x) = (a|x).$$

Démonstration.

On considère une base orthonormale $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_n)$ de E. Pour $a \in E$, on note φ_a la forme linéaire $\varphi_a : x \mapsto (a|x)$. Pour $a \in E$, on a $\varphi = \varphi_a$ si, et seulement si, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$,

$$\varphi(e_i) = \varphi_a(e_i) = (a|e_i).$$

Or, comme $a = \sum_{i=1}^{n} (a|e_i)e_i$, on a donc $\varphi = \varphi_a$ si, et seulement si, $a = \sum_{i=1}^{n} \varphi(e_i)e_i$. D'où le résultat. □

Exercice 6.

Soit φ une forme linéaire sur $M_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe une unique matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ telle que pour tout $M \in M_n(\mathbb{R})$,

$$\varphi(M) = \mathrm{Tr}(AM).$$

Démonstration.

On munit $M_n(\mathbb{R})$ du produit scalaire $(M|N) = \mathrm{Tr}({}^tMN)$. Comme φ est une forme linéaire, d'après le théorème de représentation de Riesz, il existe un unique $B \in M_n(\mathbb{R})$ tel que pour tout $M \in M_n(\mathbb{R})$, $\varphi(M) = (B|M) = \mathrm{Tr}({}^tBM)$. Ainsi, en posant $A = {}^tB$, on obtient :

$$f(M) = \mathrm{Tr}(AM),$$

et de plus, A est unique par unicité de B. □

Partie B

Projection orthogonale

Dans cette partie, E désigne un espace préhilbertien réel de produit scalaire noté $(\cdot|\cdot)$, de norme associée notée $\|\cdot\|$ et de distance associée notée d.

1. Projection orthogonale sur un sous-espace vectoriel de dimension finie

Définition 8. *Projection orthogonale*

Soit F un sous-espace vectoriel de dimension finie de E. On appelle **projection orthogonale** sur F et on note p_F, la projection sur F parallèlement à son supplémentaire orthogonal $F^{\perp}$. L'image $p_F(x)$ d'un vecteur $x \in E$ par la projection orthogonale sur F est appelée **projeté orthogonal** de x sur F.

Remarque 3.

Pour F un sous-espace vectoriel de E de dimension finie, on a $\mathrm{Im}(p_F) = F$ et $\mathrm{Ker}(p_F) = F^{\perp}$.

Proposition 6.

Soit F un sous-espace vectoriel de E de dimension finie p, $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_p)$ une base orthonormale de F et $x \in E$. Alors la projection orthogonale de x sur F vérifie :

$$p_F(x) = \sum_{i=1}^{p} (x|e_i)e_i.$$

Démonstration.

Comme dans la démonstration de 5, on décompose $x = y + z$ avec $y = \sum_{i=1}^{p}(x|e_i)e_i \in F$ et $z \in F^{\perp}$. Par suite,

$$p_F(x) = \underbrace{p_F(y)}_{=y} + \underbrace{p_F(z)}_{=0_E} = \sum_{i=1}^{p} (x|e_i)e_i.$$

$\square$

Remarque 4.

La famille orthonormale $(e_1, ..., e_n)$ obtenue à partir d'une famille $(x_1, ...x_n)$ libre de E grâce au procédé de Gram-Schmidt peut alors s'exprimer de la façon suivante : pour $k = 1, ..., n-1$, on

note
$$F_k = \mathrm{Vect}(x_1, ...x_k) \ \ (= \mathrm{Vect}(e_1, ...e_k))\,.$$
et on a :
$$e_{k+1} = \frac{1}{\|\varepsilon_{k+1}\|}\varepsilon_{k+1} \text{ où } \varepsilon_{k+1} = x_{k+1} - p_{F_k}(x_{k+1});$$
de plus,
$$\|\varepsilon_{k+1}\| = \sqrt{\|x_{k+1}\|^2 - \|p_{F_k}(x_{k+1})\|^2}.$$

Proposition 7.

