Chapitre X

Intégrale généralisée

Table des matières

Dans ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$; les intervalles considérés sont supposés d'intérieur non vide et a désigne un nombre réel.

Partie A

Intégrale généralisée sur $[a, +\infty[$

1. Généralités

a. Définitions et exemples

Définition 1. *Intégrale convergente*

Soit $f \in C_{pm}([a, +\infty[, \mathbb{K})$.

Si la limite $\lim\limits_{x \to +\infty} \int_a^x f$ existe et est finie, on note $\int_a^{+\infty} f$ ou encore $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ cette quantité, i.e. :

$$\int_a^{+\infty} f(t)dt = \lim_{x \to +\infty} \int_a^x f(t)dt.$$

Dans ce cas, on dit que $\int_a^{+\infty} f$ **converge**.

Dans le cas contraire, on dit que $\int_a^{+\infty} f$ **diverge**.

Proposition 1.

Soit $f \in C([a, +\infty[, \mathbb{K})$ et F une primitive de f. L'intégrale $\int_a^{+\infty} f$ converge si, et seulement si F admet une limite finie en $+\infty$. Dans ce cas, on a :

$$\int_a^{+\infty} f(t)dt = \lim_{x \to +\infty} F(x) - F(a).$$

Exemple 1.

1. Soit $\alpha > 0$. Alors $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t}dt$ converge et on a $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t}dt = \dfrac{1}{\alpha}$.
2. L'intégrale $\int_0^{+\infty} \cos(t)dt$ diverge.

En effet, pour $x \in \mathbb{R}$, $\int_0^x \cos(t)dt = \sin(x)$; or sin ne possède pas de limite quand x tend vers $+\infty$.

Exercice 1.

Discuter de la convergence des intégrales suivantes et en cas de convergence, déterminer la valeur de l'intégrale :

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}dt \qquad \int_0^{+\infty} te^t dt \qquad \int_1^{+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{t^2}\right)dt.$$

Exercice 2.

1. Donner un exemple de fonction $f : [1, +\infty[\to \mathbb{R}_+$ continue telle que $\lim_{t\to+\infty} f(t) = 0$ et telle que $\displaystyle\int_1^{+\infty} f$ diverge.
2. Donner un exemple de fonction $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ continue telle que f n'est pas bornée et telle que $\displaystyle\int_1^{+\infty} f$ converge.

Correction.

1. On peut considérer la fonction $f : t \mapsto \dfrac{1}{t}$. En effet, on a $\lim_{t\to+\infty} f(t) = 0$ et
$$\int_1^x f(t)dt = [\ln(t)]_1^x = \ln(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty.$$
2. On peut considérer la fonction $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ définie par :
   — pour $n \in \mathbb{N}*$, f est affine sur :
   - l'intervalle $[n - \frac{1}{2^n}, n]$ avec $f(n - \frac{1}{2^n}) = 0$ et $f(n) = n+1$;
   - l'intervalle $[n, n + \frac{1}{2^n}]$ avec $f(n) = n+1$ et $f(n + \frac{1}{2^n}) = 0$;

   — $f(t) = 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}_+ \setminus \displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} [n - \frac{1}{2^n}, n + \frac{1}{2^n}]$.

   Alors f est continue et non bornée sur $\mathbb{R}_+$. De plus, on a, pour $n \in \mathbb{N}^*$:
$$\int_{n-\frac{1}{2^n}}^{n+\frac{1}{2^n}} f(t)dt = \frac{n+1}{2^n}.$$
   On a, pour $x \in \mathbb{R}_+$ et $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $n + \frac{1}{2^n} > x$:
$$\int_0^x f(t)dt \leq \int_0^{n+\frac{1}{2^n}} f(t)dt = \sum_{k=1}^{n} \frac{k+1}{2^k} \leq \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k+1}{2^k} = 3.$$

Ainsi la fonction $F : x \mapsto \int_0^x f(t)dt$ est majorée sur $\mathbb{R}_+$ et, de plus, la fonction f étant positive, la fonction F est croissante sur $\mathbb{R}_+$. Il en résulte que F admet une limite finie en $+\infty$ et donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} f$ converge.

Aparté - calcul de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n+1}{2^n}$ grâce aux séries entières :

On remarque que la série entière $\displaystyle\sum_{n\geq 1}(n+1)x^n$ a pour rayon de convergence 1 et on remarque que, pour $S : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(n+1)x^n$ la somme de cette série entière, $\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{n+1}{2^n} = S(\frac{1}{2})$.

Le rayon de convergence de la série entière étant 1, la somme S est intégrable sur tout segment de $]-1,1[$ et de plus, on a, pour tout $t \in [0,1[$:

$$\begin{aligned}
\int_0^t S(x)dx &= \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^t (n+1)x^n dx \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \left[x^{n+1}\right]_0^t dx \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} t^{n+1} = \sum_{n=2}^{+\infty} t^n \\
&= -1 - t + \sum_{n=0}^{+\infty} t^n \\
\int_0^t S(x)dx &= -1 - t + \frac{1}{1-t}
\end{aligned}$$

Par suite, on a, pour tout $t \in [0,1[$:

$$S(t) = \frac{d}{dt}\int_0^t S(x)dx = \frac{d}{dt}\left(-1 - t + \frac{1}{1-t}\right) = -1 + \frac{1}{(1-t)^2}.$$

Il en résulte que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n+1}{2^n} = S(\frac{1}{2}) = -1 + \frac{1}{(1-\frac{1}{2})^2} = 3.$$

Pour un calcul plus aisé, on aurait pu prendre f affine sur l'intervalle $[n - \frac{1}{4^n}, n]$ avec $f(n - \frac{1}{4^n}) = 0$ et $f(n) = 2^n$; affine sur l'intervalle $[n, n + \frac{1}{4^n}]$ avec $f(n) = 2^n$ et $f(n + \frac{1}{4^n}) = 0$, et f nulle partout ailleurs.

b. Intégrales de Riemann en $+\infty$

Proposition 2. *Intégrale de Riemann en $+\infty$*

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Alors $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha} dt$ converge si, et seulement si, $\alpha > 1$.

