Chapitre XII

Équations différentielles linéaires

Table des matières

Dans ce chapitre, le corps $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et I désigne un intervalle non vide de $\mathbb{R}$.

Partie A

Équations différentielles linéaires d'ordre 1

Dans cette partie E désigne un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ de dimension finie.

1. Définitions

Définition 1. *Équation différentielle linéaire d'ordre* 1

Soit $a : I \to \mathcal{L}(E)$ et $b : I \to E$ des applications continues.

- On appelle **équation différentielle linéaire d'ordre** 1 une équation (E) de la forme :

$$x' = a(t)(x) + b(t). \qquad (E)$$

  où l'inconnue x est une fonction dérivable de I dans E.
- Une fonction $f : I \to E$ est une **solution** de E si, pour tout $t \in I$,

$$f'(t) = a(t)(f(t)) + b(t).$$

- On appelle **équation homogène** associée à (E), l'équation différentielle (E_h) linéaire d'ordre 1 :

$$x' = a(t)(x). \qquad (E_h)$$

Définition 2. *Traduction matricielle*

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $A : I \to M_n(\mathbb{K})$ et $B : I \to M_{n,1}(\mathbb{K})$.
On appelle **système différentielle linéaire d'ordre** 1 une équation différentielle (S) linéaire d'ordre 1 de la forme :

$$X' = A(t)X + B(t). \qquad (S)$$

où l'inconnue X est une fonction dérivable de I dans $M_{n,1}(\mathbb{K})$.

Question 1.

Justifier la terminologie "système linéaire" employée dans la définition précédente.

Si, pour $t \in I$, on note $A(t) = (a_{ij}(t))_{\substack{1\le i\le n\\1\le j\le n}}$, $B(t) = (b_i(t))_{1\le j\le n}$ et $X(t) = (x_i(t))_{1\le j\le n}$, l'équation (S) est équivalente au système :

$$(S)\begin{cases} x_1' &= & a_{11}(t)x_1 &+ & \dots &+ & a_{1n}(t)x_n &+ & b_1(t) \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ x_1' &= & a_{n1}(t)x_1 &+ & \dots &+ & a_{nn}(t)x_n &+ & b_n(t) \end{cases}$$

Remarque 1. *Traduction matricielle*

Ainsi, étant donnée une base $\mathcal{B}$ de E, une équation différentielle $x' = a(t)(x) + b(t)$ linéaire d'ordre 1 est équivalente au système linéaire $X' = A(t)X + B(t)$ où :

— $A(t) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(a(t))$ et $B(t) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(B(t))$;

— l'inconnue $X(t)$ est obtenue de même par $X(t) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x(t))$.

2. Structure de l'ensemble des solutions

Proposition 1.

Soit $(E) : x' = a(t)(x) + b(t)$ une équation différentielle linéaire d'ordre 1. L'application $x \mapsto \{x'(t) - a(t)(x(t))\}$ est une application linéaire de $C^1(I, E)$ dans $C(I, E)$.

Proposition 2.

Soit (E) une équation différentielle linéaire d'ordre 1.

L'ensemble $\mathcal{S}_h$ des solutions de l'équation homogène (E_h) est un sous-espace vectoriel de $C^1(I, E)$.

Proposition 3.

Soit (E) une équation différentielle linéaire d'ordre 1 et $\mathcal{S}_h$ l'ensemble des solutions de (E_h).
Soit f_p une solution de (E). Alors l'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions de (E) s'exprime :

$$\mathcal{S} = f_p + \mathcal{S}_h = \{f_p + f_h \mid f_h \in \mathcal{S}_h\}.$$

Proposition 4. *Superposition*

Soit $(E) : x' = a(t)(x) + b(t)$ une équation différentielle linéaire d'ordre 1.
On suppose que $b = \lambda_1 b_1 + \mu_1 b_2$ avec $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}$ et $b_1, b_2 \in C(I, E)$.
Si f_1, f_2 sont des solutions respectives de :

$$(E_1) : x' = a(t)(x) + b_1(t) \quad \text{et} \quad (E_2) : x' = a(t)(x) + b_2(t)$$

alors $f = \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2$ est solution de (E).