Soit F un sous-espace vectoriel de dimension finie de E et $(x_1, ..., x_k)$ une famille génératrice de F. Pour $x, y \in E$, on a :
$$y = p_F(x) \ \Leftrightarrow \ \begin{cases} y \in F \\ (x - y|x_i) = 0 \ \forall i \in [\![1, k]\!]. \end{cases}$$

Exercice 7.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On munit $\mathbb{R}[X]$ du produit scalaire
$$(P|Q) = \int_0^1 P(t)Q(t)dt.$$
Déterminer la projection orthogonale de X^n sur $F = \mathbb{R}_1[X]$.

Correction.

On a $\deg(p_F(X^n)) = 1$ donc $p_F(X^n) = aX + b$. De plus, on a :
$$\begin{cases} (X^n - p_F(X^n)|1) = 0 \\ (X^n - p_F(X^n)|X) = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \dfrac{1}{n+1} = \dfrac{a+2b}{2} \\ \dfrac{1}{n+2} = \dfrac{2a+3b}{6} \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} a = \dfrac{6n}{(n+1)(n+2)} \\ b = \dfrac{2-2n}{(n+1)(n+2)} \end{cases}$$
d'où $p_F(X^n) = \frac{1}{(n+1)(n+2)}(6nX + 2 - 2n)$.

2. Distance à un sous-espace de dimension finie

On rappelle ici la définition de distance à une partie de E :

Définition 9. *Distance à une partie*

Soit $x \in E$ et $A \subset E$. On appelle **distance** de x à A et on note $d(x, A)$ la quantité
$$d(x, A) = \inf_{a \in A} d(x, a).$$

Proposition 8.

Soit F un sous-espace vectoriel de dimension finie de E et $x \in E$. Alors la distance $d(x, F)$ de x à F est atteinte en un unique point de F : le projeté orthogonale $p_F(x)$ de x sur F. Autrement dit :

— $d(x, F) = \|x - p_F(x)\|$ et ;

— pour tout $y \in F$, $d(x, F) = \|x - y\|$ implique $y = p_F(x)$.

Démonstration.

Soit $y \in F$. Alors on a $x - y = \underbrace{x - p_F(x)}_{\in F^\perp} + \underbrace{p_F(x) - y}_{\in F}$.

D'après le théorème de Pythagore, on a

$$\|x - y\|^2 = \|x - p_F(x)\|^2 + \|p_F(x) - y\|^2 \geq \|x - p_F(x)\|^2.$$

Ceci étant vrai pour tout $y \in F$, on a : $d(x, F) \geq \|x - p_F(x)\|$. Or, $p_F(x) \in F$ donc $d(x, F) \leq \|x - p_F(x)\|$. Il en résulte que $d(x, F) = \|x - p_F(x)\|$.

De plus, pour $y \in F$, si $d(x, F) = \|x - y\|$, alors, d'après le théorème de Pythagore,

$$\|y - p_F(x)\|^2 = \|x - y\|^2 - \|x - p_F(x)\|^2 = \|x - y\|^2 - d(x, F)^2 = 0.$$

$\square$

Exercice 8.

Déterminer la quantité $A = \inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \int_0^1 (t^2 - at - b)^2 dt$.

Correction.

On remarque, en considérant $\mathbb{R}[X]$ muni du produit scalaire $(P|Q) = \int_0^1 P(t)Q(t)dt$ et en notant $\mathbb{R}_1[X]$, que

$$A = \inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \int_0^1 (t^2 - at - b)^2 dt = d(X^2, F)^2 = d(X^2, p_F(X^2))^2$$

En reprenant le résultat de l'exercice 7, on obtient $p_F(X^2) = X - \frac{1}{6}$, d'où

$$A = \int_0^1 (t^2 - t + \frac{1}{6})^2 dt = \frac{1}{180}.$$

Corollaire 3.

Soit F un sous-espace de dimension finie p, $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_k)$ une base orthonormale de F et $x \in E$. Alors on a :

$$d(x, F)^2 = \|x\|^2 - \sum_{i=1}^{k} (e_i|x)^2.$$

Démonstration.