Démonstration.

Pour $\alpha = 1$, $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t} dt$ (voire la correction de l'exercice précédent).

Pour $\alpha \neq 1$, on a :

$$\int_1^x \frac{1}{t^\alpha} dt = \left[\frac{1}{(1-\alpha)t^{\alpha-1}}\right]_1^x = \frac{1}{(1-\alpha)x^{\alpha-1}} - \frac{1}{1-\alpha} \begin{cases} \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty & \text{si } \alpha < 1; \\ \xrightarrow[x\to+\infty]{} \dfrac{1}{\alpha-1} & \text{si } \alpha > 1. \end{cases}$$

$\square$

c. Propriétés de l'intégrale généralisée sur $[a, +\infty[$

Proposition 3. *Relation de Chasles*

Soit $f \in C_{pm}([a, +\infty[, \mathbb{K})$ et $b \in [a, +\infty[$. Alors l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} f$ est convergente si, et seulement si, $\displaystyle\int_b^{+\infty} f$ est convergente. Dans ce cas, on a :

$$\int_a^{+\infty} f(t)dt = \int_a^b f(t)dt + \int_b^{+\infty} f(t)dt.$$

Proposition 4. *Linéarité de l'intégrale généralisée*

Soit $f, g \in C_{pm}([a, +\infty[, \mathbb{K})$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$. Si les intégrales $\displaystyle\int_a^{+\infty} f$ et $\displaystyle\int_a^{+\infty} g$ convergent, alors l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} (\lambda f + \mu g)$ converge et on a :

$$\int_a^{+\infty} (\lambda f + \mu g)(t)dt = \lambda \int_a^{+\infty} f(t)dt + \mu \int_a^{+\infty} g(t)dt.$$

Exercice 3.

Déduire de la proposition précédente que l'ensemble des fonctions f continues par morceaux telles que $\displaystyle\int_a^{+\infty} f$ converge est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$. Que dire de l'application $f \mapsto \displaystyle\int_a^{+\infty} f$?

Proposition 5. *Positivité et croissance*

Soit $f, g \in C_{pm}([a, +\infty[, \mathbb{R})$ telles que $\displaystyle\int_a^{+\infty} f$ et $\displaystyle\int_a^{+\infty} g$ convergent.

- Si f est positive (i.e. pour tout $t \in [a, +\infty[$, $f(t) \geq 0$), alors $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)dt \geq 0$.
- Si $f \leq g$ (i.e. pour tout $t \in [a, +\infty[$, $f(t) \leq g(t)$), alors $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)dt \leq \int_a^{+\infty} g(t)dt$.

Théorème 1.

Soit $f \in C([a, +\infty[, \mathbb{R})$ une fonction **continue** et **positive** sur $[a, +\infty[$. Alors $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)dt = 0$ si, et seulement si, $f = 0$.

Proposition 6. *Dérivation*

Soit $f \in C([a, +\infty[, \mathbb{R})$ une fonction **continue** sur $[a, +\infty[$ telle que $\displaystyle\int_a^{+\infty} f$ converge. Alors l'application de $\varphi : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par :

$$\varphi : x \mapsto \int_x^{+\infty} f(t)dt$$

est de classe C^1 sur $[a, +\infty[$ et on a $\varphi' = -f$.

2. Intégrale généralisée de fonctions positives

Proposition 7.

Soit $f \in C_{pm}([a, +\infty[, \mathbb{R})$ une fonction positive.

- L'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} f$ converge si, et seulement si, la fonction $F : x \mapsto \displaystyle\int_a^{x} f(t)dt$ est majorée sur $[a, +\infty[$. Dans ce cas, on a :

$$\int_a^{+\infty} f(t)dt = \sup_{x \in [a, +\infty[} \int_a^{x} f(t)dt.$$

— L'intégrale $\int_a^{+\infty} f$ diverge si, et seulement si, $\lim_{x\to+\infty} \int_a^x f(t)dt = +\infty$.

Théorème 2. *Comparaison*

Soit $f, g \in C_{pm}([a, +\infty[, \mathbb{R})$ des fonctions positives.

i) On suppose qu'il existe $A \geq a$ tel que, pour tout $t \geq A$, $f(t) \leq g(t)$.

— Si $\int_a^{+\infty} g$ converge, alors $\int_a^{+\infty} f$ converge.

— Si $\int_a^{+\infty} f$ diverge, alors $\int_a^{+\infty} g$ diverge.

ii) On suppose $f = 0(g)$ (ou $f = o(g)$) en $+\infty$. Si $\int_a^{+\infty} g$ converge, alors $\int_a^{+\infty} f$ converge.

iii) On suppose $f \underset{x\to+\infty}{\sim} g$. Alors $\int_a^{+\infty} f$ et $\int_a^{+\infty} g$ sont de même nature.

Exercice 4.