3. Problème de Cauchy

Définition 3. *Problème de Cauchy*

Soit $(E) : x' = a(t)(x) + b(t)$ une et t_0. On appelle **problème de Cauchy** la donnée d'une équation différentielle $(E) : x' = a(t)(x) + b(t)$ linéaire d'ordre 1 et d'une **condition initiale** $x(t_0) = x_0$ où $t_0 \in I$ et $x_0 \in E$.
Autrement dit, un problème de Cauchy est un système d'inconnue $x : I \to E$ de la forme :

$$\begin{cases} (E) : & x' = a(t)(x) + b(t) \\ (\text{C.I.}) & x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

Remarque 2.

Résoudre un problème de Cauchy revient donc à déterminer toutes les solutions f de $(E) : x' = a(t)(x) + b(t)$ qui vérifient $f(t_0) = x_0$.

Théorème 1. *Théorème de Cauchy linéaire*

Soit $(E) : x' = a(t)(x) + b(t)$ une équation différentielle linéaire d'ordre 1.
Pour tout $(t_0, x_0) \in I \times E$, il existe **une unique solution** f au problème de Cauchy :

$$\begin{cases} (E) : & x' = a(t)(x) + b(t) \\ (\text{C.I.}) & x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

Lemme 1.

Soit $(E) : x' = a(t)(x) + b(t)$ une équation différentielle linéaire d'ordre 1, $t_0 \in I$ et $\mathcal{S}_h$ l'ensemble des solutions de (E_h).
L'application

$$\mathrm{eval}_{t_0} : \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{S}_h & \to & E \\ f & \mapsto & f(t_0) \end{array} \right.$$

est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

Théorème 2.

Soit $(E) : x' = a(t)(x) + b(t)$ une équation différentielle linéaire d'ordre 1 et $\mathcal{S}_h$ l'ensemble des solutions de (E_h). L'espace vectoriel $\mathcal{S}_h$ est de dimension finie et

$$\dim(\mathcal{S}_h) = \dim(E).$$

Partie B

Résolution d'une équation différentielle linéaire d'ordre 1

1. Équation homogène à coefficients constants

Dans ce paragraphe, on considère un système différentielle homogène de la forme $X' = AX$ où $A \in M_n(\mathbb{K})$ (A ne dépend pas du paramètre t).

a. Solution générale du problème de Cauchy

Lemme 2.

Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$. L'application $\varphi : \mathbb{R} \to M_n(\mathbb{K})$ telle que :

$$\varphi : t \mapsto \exp(tA),$$

est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\varphi'(t) = A\exp(tA).$$

Plus généralement, φ est C^∞ sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a, pour $t \in \mathbb{R}$:

$$\varphi^{(k)}(t) = A^k\exp(tA).$$

Théorème 3.

Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$, $t_0 \in \mathbb{R}$ et $X_0 \in M_{n,1}(\mathbb{K})$. L'unique solution du problème de Cauchy

$$\begin{cases} (E_h) : & X' = AX \\ (\text{C.I.}) & X(t_0) = X_0 \end{cases}$$

est donnée par :

$$f : t \mapsto \exp\left((t - t_0)A\right) X_0.$$

b. Résolution pratique de l'équation homogène

Considérons un système différentiel homogène $(E_h) : X' = AX$ à coefficients constants dans $M_n(\mathbb{R})$.

Dans la pratique, le calcul d'une exponentielle de matrice n'est pas aisé. Il en est donc de même pour le calcul explicite des solutions d'un système différentiel homogène d'ordre A. On peut toutefois distinguer des cas où on dispose de méthodes pour déterminer explicitement les solutions :

1er cas : A est diagonalisable dans $\mathbb{R}$.