On a $p_F(x) = \sum_{i=1}^k (e_i|x)e_i$, et $x - p_F(x) \perp p_F(x)$, donc, d'après le théorème de Pythagore :

$$d(x,F)^2 = \|x - p_F(x)\|^2 = \|x\|^2 - \|p_F(x)\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{i=1}^{k}(e_i|x)^2.$$

$\square$

Théorème 3.

Soit $(e_1, ..., e_k)$ une famille orthonormale. Alors on a :

$$\sum_{i=1}^{k}(e_i|x)^2 \leq \|x\|^2.$$

Démonstration.

On applique le corollaire précédent à $F = \mathrm{Vect}(e_1, ..., e_k)$. Alors on a :

$$\|x\|^2 = d(x,F)^2 + \sum_{i=1}^{k}(e_i|x)^2 \geq \sum_{i=1}^{k}(e_i|x)^2.$$

$\square$

3. Suites totales

Définition 10. *Suite totale*

Soit $(e_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de vecteurs de E. On dit que $(e_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite totale de E si le sous-espace vectoriel engendré par $(e_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est dense dans E i.e.

$$E = \overline{\mathrm{Vect}(e_k)_{k\in\mathbb{N}}}.$$

Proposition 9.

Soit $(e_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite orthonormale et totale de E. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note p_n le projecteur orthogonal sur p_n sur $\mathrm{Vect}(e_0, ..., e_n)$. Alors, pour tout $x \in E$, la suite $(p_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers x i.e.

$$p_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} x.$$

Démonstration.

Soit $x \in E$ et $\varepsilon > 0$. Comme (e_k) est totale, alors il existe $y \in \mathrm{Vect}(e_k)_{k\in\mathbb{N}}$ tel que $\|x - y\| \leq \varepsilon$. Le vecteur y est donc une combinaison linéaire d'un nombre fini e_k. Notons N le plus grand indice tel que le coefficient de e_N dans la décomposition de y soit non nul. Alors pour tout $n \geq N$, $y \in F_n = \text{Vect}(e_0, ..., e_n)$. Par suite, on a, pour tout $n \geq N$:

$$\|x - p_n(x)\| = d(x, F_n) \leq \|x - y\| \leq \varepsilon.$$

Par suite $(p_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers x. □

Théorème 4. *Égalité de Parseval*

Soit $(e_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite orthonormale et totale de E. Alors, pour tout $x \in E$, on a :

$$\sum_{i=0}^{+\infty} (e_k|x)^2 = \|x\|^2.$$

Démonstration.

On reprend les notations de la proposition précédente. On a, d'après la proposition précédente et le théorème de Pythagore,

$$\|x\|^2 - \sum_{i=1}^{n} (e_k|x)^2 = \|x\|^2 - \|p_n(x)\|^2 = \|x - p_n(x)\|^2 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

□

Partie C
Endomorphismes d'un espace euclidien

Dans cette partie, n désigne un entier naturel et E désigne un espace **euclidien** de dimension n de produit scalaire noté $(\cdot|\cdot)$, de norme associée notée $\|\cdot\|$ et de distance associée notée d.
On rappelle que l'ensemble des matrices symétriques de taille $n \times n$ est noté $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

1. Endomorphismes symétriques

Définition 11. *Endomorphisme symétrique*

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On dit que u est **symétrique** si pour tous $x, y \in E$:

$$(x|u(y)) = (u(x)|y).$$

On note $\mathcal{S}(E)$ l'ensemble des endomorphismes symétriques de E.

Proposition 10.

L'ensemble $\mathcal{S}(E)$ des endomorphismes symétriques de E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$.

Démonstration.

L'endomorphisme nul vérifie pour tous $x, y \in E$:

$$(x|0(y)) = (x|0) = 0 = (0|y) = (0(x)|y).$$

donc $0 \in \mathcal{S}(E)$.
Soit $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ et $u, v \in \mathcal{S}(E)$. Pour tous $x, y \in E$, on a :

$$\begin{aligned}((\lambda u + \mu v)(x)|y) &= \lambda(u(x)|y) + (\mu v(x)|y) \\ &= \lambda(x|u(y)) + (\mu x|v(y)) \\ &(x|(\lambda u + \mu v)(y))\end{aligned}$$

D'où $\mathcal{S}(E)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$. □

Proposition 11.