Étudier la convergence des intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^\alpha + 1}{3t^\beta + 5} dt$ pour $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
2. $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^\alpha e^{-t} dt$ pour $\alpha \in \mathbb{R}$.
3. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha (\ln(t))^\beta} dt$ pour $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

3. Intégrabilité

Définition 2. *Intégrabilité*

Soit $f \in C_{pm}([a, +\infty[, \mathbb{R})$. On dit que f est **intégrable** sur $[a, +\infty[$ ou que $\int_a^{+\infty} f$ est **absolument convergente** si l'intégrale $\int_a^{+\infty} |f|$ est convergente.

Théorème 3.

Soit $f \in C_{pm}([a, +\infty[, \mathbb{R})$. Si f est intégrable sur $[a, +\infty[$, alors $\int_a^{+\infty} f$ converge.

Exercice 5.

Déterminer la nature de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{t\sin(t)}{\sqrt{\mathrm{sh}(t)}}dt$.

Partie B

Intégration sur un intervalle quelconque

Dans cette partie, a, b désignent des réels tels que $a < b$.

1. Intégrale généralisée sur $]-\infty, a]$

Définition 3. *Intégrale convergente sur* $]-\infty, a]$

Soit $f \in C_{pm}(]-\infty, a], \mathbb{K})$.

Si la limite $\lim\limits_{x \to -\infty} \int_x^a f$ existe et est finie, on note $\int_{-\infty}^a f$ ou encore $\int_{-\infty}^a f(t)dt$ cette quantité, i.e. :

$$\int_{-\infty}^a f(t)dt = \lim_{x \to -\infty} \int_x^a f(t)dt.$$

Dans ce cas, on dit que $\int_{-\infty}^a f$ **converge**.

Dans le cas contraire, on dit que $\int_{-\infty}^a f$ **diverge**.

Remarque 1.

Les propriétés de l'intégrale $\int_{-\infty}^a$ sont analogues à celle de l'intégrale $\int_a^{+\infty}$ et on les démontre sans difficulté en remarquant qu'en posant $\tilde{f} : t \mapsto f(-t)$, on obtient les propriétés suivantes :

- si $f \in C_{pm}(]-\infty, a], \mathbb{K})$ alors $\tilde{f} \in C_{pm}([-a, +\infty], \mathbb{K})$;
- les intégrales $\int_{-\infty}^a \tilde{f}$ et $\int_{-a}^{+\infty} f$ sont de même nature ;
- en cas de convergence, $\int_{-\infty}^a \tilde{f}(t)dt = \int_{-a}^{+\infty} f(t)dt$.

Exercice 6.

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Étudier la convergence de l'intégrale $\int_{-\infty}^0 e^{\alpha t}dt$ en fonction de α.

2. Intégrale généralisée sur $]a, b]$ ou $[a, b[$

Définition 4. *Intégrale convergente sur $[a, b[$*

Soit $f \in C_{pm}([a, b[, \mathbb{K})$.
Si la limite $\lim_{x \to b} \int_a^x f$ existe et est finie, on note $\int_a^b f$ ou encore $\int_a^b f(t)dt$ cette quantité, i.e. :

$$\int_a^b f(t)dt = \lim_{x \to b} \int_a^x f(t)dt.$$

Dans ce cas, on dit que $\int_a^b f$ **converge**.

Dans le cas contraire, on dit que $\int_a^b f$ **diverge**.

Remarque 2.

On définit de manière analogue l'intégrale sur un intervalle du type $]a, b]$.
Tous les résultats de la partie précédente sont facilement adaptables aux cas des intégrales sur $]a, b]$ et sur $[a, b[$.

Définition 5. *Intégrabilité*

Soit $f \in C_{pm}(]a, b], \mathbb{R})$. On dit que f est **intégrable** sur $]a, b]$ ou que $\int_a^b f$ est **absolument convergente** si l'intégrale $\int_a^b |f|$ est convergente.

Exemple 2.

— L'intégrale $\int_0^1 \ln(t)dt$ converge et $\int_0^1 \ln(t)dt = -1$

— L'intégrale $\int_0^1 \frac{1}{t}dt$ diverge

Proposition 8. *Intégrales de Riemann*

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Les intégrales $\int_a^b \frac{1}{(b-t)^\alpha}dt$ et $\int_a^b \frac{1}{(t-a)^\alpha}dt$ convergent si, et seulement si, $\alpha < 1$.

Corollaire 1. *Intégrale de Riemann en 0*

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Les intégrales $\int_0^1 \frac{1}{t^\alpha}dt$ converge si, et seulement si, $\alpha < 1$.

Démonstration.

- Si $\alpha = 1$, pour $0 < x \leq 1$, on a :

$$\int_x^1 \frac{1}{t} dt = [\ln(t)]_x^1 = -\ln(x) \xrightarrow[x \to 0^+]{} +\infty$$

donc $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t} dt$ diverge.

- Si $\alpha \neq 1$, on a, pour $0 < x \leq 1$:

$$\int_x^1 \frac{1}{t^\alpha} dt = \left[\frac{1}{(1-\alpha)t^{\alpha-1}}\right]_x^1 = \frac{1}{1-\alpha} - \frac{1}{(1-\alpha)x^{\alpha-1}} \begin{cases} \xrightarrow[x \to 0^+]{} \dfrac{1}{1-\alpha} & \text{si } \alpha < 1; \\ \xrightarrow[x \to 0^+]{} +\infty & \text{si } \alpha > 1. \end{cases}$$

Il en résulte que $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t^\alpha} dt$ converge si, et seulement si, $\alpha < 1$. □

Exercice 7.