- On détermine les valeurs propres $\lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbb{R}$ (pas forcément deux à deux différentes) et $(V_1, ...V_n)$ une base de vecteurs propres A avec V_i associé à λ_i. On note P la matrice des vecteurs propres de A et $D = P^{-1}AP$.
- Le système $X' = AX$ est équivalent au système $Y' = DY$ où $Y = PX$.
- On résout le système diagonale $Y' = DY$ et en utilisant la relation $Y = PX$ et on montre ainsi que la famille $(f_1, ..., f_n)$ de fonctions de $\mathbb{R}$ dans $M_{n,1}(\mathbb{R})$ telles que :

$$f_i : t \mapsto e^{\lambda_i t} V_i$$

forme une base de l'espace $\mathcal{S}_h$ des solutions de (E_h).

Exercice 1.

Résoudre le système différentiel $X' = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} X$.

Correction.

La matrice A est symétrique réelle donc diagonalisable. Les valeurs propres de A sont 1 et 4 avec $m(1) = 2$ et $m(4) = 1$. De plus, (V_1, V_2, V_3) est une base de vecteurs propres avec V_1, V_2 associé à 1 et V_3 associé à 4 où :

$$V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad V_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad V_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Par suite, $A = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} P^{-1}$ où $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. Ainsi, $X' = AX$ est équivalent à $Y' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} Y$ avec $Y = PX$. On a donc le système diagonal :

$$\begin{cases} y_1' & = & y_1 & & \\ y_2' & = & & y_2 & \\ y_3' & = & & & 4y_3' \end{cases}$$

D'où :

$$\begin{cases} y_1 = & C_1 e^t \\ y_2 = & C_2 e^t \\ y_3 = & C_3 e^{4t} \end{cases}$$

De plus, $X = PY$, donc :

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 e^t \\ C_2 e^t \\ C_3 e^{4t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 e^t + C_3 e^{4t} \\ C_2 e^t + C_3 e^{4t} \\ -C_2 e^t - C_2 e^t C_3 e^{4t} \end{pmatrix}$$

Autrement dit, comme d'après le théorème de Cauchy-Lipschitz, $\mathcal{S}_h$ est de dimension 3 et que V_1, V_2, V_3 sont linéairement indépendant, la famille (f_1, f_2, f_3) est une base de $\mathcal{S}_h$ où :

$$f_1 : t \mapsto e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \; ; \quad f_2 : t \mapsto e^t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \; ; \quad f_2 : t \mapsto e^{4t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

2eme cas : A est diagonalisable dans $\mathbb{C}$ mais pas dans $\mathbb{R}$.

- On procède de la même façon que pour A diagonalisable dans $\mathbb{R}$ mais les vecteurs de la famille $(f_1, ..., f_n)$ ne sont pas tous réels. On doit donc déterminer une famille $(g_1, ..., g_n)$ de fonctions à valeurs réelles qui forment une base de $\mathcal{S}_h$.
- Considérons une valeur propre complexe $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ et V un vecteur propre associé. Alors, comme A est à coefficients réels, $\bar{\lambda}$ est également valeur propre et $\bar{V}$ est vecteur propre associé à $\bar{V}$.
  Ainsi, pour $f : t \mapsto e^{\lambda t} V$, $(f, \bar{f})$ est un couple de solution de $X' = AX$ vu comme une équation complexe.
  On pose alors :
  $$g_1 = \frac{1}{2}(f + \bar{f}) = \mathrm{Re}(f) \text{ et } g_2 = \frac{1}{2i}(f - \bar{f}) = \mathrm{Im}(f).$$
  Alors, (g_1, g_2) est une famille libre de solutions à valeurs réelles de $X' = AX$.
- On procède ainsi pour toutes les couples $(\lambda, \bar{\lambda})$ de valeurs propres complexes et on forme, en regroupant avec les vecteurs f_i associés aux valeurs propres réelles, une famille de n vecteurs réels solutions de $X' = AX$ et ainsi base de $\mathcal{S}_h$ (puisqu'il est de dimension n).

Exercice 2.

Résoudre le système différentiel $X' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} X$.

Correction.