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et $\mathcal{B}$ une base **orthonormale** de E. Alors u est symétrique si, et seulement si, la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ de u dans $\mathcal{B}$ est symétrique.

Démonstration.

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_n)$ une base orthonormale de E.

- $(\Rightarrow)$. On suppose u symétrique. Alors, pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, $u(e_j) = \sum_{i=1}^{n} (u(e_j)|e_i)$ donc :

$$M = (m_{i,j}) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}} = ((u(e_j)|e_i))_{1 \leq i,j \leq n}.$$

  Par suite, pour tous $i, j \in [\![1, n]\!]$,

$$m_{j,i} = ((u(e_i)|e_j)) = ((e_i|u(e_j))) = ((u(e_j)|e_i)) = m_{i,j}.$$

  Donc M est symétrique.

- $(\Leftarrow)$. On suppose que $M = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}$ est symétrique. Soit $x, y \in E$. On note $X = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x)$ et $Y = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(y)$ les colonnes de $M_{n,1}(\mathbb{R})$ représentant x et y respectivement dans $\mathcal{B}$. On a alors, la base $\mathcal{B}$ étant orthonormale :

$$(u(x)|y) = {}^t(MX)Y = {}^tX \underbrace{{}^tM}_{=M} Y = {}^tX(MY) = (x|u(y)).$$

  Donc u est symétrique.

$\square$

Remarque 5.

La proposition précédente fournit un isomorphisme entre $\mathcal{S}(E)$ et $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. On obtient alors que :

$$\dim(\mathcal{S}(E)) = \dim(\mathcal{S}_n(\mathbb{R})) = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Proposition 12.

Soit $u \in \mathcal{S}(E)$ et F est un sous-espace vectoriel de E. Si F est stable par u alors l'endomorphisme induit u_F de u sur F est symétrique i.e. $u_F \in \mathcal{S}(F)$.

Démonstration.

Soit $x, y \in F$. Alors on a

$$(x|u_F(y)) = (x|u(y)) = (u(x)|y) = (u_F(x)|y).$$

Donc u_F est symétrique. $\square$

Proposition 13.

Soit p un projecteur et $F = \mathrm{Im}(p)$. Alors p est la projection orthogonale sur F si, et seulement si, p est symétrique.

Démonstration.

- $(\Rightarrow)$. On suppose que p est la projection orthogonale sur F. On a $F^\perp = \mathrm{Ker}(p)$, donc pour tout $x, y \in E$, on a :

$$(p(x)|y) = (p(x)|\underbrace{y - p(y)}_{\in F^\perp} + \underbrace{p(y)}_{\in F}) = (p(x)|p(y))$$

  et par un calcul similaire,
$$(x|p(y)) = (p(x)|p(y))$$
  d'où $(p(x)|y) = (x|p(y))$. Ainsi, p est symétrique.
- $(\Leftarrow)$. On suppose p symétrique. Il suffit de montrer que $\mathrm{Im}(p) \perp \mathrm{Ker}(p)$. Soit $x \in \mathrm{Im}(p)$ et $y \in \mathrm{Ker}(p)$. Alors :
$$(x|y) = (p(x)|y) = (x|p(y)) = (x|0_E) = 0.$$
  Donc p est la projection orthogonale sur F.

□

Exercice 9.

Soit $s \in \mathcal{L}(E)$ une symétrie de E i.e. $s^2 = \mathrm{Id}_E$. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que $s \in \mathcal{S}(E)$.

Correction.

On pose $p = \frac{1}{2}(s + \mathrm{Id}_E)$. Alors p est un projecteur de E et on a :
$$s \in \mathcal{S}(E)$$
si, et seulement si,
$$p = \frac{1}{2}(s + \mathrm{Id}_E) \in \mathcal{S}(E) \text{ (car } \mathcal{S}(E) \text{ est un espace vectoriel et } \mathrm{Id}_E \in \mathcal{S}(E))$$
si, et seulement si,
$$p \text{ est un projecteur orthogonal}$$
si, et seulement si,
$$s = 2p - \mathrm{Id}_E \text{ est une symétrie orthogonale.}$$

Proposition 14.

