Chapitre XIII

Calcul différentiel

Table des matières

Dans tous le chapitre, E, F désignent des espaces vectoriels normés de dimension finie, respectivement p et q. De plus, U, V désignent des ouverts de E et F respectivement.

Partie A
Introduction et rappels

Le but de ce chapitre est de généraliser l'étude des fonctions d'un intervalle $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ aux fonctions d'un ouvert de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}$. On souhaite donner un sens aux concept de dérivabilité, tangente, etc... afin de pouvoir déterminer les extrema de telles fonctions ou tracer leurs graphes par exemple.

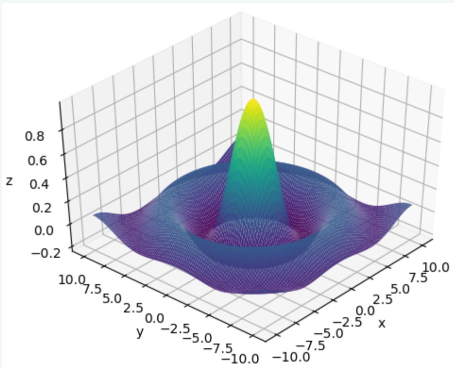
1. Exemple

Exemple 1.

Considérons la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ telle que :

$$f : (x, y) \mapsto \frac{\sin(\sqrt{x^2 + y^2})}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

Son graphe $\mathcal{G} = \{(x, y, f(x, y)) \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$ est une partie de $\mathbb{R}^3$:



2. Continuité

Définition 1. *Rappel : continuité*

Soit $f : U \to F$ une fonction et $a \in U$. On dit que f est continue en a si :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall x \in U, \quad \|x - a\|_E \leq \delta \Rightarrow \|f(x) - f(a)\| \leq \varepsilon.$$

Montrer qu'une fonction est continue en un point.

Soit $f : U \to \mathbb{R}$. Pour montrer que f est continue en a, il suffit très souvent de :

- calculer $|f(x) - f(a)|$;
- Majorer $|f(x) - f(a)|$ par $K\|x-a\|^\alpha$ où $K, \alpha > 0$ et la norme $\|\cdot\|$ sur E est choisie judicieusement en fonction de l'expression de f.
  Remarque : on peut choisir la norme que l'on veut car E est de dimension finie et donc toutes ses normes sont équivalentes.

Exercice 1.

Montrer que les fonctions suivantes de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ sont continues en $(0,0)$:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3y^3}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \qquad g(x,y) = \begin{cases} (x+y)\sin\left(\frac{1}{xy}\right) & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Montrer qu'une fonction est n'est pas continue en un point.

Soit $f : U \to \mathbb{R}$. Pour montrer que f est n'est pas continue en a (étant donnée une valeur pour $f(a)$), il suffit de déterminer une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans E tels que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} a$ et

$$f(u_n) \nrightarrow f(a).$$

Exercice 2.

Montrer que les fonctions suivantes ne sont pas continues en 0_E :

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \qquad g(x,y,z) = \begin{cases} \dfrac{xy+yz}{x^2+2y^2+2z^2} & \text{si } (x,y,z) \neq (0,0,0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Remarque 1.

Pour montrer qu'une fonction de U dans $\mathbb{R}$ n'est pas prolongeable par continuité en a, il suffit donc de trouver deux suites (u_n) et (v_n) qui convergent vers a et telle que $f(u_n)$ et $f(v_n)$ ne convergent pas vers une même limite (ou que l'une des deux ne converge pas du tout !)

Exercice 3.

Déterminer le domaine de définition de la fonction $f : (x,y) \mapsto \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ et montrer qu'elle n'est pas prolongeable par continuité en $(0,0)$.

Partie B

Dérivées partielles

1. Dérivée suivant un vecteur

Définition 2.