La polynôme caractéristique de A est $X^3 - X^2 + X + 1 = (X-1)(X-i)(X+i)$ qui est scindé à racines simples (dans $\mathbb{C}$) donc A est diagonalisable dans $\mathbb{C}$ - mais pas dans $\mathbb{R}$ puisque X^2+1 est un facteur irréductible dans $\mathbb{R}$ du polynôme caractéristique. De plus, (V_1, V_2, V_3) est une base de vecteurs propres avec V_1 associé à 1, V associé à i et $\bar{V}$ associé à $-i = \bar{i}$ où :

$$V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad V = \begin{pmatrix} 1 \\ 1-i \\ 0 \end{pmatrix}$$

Par suite, $A = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & -i \end{pmatrix} P^{-1}$ où $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 1-i & 1+i \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Ainsi, $X' = AX$ est équivalent à $Y' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & -i \end{pmatrix} Y$ avec $Y = PX$. On a donc le système diagonal :

$$\begin{cases} y_1' & = & y_1 \\ y_2' & = & & iy_2 \\ y_3' & = & & & -iy_3' \end{cases}$$

D'où :

$$Y_1(t) = e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad Y_2(t) = e^{it} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad Y_3(t) = e^{-it} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

Ainsi, en utilisant $X = PY$ on obtient la famille $(f_1, f, \bar{f})$ de solutions de l'équation "complexe" $X' = AX$ où

$$f_1 : t \mapsto e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}; \quad f : t \mapsto e^{it} \begin{pmatrix} 1 \\ 1-i \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, on considère :

$$g_1 : t \mapsto \frac{1}{2}(f + \bar{f}) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \cos(t) - \sin(t) \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } g_2 : t \mapsto \frac{1}{2}(f - \bar{f}) = \begin{pmatrix} \sin(t) \\ \cos(t) + \sin(t) \\ 0 \end{pmatrix}$$

Par suite, (f_1, g_1, g_2) est une base de $\mathcal{S}_h$.

3eme cas : A est trigonalisable.

- On trigonalise A sous la forme $A = PTP^{-1}$.
- On résout le système $Y' = TY$ où $X = PY$. Ce système est triangulaire supérieur : on le résout en remontant ligne par ligne les équations.
- On récupère les solutions en utilisant $X = PY$ et on procède de la même façon que dans la méthode précédente si certaines valeurs propres sont complexes.

Exercice 3.

Résoudre le système différentiel $X' = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} X$.

2. Recherche d'une solution particulière

On considère un système différentiel $(E) : X' = A(t)X + B(t)$. Dans ce paragraphe, on s'intéresse à la recherche effective d'une solution f_p de cette équation.

Méthode de la variation de la constante

- On détermine une base $(f_1, ..., f_n)$ de solutions de l'équation homogène (E_h) : $X' = A(t)X$. On note alors, pour $t \in I$:

$$f_p(t) = C_1(t)f_1(t) + \ldots + C_n(t)f_n(t).$$

où $C_1, ..., C_n$ sont des fonctions dérivables de I dans $\mathbb{K}$.
- Après avoir calculé f_p', on reporte f_p dans l'équation (E) et, en remarquant que, pour tout i, $f_i \in \mathcal{S}_h$, on obtient :

f_p est solution de (E) si, et seulement si, $C_1'(t)f_1(t) + \ldots + C_n'(t)f_n(t) = B(t)$.

bu On résout alors le système précédent afin de déterminer les C_i' puis les C_i par primitivation.

Exercice 4.

Résoudre les systèmes différentiels :

$$X' = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} e^{-t} \\ 0 \end{pmatrix} \qquad X' = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} X + e^t \begin{pmatrix} (t+1)^3 \\ t^2 \end{pmatrix}$$

Partie C

Équations différentielles linéaires scalaires d'ordre supérieur

1. Définitions

Définition 4.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $(a_i)_{0 \leq i \leq n}$ une famille d'applications continues de I dans $\mathbb{K}$ et $b : I \to \mathbb{K}$ une application continue.
On appelle **équation différentielle linéaire scalaire d'ordre** n, une équation de la forme :

$$y^{(n)} + a_{n-1}(t)y^{(n-1)} + \ldots + a_1(t)y' + a_0(t)y = b(t) \qquad (E).$$

On appelle **équation homogène** associée à (E) l'équation :

$$y^{(n)} + a_{n-1}(t)y^{(n-1)} + \ldots + a_1(t)y' + a_0(t)y = 0 \qquad (E_h).$$

Remarque 3.