Soit $u \in \mathcal{S}(E)$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Si $\lambda, \mu \in \mathrm{Sp}(u)$ et $\lambda \neq \mu$ alors
$$E_\lambda(u) \perp E_\lambda(u).$$

Démonstration.

On suppose $\lambda, \mu \in \mathrm{Sp}(u)$ et $\lambda \neq \mu$. Soit $x \in E_\lambda(u)$ et $y \in E_\mu(u)$. Alors on a :

$$\lambda(x|y) = (\lambda x|y) = (u(x)|y) = (x|u(y)) = (x|\mu y) = \mu(x|y),$$

et donc $(\lambda - \mu)(x|y) = 0$ d'où $(x|y) = 0$ car $\lambda - \mu \neq 0$. □

Remarque 6.

Compte tenu de la proposition précédente, on sait ainsi que les sous-espaces propres d'un endomorphisme symétrique sont en somme directe orthogonale.

2. Réduction des endomorphismes symétriques

Proposition 15.

Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Alors A admet au moins une valeur propre réelle et de plus, toutes ses valeurs propres de A sont réelles i.e. $\mathrm{Sp}(A) \subset \mathbb{R}$.

Démonstration.

On considère A comme une matrice à coefficients complexes. Alors A possède au moins une valeur propre $\lambda \in \mathbb{C}$. Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in M_{n,1}(\mathbb{C})$ un vecteur propre de A associé à λ. Alors on a, d'une part :

$$^tXA\overline{X} = {^tAX}\overline{X} = \lambda{^tX}\overline{X} = \lambda \sum_{i=1}^{n} |x_i|^2;$$

et d'autre part

$$^tXA\overline{X} = {^tX}\overline{AX} = {^tX}\overline{\lambda X} = \overline{\lambda}{^tX}\overline{X} = \overline{\lambda} \sum_{i=1}^{n} |x_i|^2;$$

Or, comme $X \neq \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, on a $\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 \neq 0$. Par suite, $\lambda = \overline{\lambda}$ d'où $\lambda \in \mathbb{R}$. □

Proposition 16.

Soit $u \in \mathcal{S}(E)$. Alors u possède au moins une valeur propre.

Démonstration.

Soit $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_n)$ une base orthonormale de E. Alors $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ est une matrice symétrique réelle. De plus, le polynôme caractéristique χ_u de u possède au moins une racine λ dans $\mathbb{C}$ et donc $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$. Ainsi, d'après la proposition précédente, $\lambda \in \mathbb{R}$. Donc λ est une valeur propre réelle de u. □

Proposition 17.

Soit $u \in \mathcal{S}(E)$ et F un sous-espace vectoriel de E. Si F est stable par u, alors $F^{\perp}$ est stable par u.

Démonstration.

On suppose que F est stable par u. Soit $y \in F^{\perp}$. On a, pour tout $x \in F$,

$$(x|u(y)) = (\underbrace{u(x)}_{\in F} | \underbrace{y}_{\in F^{\perp}}) = 0.$$

donc $u(y) \in F^{\perp}$. Il en résulte que $F^{\perp}$ est stable par u. □

Théorème 5. *Théorème spectral*

Soit $u \in \mathcal{S}(E)$. Alors u est diagonalisable et de plus :
- E est la somme directe orthogonale des sous-espaces propres de u ; ou de manière équivalente,
- E possède une base orthonormale de vecteurs propres.

Démonstration.