1. Soit $f \in C_{pm}([a,b[, \mathbb{K})$. Montrer que si f est bornée, alors $\displaystyle\int_a^b f$ est convergente.

2. Étudier la nature des intégrales suivantes :

$$\int_0^1 \frac{t^3}{t^{\frac{7}{2}} + 1} dt \quad \int_0^1 \frac{\ln(1+t)}{t\sqrt{t}} dt \quad \int_0^1 \sin\left(\frac{1}{t}\right) dt.$$

3. Intégration sur un intervalle ouvert

Dans ce paragraphe a, b peuvent être égaux à $-\infty$ et $+\infty$ respectivement et on s'intéresse aux intégrales sur l'intervalle ouvert $]a, b[$.

Définition 6. *Intégrale convergente sur* $[a, b[$

Soit $f \in C_{pm}(]a,b[, \mathbb{K})$.

S'il existe $c \in]a,b[$ tel que $\displaystyle\int_a^c f$ **et** $\displaystyle\int_c^b f$ convergent alors on note $\displaystyle\int_a^b f$ ou encore $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ la quantité :

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt.$$

Dans ce cas, on dit que l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f$ **converge**.

Dans le cas contraire, on dit que l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f$ **diverge**.

Proposition 9.

Soit $f \in C_{pm}(]a,b[,\mathbb{K})$. Si $\int_a^b f$ converge, alors, pour tout $c \in]a,b[$, $\int_a^c f$ et $\int_c^b f$ convergent et on a :

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt.$$

Proposition 10.

Soit $f \in C(]a,b[,\mathbb{K})$ et F une primitive de f sur $]a,b[$. L'intégrale $\int_a^b f$ converge si, et seulement si, la fonction F admet des limites finies en a et b. Dans ce cas, on a :

$$\int_a^b f(t)dt = \lim_{t\to b} F(t) - \lim_{t\to a} F(t).$$

Exercice 8.

Étudier la convergence des intégrales suivantes :

$$\int_0^1 \sqrt{t(1-t)}dt \qquad \int_1^{+\infty} \sin(t)\ln(\frac{t^2+1}{t^2-1})dt.$$

Partie C

Propriétés de l'intégrale généralisée

Dans cette partie, I désigne un intervalle quelconque (ouvert, semi-ouvert ou fermé, de longueur finie ou infinie) de $\mathbb{R}$ d'intérieur non vide et on note a et b ses extrémités (possiblement infinies).

1. Propriétés de l'intégrale

a. Espace de fonctions continues par morceaux intégrables

Proposition 11.

L'ensemble $E = \{f \in C_{pm}(I, \mathbb{K}) \mid f \text{ est intégrable}\}$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ et l'application $f \mapsto \int_I f$ est une forme linéaire sur E.
De plus, cette application est positive et croissante.

b. Inégalités

Proposition 12. *Inégalité triangulaire*

Soit $f, g \in C_{pm}(I, \mathbb{K})$ des fonctions intégrables. Alors

$$\int_I |f(t) + g(t)|dt \leq \int_I |f(t)|dt + \int_I |g(t)|dt.$$

Proposition 13.

Soit $f \in C_{pm}(I, \mathbb{K})$ une fonction intégrable. Alors

$$|\int_I f(t)dt| \leq \int_I |f(t)|dt.$$

c. Séparation

Proposition 14. *Séparation*

Si f est une fonction continue, positive et intégrable sur I, alors

$$\int_I f(t)dt = 0 \text{ si, et seulement si, } f = \mathbf{0}.$$

d. Relation de Chasles

Proposition 15.

Soit $f \in C_{pm}(I, \mathbb{K})$ une fonction intégrable. Alors pour tout $a, b, c \in I$ on a :

$$\int_a^c f(t)dt = \int_a^b f(t)dt + \int_b^c f(t)dt.$$

2. Calculs d'intégrales

a. Intégration par parties

Notation 1.

Soit $f \in C(I, \mathbb{K})$ et F une primitive de f sur I. On note

$$[F(t)]_a^b = \lim_{t \to b} F(t) - \lim_{t \to a} F(t)$$

lorsque ces deux limites existent.

Proposition 16. *Intégration par parties*

Soit $f, g \in C^1(I, \mathbb{K})$. Si la fonction produit fg admet des limites aux bornes a et b de I, alors les intégrales $\displaystyle\int_I fg'$ et $\displaystyle\int_I f'g$ sont de même nature. De plus, en cas de convergence, on a :

$$\int_a^b f'(t)g(t)dt = [f(t)g(t)]_a^b - \int_a^b f(t)g'(t)dt.$$

Exercice 9.

1. Justifier la convergence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{sin(t)}{t} dt$
2. Justifier la convergence puis calculer $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1-t^2)}{t^2} dt$.
3. On note, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{(t^2+1)^n} dt$.
   i) Justifier l'existence de I_n pour $n \in \mathbb{N}^*$.
   ii) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer une relation entre I_{n+1} et I_n. En déduire I_n.

b. Changement de variable

Dans ce paragraphe, on considère $-\infty \leq \alpha < \beta \leq +\infty$.