Si les a_i et b sont de classe C^k sur I et si $f : I \to \mathbb{K}$ est une solution de (E), alors f est de classe C^{n+k} sur I.

Proposition 5. *Traduction matricielle*

Soit $(E) : y^{(n)} + a_{n-1}(t)y^{(n-1)} + \ldots + a_1(t)y' + a_0(t)y = b(t)$ une équation différentielle scalaire d'ordre n.
On considère les applications $A : I \to M_n(\mathbb{K})$ et $B : I \to M_{n,1}(\mathbb{K})$ définies par :

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & \ldots & 0 & 1 \\ -a_0(t) & -a_1(t) & \ldots & \ldots & -a_{n-1}(t) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b(t) \end{pmatrix}$$

Alors, une fonction $f : I \to \mathbb{K}$ est solution de (E), si, et seulement si, la fonction de I dans $\mathbb{K}$ telle que pour $t \in I$:

$\varphi(t) = \begin{pmatrix} f(t) \\ f'(t) \\ \vdots \\ f^{(n)}(t) \end{pmatrix}$ est solution du système différentiel linéaire d'ordre 1 donné par $X' = A(t)X + B(t)$.

Remarque 4.

La matrice $A(t)$ est exactement la transposée de la matrice compagnon du polynôme $X^n + a_{n-1}(t)X^{n-1} + \ldots + a_1(t)X + a_0(t)$.

2. Structure de l'ensemble des solutions

On considère (E) : $y^{(n)} + a_{n-1}(t)y^{(n-1)} + \ldots + a_1(t)y' + a_0(t)y = b(t)$ une équation différentielle scalaire d'ordre n.

Proposition 6.

Soit $\mathcal{S}$ l'ensemble des solutions de (E) et $\mathcal{S}_h$ l'ensemble des solutions de (E_h). L'ensemble $\mathcal{S}_h$ est un espace vectoriel et pour f_p une solution particulière de (E), on a :

$$\mathcal{S} = f_p + \mathcal{S}_h = \{f_p + f_h \mid f_h \in \mathcal{S}_h\}.$$

Définition 5. *Problème de Cauchy*

Soit $t_0 \in I$ et $(y_0, \ldots, y_{n-1}) \in \mathbb{K}^n$. On appelle **problème de Cauchy** est un système d'inconnue $y : I \to \mathbb{K}$ de la forme :

$$\begin{cases} (E) : & y^{(n)} + a_{n-1}(t)y^{(n-1)} + \ldots + a_1(t)y' + a_0(t)y = b(t) \\ (\text{C.I.}) & y(t_0) = y_0 \\ & \vdots \\ & y^{(n-1)}(t_0) = y_{n-1} \end{cases}$$

Théorème 4.

Soit $t_0 \in I$ et $(y_0, \ldots, y_{n-1}) \in \mathbb{K}^n$. Il existe une unique solution au problème de Cauchy :

$$\begin{cases} (E) : & y^{(n)} + a_{n-1}(t)y^{(n-1)} + \ldots + a_1(t)y' + a_0(t)y = b(t) \\ (\text{C.I.}) & y(t_0) = y_0 \\ & \vdots \\ & y^{(n-1)}(t_0) = y_{n-1} \end{cases}$$

Lemme 3.

Soit $t_0 \in I$ et $\mathcal{S}_h$ l'ensemble des solutions de (E_h).
L'application

$$\left| \begin{array}{ccc} \mathcal{S}_h & \to & \mathbb{K}^n \\ f & \mapsto & (f(t_0), \ldots, f^{(n-1)}(t_0)) \end{array} \right.$$

est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

Théorème 5.

Soit $(E) : y^{(n)} + a_{n-1}(t)y^{(n-1)} + \ldots + a_1(t)y' + a_0(t)y = b(t)$ une équation différentielle scalaire d'ordre n.