D'après le proposition 16, u possède au moins une valeur propre. Soit $\lambda_1, ..., \lambda_k \in \mathbb{R}$ la liste de toutes les valeurs propres deux à deux distinctes de u. On note F le sous-espace vectoriel de E :

$$F = E_{\lambda_1}(u) \overset{\perp}{\oplus} ... \overset{\perp}{\oplus} E_{\lambda_k}(u).$$

Alors F est stable par u donc $G = F^{\perp}$ l'est aussi.
Comme u est symétrique, l'endomorphisme u_G par u sur G l'est aussi. Supposons par l'absurde que $G \neq \{0_E\}$, u_G est symétrique donc il possède une valeur propre réelle λ et ainsi un vecteur propre $x \in G \setminus \{0_E\}$ associé à λ. Or tout vecteur propre appartient à F, donc $x \in F \cap G = F \cap F^{\perp} = \{0_E\}$. contradiction !
Par suite $F^{\perp} = \{0_E\}$ et donc

$$E = F \oplus F^{\perp} = F = E_{\lambda_1}(u) \overset{\perp}{\oplus} ... \overset{\perp}{\oplus} E_{\lambda_k}(u).$$

□

Remarque 7.

Si $u \in \mathcal{S}(E)$, on dit alors que u est **diagonalisable dans une base orthonormale**.

Corollaire 4.

Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Alors A est diagonalisable et de plus, il existe $P \in O_n(\mathbb{R})$ i.e. $P^{-1} = {}^tP$ et une matrice $D \in M_n(\mathbb{R})$ diagonale tel que

$${}^tPAP (= P^{-1}AP) = D.$$

Démonstration.

On munit $\mathbb{R}^n$ de son produit scalaire canonique, de sa base canonique $\mathcal{B}$ qui est orthonormale pour ce produit scalaire et on considère l'endomorphisme u de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associée à A. Alors $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ donc, comme $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{B}$ est orthonormale, $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Ainsi, d'après le théorème spectral, u est diagonalisable dans une base orthonormale $\mathcal{B}'$. Par suite, la matrice P formée des vecteurs de la base $\mathcal{B}'$ vérifie que $A = PDP^{-1}$ où D est une matrice diagonale et de plus, comme ses vecteurs colonnes forment une base orthonormale de $M_{n,1}(\mathbb{R})$ muni de son produit scalaire canonique, $P \in O_n(\mathbb{R})$. $\square$

Remarque 8.

Attention, ce dernier résultat est faux dans $\mathbb{C}$: une matrice symétrique complexe n'est pas forcément diagonalisable (cf. exercice suivant) .

Exercice 10.

1. Diagonaliser dans une base orthonormale la matrice suivante :

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

2. Que dire de la diagonalisabilité de la matrice symétrique complexe suivante :

$$\begin{pmatrix} i & 1 \\ 1 & -i \end{pmatrix}$$

Correction.

1. La matrice A est diagonalisable dans une base orthonormale de $M_{n,1}(\mathbb{R})$. De plus, on a $A = PD{}^tP$ où

$$D = \begin{pmatrix} -5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

2. On a $\begin{vmatrix} X-i & -1 \\ -1 & X+i \end{vmatrix} = X^2$. Par suite la matrice est nilpotente non nulle donc elle n'est pas diagonalisable.

Exercice 11. *Racine carrée d'une matrice symétrique de valeurs propres positives*

Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. On suppose que $\mathrm{Sp}(A) \subset \mathbb{R}_+$. Montrer qu'il existe $R \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ tel que $R^2 = A$.

Correction.

Comme $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, A est diagonalisable dans une base orthonormale. Ainsi, il existe $P \in O_n(\mathbb{R})$ et $D = \mathrm{diag}(\alpha_1, ..., \alpha_n)$ où, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $\alpha_i \in \mathrm{Sp}(A) \subset \mathbb{R}_+$.
On note $D' = \mathrm{diag}(\sqrt{\alpha_1}, ..., \sqrt{\alpha_n})$ et $R = PD'{}^tP$. Alors on a :

$$R^2 = PD'{}^tPPD'{}^tP = PD'^2{}^tP = PD{}^tP = A.$$

3. Isométries vectorielles

Définition 12. *Isométrie vectorielle*

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. On dit que u est une **isométrie vectorielle** (ou également un **automorphisme orthogonal**) si, pour tout $x \in E$,

$$\|u(x)\| = \|x\|.$$

On note $O(E)$ l'ensemble des isométries vectorielles de E.

Exercice 12.