Proposition 17. *Changement de variable*

Soit $f \in C(]a,b[,\mathbb{K})$ et $\varphi :]\alpha,\beta[\to]a,b[$ une fonction de classe C^1, bijective et strictement monotone. Alors les intégrales $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ et $\displaystyle\int_\alpha^\beta (f\circ\varphi)(u).\varphi'(u)du$ sont de même nature. En cas de convergence, on a :

— si φ est croissante : $\displaystyle\int_a^b f(t)dt = \int_\alpha^\beta (f\circ\varphi)(u).\varphi'(u)du$;

— si φ est décroissante : $\displaystyle\int_a^b f(t)dt = \int_\beta^\alpha (f\circ\varphi)(u).\varphi'(u)du$.

Exercice 10.

Justifier la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{1+t^2}dt$ puis la calculer grâce au changement de variable $u = \frac{1}{t}$.

3. Intégration des relations de comparaison

Proposition 18.

Soit $f \in C([a,b[,\mathbb{K})$ et $g \in C([a,b[,\mathbb{R})$ une fonction **positive**. On suppose $f = O(g)$.

- Si $\displaystyle\int_a^b g$ converge, alors f est intégrable sur $[a,b[$ et on a :

$$\int_x^b f(t)dt = O\left(\int_x^b g(t)dt\right) \text{ quand } x \to b$$

- Si $\displaystyle\int_a^b g$ diverge, on a :

$$\int_a^x f(t)dt = O\left(\int_a^x g(t)dt\right) \text{ quand } x \to b$$

Ce résultat est toujours vrai lorsqu'on remplace les O par o.

Exercice 11.

1. Montrer que en $+\infty$, $\displaystyle\int_1^x \frac{e^{t^2}}{t^2}dt = o\left(\int_1^x e^{t^2}dt\right)$.
2. En déduire un équivalent simple de $\displaystyle\int_1^x e^{t^2}dt$ en $+\infty$ (utiliser une IPP).

Proposition 19.

Soit $f \in C([a,b[,\mathbb{K})$ et $g \in C([a,b[,\mathbb{R})$ une fonction **positive**. On suppose $f(x) \underset{x\to b}{\sim} g(x)$.

- Si $\displaystyle\int_a^b g$ converge, alors f est intégrable sur $[a,b[$ et on a :

$$\int_x^b f(t)dt \underset{x\to b}{\sim} \int_x^b g(t)dt.$$

- Si $\displaystyle\int_a^b g$ diverge, alors f n'est pas intégrable sur $[a,b[$ et on a :

$$\int_a^x f(t)dt \underset{x\to b}{\sim} \int_a^x g(t)dt.$$

Partie D

Suites et séries d'intégrales

Dans cette partie, I désigne un intervalle d'intérieur non vide.

1. Théorème de convergence dominée

Théorème 4. *Théorème de convergence dominée*

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de $C_{pm}(I,\mathbb{K})$. Si les propriétés suivantes sont vérifiées :

- la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **converge simplement** vers une fonction f **et** f appartient à $C_{pm}(I,\mathbb{K})$;

- il existe une fonction g **intégrable** sur I qui **domine** tous les f_n, i.e. pour tout $n\in\mathbb{N}$, pour tout $t\in I$,

$$|f_n(t)| \leq g(t) \qquad \textbf{hypothèse de domination}$$

alors, les f_n et f sont intégrables sur I et on a :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_I f_n(t)dt = \int_I \lim_{n\to+\infty} (f_n(t))\, dt = \int_I f(t)dt.$$

Exemple 3.

Les intégrales $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{1+n^2x^2}dx$ sont bien définies et $I_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Exercice 12.

Justifier l'existence des intégrales I_n et calculer la limite de la suite (I_n) pour :

1. $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2+t^ne^{-t}}dt$.
2. $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1-t^n)^{\frac{1}{n}}}dt$.

Remarque 3.

Attention, l'hypothèse de domination est **essentielle** ! Par exemple, la suite de fonctions suivante converge simplement vers 0, mais la limite des intégrale n'est pas nulle !

$$\text{sur } [0,1[,\quad f_n(t) = n^2t^{n-1}.$$

2. Intégration terme à terme d'une série de fonctions

Théorème 5. *Intégration terme à terme*

Soit $\sum f_n$ une série de fonctions de $C_{pm}(I, \mathbb{K})$. Si les propriétés suivantes sont vérifiées :

- pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est intégrable sur I ;
- la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur I et sa somme S appartient à $C_{pm}(I, \mathbb{K})$;
- la série numérique $\sum \left(\int_I |f_n| \right)$ converge,

alors, $S : t \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)$ est intégrable sur I et on a :

$$\int_I \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n \right) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\int_I f_n \right).$$

Très souvent on utilisera ce théorème pour calculer l'intégrale d'une fonction f que l'on peut (en partie) développer en série entière :

Exemple 4.

On a $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(t)}{1+t} dt = \frac{-\pi^2}{12}$.

En effet, cette intégrale existe car, $f : t \mapsto \dfrac{\ln(t)}{1+t}$ est continue sur $]0,1]$ et pour tout $t \in]0,1]$,

$$|\frac{\ln(t)}{1+t}| \leq |\ln(t)|.$$

Or ln est intégrable sur $]0,1]$; donc f l'est aussi.

On a, pour $t \in]0,1[$,

$$\frac{\ln(t)}{1+t} = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n t^n \ln(t).$$

Ainsi, on pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $f_n : t \mapsto (-1)^n t^n \ln(t)$.