L'espace vectoriel $\mathcal{S}_h$ des solutions de (E_h) est de dimension finie et

$$\dim(\mathcal{S}_h) = n.$$

Partie D

Résolution d'une équation différentielle linéaire scalaire d'ordre 2

Dans cette partie, on considère une équation différentielle linéaire scalaire d'ordre 2 :

$$(E) : \; y'' + a_1(t) + a_0(t) = b(t).$$

On rappelle que (E) peut être mis sous la forme du système différentiel d'ordre 1 suivant :

$$(S_E) : \; X' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -a_0(t) & -a_1(t) \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 0 \\ b(t) \end{pmatrix}$$

1. Le wronskien

Définition 6. *Wronskien*

Soit f, g des solutions de l'équation homogène (E_h).
On appelle **wronskien** du couple (f, g) l'application de I dans $\mathbb{K}$ définie, pour tout $t \in I$ par :

$$W_{f,g}(t) = \begin{vmatrix} f(t) & g(t) \\ f'(t) & g'(t) \end{vmatrix} = f(t)g'(t) - f'(t)g(t).$$

Exercice 5.

Soit f, g des solutions de l'équation homogène (E_h). Montrer que le wronskien $W_{f,g}$ est dérivable sur I et que, pour tout $t \in I$,

$$W_{f,g}(t) = f(t)g''(t) - f''(t)g(t).$$

Proposition 7.

Soit f, g des solutions de l'équation homogène (E_h).
Le wronskien $W_{f,g}$ du couple (f, g) est solution de l'équation différentielle :

$$x' = -a_1(t)x.$$

Corollaire 1.

Soit f, g des solutions de l'équation homogène (E_h).
Il existe $C \in \mathbb{K}$ tel que $W_{f,g}(t) = Ce^{-A_1(t)}$ où A_1 est une primitive de a_1.

Proposition 8.

Soit f, g des solutions de l'équation homogène (E_h). Les assertions suivantes sont équivalentes :

i) le couple (f, g) est une base de $\mathcal{S}_h$;

ii) il existe $t \in I$ tel que $W_{f,g}(t) = 0$;

iii) pour tout $t \in I$ tel que $W_{f,g}(t) = 0$.

2. Résolution de l'équation homogène

L'ensemble $\mathcal{S}_h$ des solutions de l'équation homogène $(E_h) : y'' + a_1(t)y' + a_0(t)y = 0$ est de dimension 2. Ainsi, il faut déterminer une base (f_1, f_2) de solutions.

a. Première solution de l'équation homogène

Pour déterminer une première solution de (E_h), il existe de nombreuses techniques empiriques. En voici quelques-unes présentées sur des exemples :

Recherche d'une solution du même type que les coefficients

Lorsque les coefficients sont tous de la même "forme" (**y compris celui devant** y'' **!**) : polynômes, fonctions trigonométriques, exponentielles ; il peut être pertinent de rechercher une solution de (E_h) du même type.

Exemple : Considérons l'équation :

$$(E_h) : \ (t^2 + 2t - 1)y'' + (t^2 - 3)y' - (2t + 2)y = 0.$$

1. Soit $t \mapsto P(t)$ une fonction polynomiale solution de (E_h). Montrer que $\deg(P) = 2$.
2. Déterminer une solution de (E_h).

Exercice 6.

Déterminer une solution de l'équation homogène suivante :

$$(E_h) : \ y'' + \frac{1}{t}y' - \frac{1}{t^2}y = 0.$$

Recherche d'une solution grâce à un Développement en Série Entière

On considère une série entière $\sum a_n t^n$ de rayon de convergence $R > 0$ et on suppose que sa somme f est solution de (E_h).

On obtient alors, en reportant f dans (E_h), une relation entre les coefficients a_n qui permettent de déterminer explicitement la fonction f.

Exemple : Considérons l'équation :

$$(E_h) : \ ty'' + 2y' + ty = 0.$$

1. Soit $\sum a_n t^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$ telle que sa somme f est

solution de (E_h). Montrer que :

$$a_1 = 0 \text{ et } (n+1)(n+2)a_{n+1} + a_{n-1} = 0 \quad \text{pour tout } n \geq 1.$$

2. En déduire une solution de (E_h).

Exercice 7.