Soit $u \in O(E)$. Quelles sont les seules valeurs propres possibles pour u ?

Démonstration.

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Si $\lambda \in \mathrm{Sp}(u)$, alors, pour tout vecteur propre unitaire x associé à λ, on a :

$$1 = \|x\| = \|u(x)\| = \|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|.$$

D'où $\lambda = \pm 1$. $\square$

Proposition 18.

Soit $u \in O(E)$. Alors u est un isomorphisme et pour tous $x, y \in E$, on a :

$$(u(x)|u(y)) = (x|y).$$

Démonstration.

— Soit $x \in \mathrm{Ker}(u)$. Comme $u \in O(E)$, on a $\|x\| = \|u(x)\| = \|0_E\| = 0$. Par suite, $x = 0_E$, d'où $\mathrm{Ker}(u) = \{0_E\}$. Ainsi u est injectif et donc bijectif car E est de dimension finie.

— Soit $x, y \in E$. On a :

$$(u(x)|u(y)) = \frac{1}{2}\left(\|u(x)\|^2 + \|u(y)\|^2 - \|u(x-y)\|^2\right) = \frac{1}{2}\left(\|x\|^2 + \|y\|^2 - \|x-y\|^2\right) = (x|y).$$

□

Exercice 13.

1. Montrer que $O(E)$ est un sous-groupe de $\mathcal{GL}(E)$ muni de la composition.
2. $O(E)$ est-il un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$?

Correction.

1. L'identité Id_E (qui est l'élément neutre de la composition) vérifie, pour tout $x \in E$, $\|\mathrm{Id}_E(x)\| = \|x\|$, donc $\mathrm{Id}_E \in O(E)$.
   Pour tous $u, v \in O(E)$, on a, pour tout $x \in E$,
   $$\|u \circ v^{-1}(x)\| = \|v^{-1}(x)\| = \|v \circ v^{-1}(x)\| = \|x\|.$$
   D'où $u \circ v^{-1} \in O(E)$.
   Par suite, $O(E)$ est un sous-groupe de $\mathcal{GL}(E)$.
2. L'endomorphisme nul n'appartient clairement pas à $O(E)$! Ce n'est donc pas un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$!

Proposition 19.

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et $\mathcal{B}$ une base **orthonormale** de E. Alors $u \in O(E)$ si, et seulement si, l'image de la base $\mathcal{B}$ par u est une base orthonormale de E.

Démonstration.

On considère une base orthonormale $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_n)$ de E.

- $(\Rightarrow)$. On suppose $u \in O(E)$. Comme u est un isomorphisme, $(u(e_1), ..., u(e_n))$ est une base de E. De plus, pour tous $i, j \in [\![1, n]\!]$, on a :
  $$(u(e_i)|u(e_j)) = (e_i|e_j) = \delta_{ij}.$$
  Donc $(u(e_1), ..., u(e_n))$ est une base orthonormale.
- $(\Leftarrow)$. On suppose que $\mathcal{B}' = (u(e_1), ..., u(e_n))$ est une base orthonormale. Soit $x \in E$. On a :
  $$u(x) = u(\sum_{i=1}^{n}(x|e_i)e_i) = \sum_{i=1}^{n}(x|e_i)u(e_i),$$

Par suite, comme $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sont des bases orthonormales, d'après le théorème de Pythagore :

$$\|u(x)\|^2 = \sum_{i=1}^{n} (x|e_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} (x|e_i)^2 = \|x\|^2.$$

Il en résulte que $u \in O(E)$.

□

Corollaire 5.

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, $\mathcal{B}$ une base **orthonormale** de E et $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$. Alors $u \in O(E)$ si, et seulement si, $A \in O_n(\mathbb{R})$.

Démonstration.

Cela découle du fait que $A \in O_n(\mathbb{R})$ si, et seulement si, les vecteurs colonnes de A forment une base orthonormale de $M_{n,1}(\mathbb{R})$ muni du produit scalaire $(X|Y) = {}^tXY$. □

Remarque 9.

On a alors un isomorphisme de groupes entre $O(E)$ et $O_n(\mathbb{R})$.