- On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $t \in]0,1]$, $|f_n(t)| \leq |\ln(t)|$ donc f_n est intégrable sur $]0,1]$.
- $\sum f_n$ converge simplement sur I vers $t \mapsto \dfrac{\ln(t)}{1+t}$ qui est continue sur $]0,1]$.
- Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$\begin{aligned} \int_0^1 |f_n(t)| dt &= -\int_0^1 t^n \ln(t) dt \\ &\overset{\text{IPP}}{=} -\left[\frac{t^{n+1}}{n+1}\ln(t)\right]_0^1 + \int_0^1 \frac{t^n}{n+1} dt \\ &= \frac{1}{(n+1)^2}. \end{aligned}$$

  Donc, $\sum \int_0^1 |f_n| = \sum \dfrac{1}{(n+1)^2}$ est une série numérique convergente (série de Riemann avec $2 > 1$).

Les hypothèses du théorème d'intégration terme à terme sont donc vérifiées, d'où

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{\ln(t)}{1+t} dt &= \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 (-1)^n t^n \ln(t) dt \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)^2} \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \\ &= -\frac{\pi^2}{12}. \end{aligned}$$

(Cette dernière égalité peut être obtenue en effectuant une sommation par paquets sur les nombres pairs et impairs pour faire apparaître une relation avec la somme $\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^2} = \dfrac{\pi^2}{6}$.

Exercice 13.

1. Calculer $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(t)}{1-t}dt$.
2. Calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^2}{e^t-1}dt$ en fonction de $\zeta(3)$.

Correction.

2. On note $f : x \mapsto \dfrac{t^2}{e^t-1}$. Pour $t>0$, on a $e^{-t} \in]0,1[$, d'où :

$$\begin{aligned} f(t) &= t^2e^{-t}\frac{1}{1-e^{-t}} \\ &= t^2e^{-t}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(e^{-t}\right)^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} t^2e^{-(n+1)t} \end{aligned}$$

On pose alors $f_n : x \mapsto t^2e^{-(n+1)t}$.

- pour $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue sur $[0,+\infty[$ et on a $f_n(t) \underset{x\to+\infty}{=} o(\frac{1}{t^2})$, donc f_n est intégrable sur $[0,+\infty[$.
- $\sum f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+^*$ vers f qui est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
- La série numérique $\sum \int_0^{+\infty}|f_n|$ converge car, en effectuant deux IPP, on obtient l'égalité :

$$\int_0^{+\infty} t^2e^{-(n+1)t}dt = \left[-\frac{t^2e^{-(n+1)t}}{n+1}\right]_0^{+\infty} + \left[-\frac{2te^{-(n+1)t}}{(n+1)^2}\right]_0^{+\infty} + \left[-\frac{2e^{-(n+1)t}}{(n+1)^3}\right]_0^{+\infty} = \frac{2}{(n+1)^3}.$$

  et $\sum \dfrac{2}{(n+1)^3}$ converge (série de Riemann)

Il en résulte que f est intégrable sur $]0,+\infty[$ et on a :

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^2}{e^t-1}dt = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2}{(n+1)^3} = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2}{n^3} = 2\zeta(3).$$

Partie E

Intégrale dépendant d'un paramètre

Dans cette partie, A désigne une partie d'un espace vectoriel normé E de dimension finie et I désigne un intervalle d'intérieur non vide de $\mathbb{R}$.

1. Limite d'une intégrale à paramètre

On suppose que A est un intervalle de $\mathbb{R}$.

Théorème 6.

Soit $f : A \times I \to \mathbb{K}$ une fonction et a une extrémité de l'intervalle A. Si f vérifie les propriétés suivantes :

- pour tout $x \in A$, $f(x, \cdot) : t \mapsto f(x, t)$ est continue par morceaux sur I ;
- pour tout $t \in I$, $f(\cdot, t) : x \mapsto f(x, t)$ admet une limite en a et l'application $h : t \mapsto \lim\limits_{x \to a} f(x, t)$ est continue par morceaux sur I ;
- il existe une fonction $g : I \to \mathbb{R}$ positive et **intégrable** sur I telle que, pour tout $(x, t) \in A \times I$:
$$|f(x, t)| \leq g(t), \qquad \textbf{hypothèse de domination}$$

alors la fonction h est intégrable sur I et on a :

$$\lim_{x \to a} \left(\int_I f(x, t) dt \right) = \int_I \left(\lim_{x \to a} f(x, t) \right) dt.$$

Exercice 14.

Justifier, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, l'existence de

$$I(x) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1 + t^2)(1 + tx)} dt$$

et calculer $\lim_{x \to +\infty} I(x)$.

2. Continuité d'une intégrale à paramètre

Théorème 7. *Théorème de continuité d'une intégrale à paramètre*

Soit $f : A \times I \to \mathbb{K}$ une fonction. Si f vérifie les propriétés suivantes :

- pour tout $t \in I$, $f(\cdot, t) : x \mapsto f(x, t)$ est **continue** sur A ;
- pour tout $x \in A$, $f(x, \cdot) : t \mapsto f(x, t)$ est continue par morceaux sur I ;
- il existe une fonction $g : I \to \mathbb{R}$ positive et **intégrable** sur I telle que, pour tout

$(x,t) \in A \times I$:

$$|f(x,t)| \leq g(t), \qquad \textbf{hypothèse de domination}$$

alors la fonction $F : x \mapsto \int_I f(x,t)dt$ est définie et continue sur A.

Exemple 5. *Transformée de Fourier*

Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction continue par morceaux et intégrable sur $\mathbb{R}$. On appelle **transformée de Fourier de** φ et on note $\mathcal{F}(\varphi)$ la fonction de $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$:

$$\mathcal{F}(\varphi) : x \mapsto \int_{\mathbb{R}} \varphi(t)e^{-ixt}dt.$$

La transformée de Fourier de φ est bien définie et continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 15.