Soit $f : U \to F$ une fonction, $a \in U$ et $u \in E$. On dit que f est **dérivable en** a **suivant** u si la fonction $h \mapsto \frac{1}{h}\left(f(a+hu) - f(a)\right)$ admet une limite suivante en 0. Dans ce cas, on note :

$$D_u f(a) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(f(a+hu) - f(a)\right),$$

et $D_u f(a)$ est appelée la dérivée de f en a selon u.

Exemple 2.

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ telle que $f : (x, y) \mapsto x^2 + 5xy^3$. Alors

$$D_{(1,1)} f(x_0, y_0) = 3x_0^2 + 5(x_0 + y_0)$$

Exercice 4.

Soit $f : M_n(\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R})$ tel que $f(M) = M^2$ et $A, M_0 \in M_n\mathbb{R}$.
Déterminer la dérivée de f en M_0 suivant A.

Définition 3. *Dérivée partielle en un point*

Soit $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_p)$ une base de E, $f : U \to F$ et $a \in U$.
Soit $j \in [\![1,]\!]p$. On dit que f admet une j**-ème dérivée partielle de**f **en** a **dans la base** $\mathcal{B}$ si f admet une dérivée en a suivant e_j. Dans ce cas, on note :

$$\partial_j f(a) \text{ ou } \frac{\partial}{\partial x_j} f(a) = D_{e_j} f(a).$$

Définition 4. *Application dérivée partielle*

Soit $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_p)$ une base de E, $f : U \to F$ et $a \in U$.
Si f admet une dérivée partielle en tout point a de U, alors on appelle j**-ème dérivée partielle**

de f dans la base $\mathcal{B}$ l'application $\dfrac{\partial}{\partial x_j} f$ de U dans F telle que :

$$\frac{\partial}{\partial x_j} f : x \mapsto \frac{\partial}{\partial x_j} f(x).$$

Remarque 2.

Pour $E = \mathbb{R}^3$ par exemple, et $f : (x, y, z) \mapsto f(x, y, z)$ on notera

$$\frac{\partial}{\partial x} f, \quad \frac{\partial}{\partial y} f, \quad \frac{\partial}{\partial z} f$$

les dérivées partielles suivant les vecteurs de la base canonique.

Exemple 3.

Pour $f : (x, y, z) \mapsto (x^2 y, 2z^3 + ye^{2x})$ admet des dérivées partielles en tout point de $\mathbb{R}^2$ et on a :

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x, y, z) = (2xy, 2ye^{2x}), \ \frac{\partial}{\partial y} f(x, y, z) = (x^2, e^{2x}), \ \frac{\partial}{\partial z} f(x, y, z) = (0, 3z^2)$$

Exercice 5.

Calculer les dérivées partielles de $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ suivant les vecteurs de la base canonique où :

$$f(x, y, z, t) = \frac{xy + z}{1 + t^2}$$

Exercice 6.

On considère la fonction $f : (x, y) \mapsto \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x, y) = (0, 0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$. Montrer que f admet des dérivée partielles en $(0, 0)$ suivant la base canonique.

Remarque 3.

Attention ! Contrairement au cas des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, une fonction peut admettre des dérivées partielles en un point mais ne pas être continue en ce point ! (voire la fonction précédente)

2. Matrice jacobienne

Rappel :

Étant donné une fonction $f : U \to F$ et $\mathcal{C} = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_q)$ une base de F, on a la décomposition, pour chaque $x \in U$,

$$f(x) = \sum_{i=1}^{q} f_i(x)\varepsilon_i$$

où les fonctions $f_i : U \to \mathbb{R}$ sont les **applications composantes** de f dans la base $\mathcal{C}$.