4. Réduction des isométries vectorielles

a. Cas général

Proposition 20.

Soit $u \in O(E)$ et F un sous-espace vectoriel de E. Si F est stable par u alors l'endomorphisme u_F induit par u sur F est une isométrie vectorielle de F i.e. $u_F \in O(F)$.

Démonstration.

Pour tout $x \in F$, on a :

$$\|u_F(x)\| = \|u(x)\| = \|x\|.$$

Donc $u_F \in O(F)$.

□

Proposition 21.

Soit $u \in O(E)$ et F un sous-espace vectoriel de E. Si F est stable par u, alors $F^\perp$ est stable par u.

Démonstration.

Soit $y \in F^\perp$. Comme $u_F \in O(F)$, u_F est une bijection, pour tout $x \in F$, il existe $x' \in F$ tel que $x = u_F(x') = u(x')$ et donc on a :

$$(u(y)|x) = (u(y)|u(x')) = (\underbrace{y}_{\in F^\perp} | \underbrace{x'}_{\in F}) = 0.$$

Ainsi, $u(y) \in F^\perp$ donc $F^\perp$ est stable par u. □

Lemme 1.

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Alors E possède un sous-espace vectoriel stable par u de dimension 1 ou 2 i.e. une droite ou un plan.

Démonstration.

Le polynôme minimal π_u de u est un polynôme de degré supérieur ou égal à 1 et comme $\pi_u \in \mathbb{R}[X]$ alors π_u se décompose en produit $P_1 ... P_k$ de facteurs irréductibles de degré 1 ou 2. De plus, comme π_u est annulateur, on a : $\pi_u(u) = P_1(u) \circ ... \circ P_k(u) = 0$, donc il existe $i \in [\![1, k]\!]$ tel que $P_i(u)$ n'est pas injectif. Alors, pour $x \in \mathrm{Ker}(P_i(u))$, $F = \mathrm{Vect}(x, u(x))$ est stable par u. En effet, comme $P_i(u)(x) = 0$ et $\deg(P_i) = 1$ ou 2, $u^2(x)$ peut s'écrire comme combinaison linéaire de $u(x)$ et de x.
Il en résulte que F est une droite ou un plan stable par u. □

Théorème 6.

Soit $u \in O(E)$. Alors il existe une base orthonormale $\mathcal{B}$ de E dans laquelle la matrice de u est diagonale par blocs où les blocs sont de la forme :

— $I_p = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$ avec $p \in [\![0, n]\!]$;

— $-I_q = \begin{pmatrix} -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & -1 \end{pmatrix}$ avec $q \in [\![0, n]\!]$;

— $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$ avec $\theta \in]0, \pi[\cup]\pi, 2\pi[$.

b. Cas d'une isométrie vectorielle directe en dimension 3

Proposition 22.

Soit $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ une isométrie vectorielle directe i.e. $u \in O(\mathbb{R}^3)$ et $\det(u) = 1$. Alors il existe une base orthonormale $\mathcal{B}$ et $\theta \in [0, 2\pi[$ telle que :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

Démonstration.

On applique le théorème précédent et en utilisant le fait que $\det(u) = 1$. □

Définition-Proposition 13. *Rotation de l'espace*

Soit $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ une isométrie vectorielle directe. Alors il existe une droite $\mathcal{D}$ stable par u et $\theta \in [0, 2\pi]$ tel que l'endomorphisme $u_{\mathcal{P}}$ induit par u sur $\mathcal{P}$ est une rotation d'angle θ où $\mathcal{P}$ est le plan orthogonal à $\mathcal{D}$.
Un tel endomorphisme u de $\mathbb{R}^3$ est appelé **rotation d'axe** $\mathcal{D}$.

Démonstration.

D'après la proposition précédente, il existe une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ orthonormale telle que :

$$A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

Alors la droite $\mathcal{D} = \mathrm{Vect}(e_1)$ est stable par u et le plan $\mathcal{P} = \mathrm{Vect}(e_2, e_3)$ vérifie $\mathcal{P} \perp \mathcal{D}$ et

$$u_{\mathcal{P}} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

□