Déterminer le domaine de définition de $F : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t^2}dt$ et montrer que F est continue sur ce domaine.

Corollaire 2. *Extension du théorème de continuité*

On suppose ici que A est un intervalle de $\mathbb{R}$. Si on a les mêmes hypothèses que le théorème précédent en modifiant l'hypothèse de domination par :

- **Pour tout segment** $[a,b]$ **de** A, il existe une fonction $g : I \to \mathbb{R}$ positive et **intégrable** sur I telle que, pour tout $(x,t) \in [a,b] \times I$:

$$|f(x,t)| \leq g(t), \qquad \textbf{hypothèse de domination sur tout segment}$$

alors la fonction $F : x \mapsto \int_I f(x,t)dt$ est définie et continue sur A.

Exercice 16.

Déterminer le domaine de définition de $F : x \mapsto \int_0^{+\infty} e^{-xt}dt$ et montrer que F est continue sur ce domaine.

3. Dérivation d'une intégrale à paramètre

On suppose que A est un intervalle de $\mathbb{R}$.

Théorème 8. *Théorème de dérivation d'une intégrale à paramètre*

Soit $f : A \times I \to \mathbb{K}$ une fonction. Si f vérifie les propriétés suivantes :

- pour tout $t \in I$, $f(\cdot, t) : x \mapsto f(x,t)$ est C^1 sur A ;
- pour tout $x \in A$, $f(x, \cdot) : t \mapsto f(x,t)$ est intégrable sur I ;
- pour tout $x \in A$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, \cdot) : t \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est continue par morceaux sur I ;
- il existe une fonction $g : I \to \mathbb{R}$ positive et **intégrable** sur I telle que, pour tout $(x,t) \in A \times I$:
$$\left| \frac{\partial f}{\partial x}(x,t) \right| \leq g(t),$$

alors la fonction $F : x \mapsto \displaystyle\int_I f(x,t)dt$ est définie et C^1 sur A. De plus, on a, pour tout $x \in A$:

$$F'(x) = \frac{\partial}{\partial x} \int_I f(x,t)dt = \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)dt.$$

Remarque 4.

Dans le cas où A est un intervalle de $\mathbb{R}$, on peut de nouveau remplacer l'hypothèse de domination par l'hypothèse de domination sur tout segment pour obtenir la conclusion.

Exemple 6.

La fonction $F : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-xt^2} dt$ est C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ et vérifie l'équation différentielle $y' = \dfrac{1}{2x} y$. Sachant que $F(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \dfrac{1}{2}\sqrt{\pi}$, on obtient que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$F(x) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{x}}.$$

En effet, on a :

- pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $f(x,\cdot) : t \mapsto e^{-xt^2}$ est intégrable sur $[0,+\infty[$ car $t \mapsto e^{-xt^2}$ est continue sur $[0,+\infty[$ et en $+\infty$, comme $x > 0$, $e^{-xt^2} = o(\frac{1}{t^2})$.
- pour tout $t \in [0,+\infty[$, $f(\cdot,t) : x \mapsto e^{-xt^2}$ est C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ (et même C^∞) ;
- pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\frac{\partial f}{\partial x}(x,\cdot) : t \mapsto -t^2 e^{-xt^2}$ est continue sur $[0,+\infty[$;
- *(Domination)* Soit $a > 0$. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ et tout $t \in [a,+\infty[$, on a :

$$|-t^2 e^{-xt^2}| \leq g(t) = t^2 e^{-at^2},$$

  Or la fonction $g : [a,+\infty[\to \mathbb{R}_+$ est intégrable sur $[a,+\infty[$ car elle est continue sur cet intervalle et en $+\infty$, comme $a > 0$, $t^2 e^{-at^2} = o(\frac{1}{t^2})$ (car $t^2 g(t) \to 0$).

Ainsi, d'après le théorème de dérivation des intégrales à paramètre, pour tout $a > 0$, F est C^1 sur $[a,+\infty[$. Il en résulte que F est C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ et on a, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$F'(x) = \int_0^{+\infty} \underbrace{-t^2 e^{-xt^2}}_{=(-\frac{1}{2}t).(2t)e^{-xt^2}} dt \overset{\text{IPP}}{=} \left[\frac{-te^{-xt^2}}{2x}\right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} \frac{-e^{-xt^2}}{2x} dt = \frac{1}{2x} F(x).$$

Ainsi, F est solution de l'équation différentielle $y' = \frac{1}{2x} y$ qui admet pour solutions $y = Ce^{\frac{1}{2}\ln(x)} = C\frac{1}{\sqrt{x}}$ pour $C \in \mathbb{R}$.
Or on a :

$$C = F(1) = \frac{\sqrt{\pi}2}{,}$$

donc

$$F(x) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{x}}.$$

Exercice 17.

Étudier les fonctions suivantes :

1. $F : x \mapsto \int_0^{+\infty} e^{-t^2} cos(xt) dt$. En exprimant F' en fonction de F, déterminer F.
2. $G : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{e^{ixt}}{1+t^3} dt$.
3. $H : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{x^2+t^2} dt$.
4. Fonction Gamma. $\Gamma : x \mapsto \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$.

Correction.