Exemple : Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ telle que :

$$f(x, y, z) = (x + y^2, 2xyz).$$

Dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$, les applications composantes de f sont :

$$f_1(x, y, z) = x + y^2 \text{ et } f_2(x, y, z) = 2xyz.$$

Définition 5. *Matrice jacobienne*

Soit $f : U \to F$ une fonction, $\mathcal{B}, \mathcal{C}$ des bases de E, F respectivement et $a \in U$.
On appelle **matrice jacobienne de f en a dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$** la matrice notée $Jf(a) \in M_{q,p}(\mathbb{R})$ telle que :

$$Jf(a) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a)\right)_{\substack{1 \leq i \leq q \\ 1 \leq j \leq p}} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \dots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_p}(a) \\ \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial f_q}{\partial x_1}(a) & \dots & \dfrac{\partial f_q}{\partial x_p}(a) \end{pmatrix}.$$

Exemple 4.

(Application de passage de coordonnées polaires en coordonnées cartésiennes) L'application $\varphi : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ définie, pour $(r, \theta) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$, par :

$$\varphi(r, \theta) = (r\cos(\theta), r\sin(\theta)),$$

admet pour matrice jacobienne en (r, θ) dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$:

$$J\varphi(r, \theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -r\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & r\cos(\theta) \end{pmatrix}$$

Exercice 7.

Calculer la matrice jacobienne dans les bases canoniques :

1. $f : (x, y) \mapsto (x + y, x^2y)$ en (x, y) puis en $(0, 0)$;
2. $g : (x, y, z) \mapsto \left(\dfrac{\cos(xy)}{1 + z^2}, z^3e^{xy}\right)$ en (x, y, z) puis en $(-1, \pi, 0)$;
3. $h : (x, y, z, t) \mapsto (xy, yz, zt, tx)$ en (x, y, z, t) puis en $(1, 1, 1, 1)$.

Exercice 8.

Donner la matrice jacobienne de l'application S de passage des coordonnées sphériques vers les coordonnées cartésiennes dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ au point (r, θ, φ)

Partie C
Différentiabilité

1. Différentielle d'une application

a. Définitions

Définition 6. *Différentiabilité locale*

Soit $f : U \to F$ et $a \in U$.
On dit que f est **différentiable en** a, s'il existe $\ell \in \mathcal{L}(E, F)$ telle que :

$$f(a+h) = f(a) + \ell(h) + o(\|h\|) \text{ quand } \|h\| \to 0.$$

Dans ce cas, on dira également que f **admet un développement limité à l'ordre** 1 **en** a.

Proposition 1.

Soit $f : U \to F$ et $a \in U$. Si f est différentiable en a, alors f est continue en a.

Lemme 1.

Soit $f : U \to F$ et $a \in U$. Si f est différentiable en a, alors il existe une **unique** application $\ell \in \mathcal{L}(E, F)$ telle que :

$$f(a+h) = f(a) + \ell(h) + o(\|h\|) \text{ quand } \|h\| \to 0.$$

Le lemme précédent justifie la définition suivante :

Définition 7. *différentielle en un point*

Soit $f : U \to F$ et $a \in U$. Si f est différentiable en a, on appelle **différentielle de** f **en** a et on note $df(a)$ l'unique application linéaire telle que :

$$f(a+h) = f(a) + df(a)(h) + o(\|h\|) \text{ quand } \|h\| \to 0.$$

Exercice 9.

Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et $f : I \to F$. Caractériser la différentiabilité de f en a en terme de dérivabilité en a et donner dans ce cas une expression de $df(a)$.

Définition 8. *Différentiabilité globale*

Soit $f : U \to F$. On dit que f est **différentiable sur** U si f est différentiable en a pour tout $a \in U$. Dans ce cas, appelle **différentielle de** f **sur** U et on note df l'application de U dans $\mathcal{L}(E, F)$ telle que :

$$df : x \mapsto df(x)$$

Définition 9. *Fonction de classe C^1*

Soit $f : U \to F$. On dit que f est de **classe** C^1 **sur** U si f est différentiable sur U et df est continue sur U.

b. Exemples

Exemple 5.

Soit $f : U \to F$.

— Si f est constante en $c \in F$, alors f est de classe C^1 sur U et $df = \mathbf{0}$.