Déterminer une solution de l'équation homogène suivante :

$$(E_h) : \ 4ty'' + 2y' - y = 0.$$

b. Seconde solution : utilisation du Wronskien

On utilise le wronskien lorsque l'on dispose déjà d'une solution f_1 de (E_h) : $y'' + a_1(t)y' + a_0(t) = 0$ afin de déterminer une seconde solution non colinéaire à la première.

Méthode : On suppose connue une solution f_1 de (E_h).

- Soit $f \in \mathcal{S}_h$. Alors W_{f,f_1} est solution d'une équation différentielle d'ordre 1 (à retrouver soi-même à chaque fois). On obtient alors W_{f,f_1} à une constante multiplicative près.
- Sur un intervalle où f_1 ne s'annule pas, on considère la fonction $\dfrac{f}{f_1}$. Alors sa dérivée vérifie :

$$\left(\frac{f}{f_1}\right)' = \frac{W_{f,f_1}}{f_1^2}.$$

  On en déduit alors f puis on détermine une fonction $f_2 \in \mathcal{S}_h$ plus "simple" que f en supprimant ses composantes selon f_1.
- On vérifie que (f_1, f_2) est une famille libre et donc une base de $\mathcal{S}_h$.

Exercice 8.

Résoudre les équations homogènes suivantes :

1. $(E_h) : \ y'' + \dfrac{t^2-3}{t^2+2t-1}y' - \dfrac{2t+2}{t^2+2t-1}y = 0.$
2. $(E_h) : \ y'' + \dfrac{1}{t}y' - \dfrac{1}{t^2}y = 0.$
3. $(E_h) : \ y'' + \dfrac{2}{t}y' + y = 0.$
4. $(E_h) : \ y'' + \dfrac{1}{2t}y' - \dfrac{1}{4t}y = 0.$

3. Résolution de l'équation différentielle : variation des constantes

Dans ce paragraphe, on s'intéresse à la recherche d'une solution particulière f_p de (E) : $y'' + a_1(t)y' + a_0(t)y = b(t)$ afin de finaliser la résolution une fois les solutions de l'équation homogènes obtenues :

Méthode de variations des constantes :
Soit (f_1, f_2) une base de l'équation homogène (E_h).
On pose $f_p : t \mapsto C_1(t)f_1(t) + C_2(t)f_2(t)$ où C_1, C_2 sont des fonctions dérivables. Alors :

La fonction f est solution de (E) si, et seulement si,

$$\begin{cases} C_1'(t)f_1(t) + C_2'(t)f_2(t) = 0 \\ C_1'(t)f_1'(t)' + C_2'(t)f_2'(t) = b(t) \end{cases}$$

On résout alors ce système pour trouver C_1', C_2' puis C_1, C_2 en primitivant.

Exercice 9.

En utilisant la formulation de (E_h) sous forme de système différentiel, montrer l'équivalence énoncée dans la méthode précédente.

Exercice 10.

Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $(E_h): \ y'' + \frac{1}{t}y' - \frac{1}{t^2}y = \frac{4\ln(t)}{t}$.
2. $(E_h): \ y'' + \frac{2}{t}y' + y = t$.

4. Equations différentielles avec coefficient initial

On considère une équation de la forme :

$$a_n(t)y^n + a_{n-1}(t)y^{n-1} + \ldots + a_0(t) = b(t).$$

On supposera pour simplifier que la fonction a_n s'annule en un nombre fini de points.

Méthode de résolution :

- On recherche les zéros de a_n.
- Sur **chacun** des intervalles où a_n ne s'annule pas, on résout l'équation :

$$y^n + \frac{a_{n-1}}{a_n(t)}(t)y^{n-1} + \ldots + \frac{a_0(t)}{a_n(t)} = \frac{b(t)}{a_n(t)}.$$

- On recolle, quand c'est possible, les solutions sur chaque intervalle en s'aidant des propriétés de régularité des solutions.

Exercice 11.

Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations différentielles suivantes :

1. $y' - 2y = t^3$.

2. $t^2y' = y$
3. $(1-t)y' - y = t$

Exercice 12.

Résoudre sur $\mathbb{R}$:

$$(E) : 4ty'' + 2y' - y = 0.$$