4. Déterminons le domaine de définition $\mathcal{D}_\Gamma$ de Γ. On pose $f(x,t) = t^{x-1}e^{-t}$. Soit $x \in \mathbb{R}$.
   - $\star$ La fonction $t \mapsto t^{x-1}e^{-t}$ est continue sur $]0,+\infty[$.
   - $\star$ en 0 :
   $$f(x,t) \underset{t\to 0^+}{\sim} t^{x-1}$$
   Or, d'après le critère de Riemann en 0, $t \mapsto t^{x-1}$ est intégrable en 0 sin et seulement si, $x > 0$. Donc $t \mapsto f(x,t)$ est intégrable en 0 si, et seulement si, $x > 0$.
   - $\star$ en $+\infty$:
   On a $t^2 t^{x-1}e^{-t} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$, donc
   $$f(x,t) = t^{x-1}e^{-t} = \underset{t\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{t^2}\right)$$
   et, d'après le critère de Riemann en $+\infty$, $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ est intégrable en $+\infty$. Ainsi, par comparaison, $t \mapsto f(x,t)$ est intégrable en $+\infty$.

   Il en résulte que $t \mapsto f(x,t)$ est intégrable sur $]0,+\infty[$ si, et seulement si, $x > 0$.
   Par suite, $\mathcal{D}_\Gamma =]0,+\infty[$.

   Montrons que Γ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$.
   Soit $k \in \mathbb{N}^*$.
   - pour tout $p \in \mathbb{N}$ et tout $t \in]0,+\infty[$, $x \mapsto f(x,t)$ est C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$ et :
   $$\frac{\partial^p}{\partial x^p} f(x,t) = \ln(t)^p t^{x-1}e^{-t}.$$
   - Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$ et $p \in \mathbb{N}$. La fonction $t \mapsto \dfrac{\partial^p}{\partial x^p} f(x,t)$ est intégrable sur $]0,+\infty[$. En effet, pour $p = 0$, on l'a montré lors de la détermination du domaine de définition, et pour $p \geq 1$:
     - $\star$ en 0 :
     $$|\frac{\partial^p}{\partial x^p} f(x,t)| \underset{t\to 0^+}{\sim} |\ln(t)|^p t^{x-1}$$
     Or si $x > 1$, $x - 1 > 0$ et donc $\lim\limits_{t\to 0^+} |\ln(t)|^p t^{x-1} = 0$ d'où $t \mapsto |\ln(t)|^p t^{x-1}$ est intégrable en 0 ;
     si $0 < x \leq 1$, on a $\frac{x}{2} > 0$ et $1 - \frac{x}{2} < 1$ donc :
     $$t^{1-\frac{x}{2}} |\ln(t)|^p t^{x-1} = t^{\frac{x}{2}} |\ln(t)|^p \xrightarrow[t\to 0^+]{} 0$$
     Donc, $\left|\dfrac{\partial^p}{\partial x^p} f(x,t)\right| = \underset{t\to+\infty}{o}\left(t^{1-\frac{x}{2}}\right)$ qui est intégrable en 0 d'après le critère de Riemann en 0 car $1 - \frac{x}{2} < 1$.
     - $\star$ en $+\infty$:
     $$|\frac{\partial^p}{\partial x^p} f(x,t)| = \underset{t\to 0^+}{o}\left(\frac{1}{t^2}\right)$$
     et donc est intégrable en $+\infty$.
   - pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $t \mapsto \dfrac{\partial^k}{\partial x^k} f(x,t)$ est continue par morceaux sur $]0,+\infty[$ car continue sur cet intervalle.

- Soit $a, b \in \mathbb{R}_+^*$ tels que $a < b$. Domination sur le segment $[a, b]$. Soit $x \in [a, b]$.
  Alors, pour $0 < t \leq 1$, comme $x - 1 \geq a - 1$, $t^{x-1} \leq t^{a-1}$ d'où, pour $t \in]0, 1]$,
  $$\left| \frac{\partial^k}{\partial x^k} f(x, t) \right| \leq |\ln(t)|^k t^{a-1} e^{-t}$$
  et d'après ce qui précède $t \mapsto |\ln(t)|^k t^{a-1} e^{-t}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$.
  D'autre part, pour $1 \leq t$, comme $x - 1 \leq b - 1$, $t^{x-1} \leq t^{b-1}$ d'où, pour $t \in [1, +\infty[$,
  $$\left| \frac{\partial^k}{\partial x^k} f(x, t) \right| \leq |\ln(t)|^k t^{b-1} e^{-t}$$
  et d'après ce qui précède $t \mapsto |\ln(t)|^k t^{b-1} e^{-t}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$.
  Ainsi, la fonction
  $$g : t \mapsto |\ln(t)|^k t^{a-1} e^{-t} + |\ln(t)|^k t^{b-1} e^{-t}$$
  est intégrable sur $]0, +\infty[$ comme somme de fonctions intégrables sur $]0, +\infty[$ et on a, pour tout $t \in]0, +\infty[$:
  $$\left| \frac{\partial^k}{\partial x^k} f(x, t) \right| \leq g(t).$$

Par suite, d'après le théorème de dérivation des intégrales à paramètre, Γ est de classe C^k sur tout segment $[a, b]$ de $\mathbb{R}_+^*$ et donc Γ est de classe C^k sur $\mathbb{R}_+^*$.
Ceci étant vrai pour tout $k \in \mathbb{N}$, Γ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$ et on a, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$:
$$\Gamma^{(k)}(x) = \int_0^{+\infty} (\ln t)^k t^{x-1} e^{-t}.$$