— Si $f \in \mathcal{L}(E, F)$, alors f est de classe C^1 sur E et, pour tout $a \in E$, $df(a) = f$.

Méthode : calculer une différentielle.
Pour montrer qu'une fonction $f : U \to F$ est différentiable en $a \in U$ et calculer $df(a)$ avec la définition :

- on calcule $f(a + h) - f(a)$;
- on "récupère" de ce calcul un partie $u(h)$ qui dépend linéairement de h ;
- on montre que $f(a + h) - f(a) - u(h) = o(\|h\|)$.

Exercice 10.

Soit $f : M_p(\mathbb{R}) \to M_p(\mathbb{R})$ telle que $f : M \mapsto M^2$. Montrer que f est différentiable sur $M_p(\mathbb{R})$ et calculer sa différentielle.

Exercice 11.

On suppose que E est une espace euclidien. Soit $f : x \mapsto \|x\|^2$.

1. Montrer que f est différentiable sur E et déterminer sa différentielle.
2. En déduire que f est de classe C^1 sur E.

Proposition 2. *Différentielle d'une application bilinéaire*

Soit $B : E_1 \times E_2 \to F$ une application bilinéaire. Alors B est différentiable sur $E_1 \times E_2$ et on a, pour tout $(x, y) \in E_1 \times E_2$:

$$dB(x, y) : (h, k) \mapsto B(x, k) + B(h, y).$$

2. Différentielle et dérivée partielles

Proposition 3. *Différentielle et dérivée suivant un vecteur*

Soit $f : U \to F$ et $a \in U$. Si f est différentiable en a, alors f admet une dérivée en a selon tout vecteur de h et on a :

$$D_h f(a) = df(a)(h).$$

Proposition 4. *Lien entre différentielle et dérivées partielles*

Soit $f : U \to F$, $a \in U$ et $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_p)$ une base de E.
Si f est différentiable en a, alors, pour tout $h = \sum_{j=1}^{p} h_j e_j \in E$, on a :

$$df(a)(h) = \sum_{j=1}^{p} h_j \left(\frac{\partial f}{\partial x_j}(a) \right).$$

Corollaire 1. *Lien entre différentielle et dérivées partielles*

Soit $f : U \to F$, $a \in U$ et $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_p), \mathcal{C} = (\varepsilon_1, ..., \varepsilon_q)$ des bases de E et F respectivement.
Si f est différentiable en a, alors :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(df(a)) = Jf(a).$$

où $Jf(a)$ est la matrice jacobienne de f en a dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$

3. Opérations sur les applications différentiables

Proposition 5. *Linéarité*

Soit $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $f, g : U \to F$ et $a \in U$.

— Si f et g sont différentiable en a, alors $\lambda f + \mu g$ est différentiable en a et on a :

$$d(\lambda f + \mu g)(a) = df(a) + dg(a).$$

— L'ensemble des applications différentiables en a, (resp. sur U) est une espace vectoriel.

— L'ensemble $C^1(U, F)$ est un espace vectoriel.

Proposition 6. *Produit d'applications différentiables à valeurs réelles*

Soit $f, g : U \to \mathbb{R}$ et $a \in U$.
Si f et g sont différentiables en a, alors fg est différentiable en a et on a :

$$d(fg)(a) = g(a)df(a) + f(a)dg(a).$$

Question 1.

De quelle structure peut-on munir l'ensemble $C^1(U, \mathbb{R})$?

Proposition 7. *Applications polynomiales*

Les applications polynomiales sur E sont de classe C^1 sur E.

Exercice 12.

Justifier que les applications suivantes sont différentiables sur E et déterminer leurs différentielles.

1. $f : (x, y) \mapsto (x^2 + y)^2$ et $E = \mathbb{R}^2$.
2. $g : (x, y, z) \mapsto x^3 + y^3 + z^3 + xyz$ et $E = \mathbb{R}^3$

Proposition 8. *Composition d'applications différentiables*

Soit $f : U \to F$, $g : V \to G$ telles que $f(U) \subset V$ et $a \in U$.
Si f est différentiable en a et g est différentiable en $f(a)$, alors $g \circ f$ est différentiable en a et on a :

$$d(g \circ f)(a) = dg(f(a)) \circ df(a).$$

De plus, si f et g sont de classe C^1, alors $g \circ f$ l'est aussi.

Corollaire 2. *Jacobienne d'une composée*

Soit $f : U \to F$, $g : V \to G$ telles que $f(U) \subset V$, $a \in U$ et $\mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{D}$ des bases de E, F, G respectivement.
Si f est différentiable en a et g est différentiable en $f(a)$, alors :

$$J(g \circ f)(a) = Jg(f(a)) \times Jf(a).$$

Corollaire 3. *Cas $E = \mathbb{R}$*

Si $E = \mathbb{R}$, f est dérivable en a et g est différentiable en $f(a)$, alors $g \circ f$ est différentiable en a

et on a :

$$(g \circ f)'(a) = dg(f(a))f'(a).$$

Proposition 9. *Différentielle d'une inverse*

Soit $f : U \to \mathbb{R}$ telle que pour tout $x \in U$, $f(x) \neq 0$ et $a \in U$.

— Si f est différentiable en a, alors $\frac{1}{f}$ est différentiable en a et

$$d\left(\frac{1}{f}\right)(a) = -\frac{1}{f^2(a)} df(a).$$

— Si f est C^1 sur U, alors $\frac{1}{f}$ est C^1 sur U.

Exercice 13.

Justifier que $f : (x, y) \mapsto \dfrac{x}{x^2 + y^2}$ est C^1 sur $U = R^2 \setminus \{(0, 0)\}$ et déterminer sa différentielle sur U. Est-elle différentiable en $(0, 0)$?

4. Fonctions de classe C^1 et dérivées partielles

Théorème 1. *Théorème fondamental*

Soit $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_p)$ une base de E et $f : U \to F$. On a l'équivalence suivante :

i) la fonction f est de classe C^1 sur U.

ii) les dérivées partielles $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}$ sont définies et continues sur U.

Exercice 14.

Montrer que la fonction $f : (x, y) \mapsto \dfrac{x^4 + y^4}{x^2 + y^2}$ admet un prolongement C^1 sur $\mathbb{R}^2$.

Partie D

Fonctions numériques

Dans cette partie E désigne un espace euclidien et on note $(\cdot|\cdot)$ son produit scalaire.

1. Gradient

a. Définition et première propriétés

Lemme 2.

Soit $f : U \to \mathbb{R}$ et $a \in U$. Si f est différentiable en a, il existe une unique vecteur $u \in E$ tel que, pour tout $h \in E$:

$$df(a)(h) = (u|h).$$

Définition 10. *Gradient d'une application numérique*

Soit $f : U \to \mathbb{R}$ et $a \in U$. Si f est différentiable en a, on appelle **gradient de f en a** et on note $\nabla f(a)$ l'unique vecteur de E tel que, pour tout $h \in E$:

$$df(a)(h) = (\nabla f(a)|h).$$

Proposition 10.

Soit $f : U \to \mathbb{R}$. Si f est de classe C^1 sur U, alors $\nabla f : x \mapsto \nabla f(x)$ est continue sur U.

Proposition 11.

Soit $f : U \to \mathbb{R}$, $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_p)$ une base de E et $a \in U$. Si f est différentiable en a alors :

$$\nabla f(a) = \sum_{j=1}^{p} \frac{\partial f}{\partial x_j}(a) e_j$$

En particulier, si $E = \mathbb{R}^p$ muni de sa base canonique :

$$\nabla f(a) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_p}(a) \right).$$

Exercice 15.

Justifier que $f : (x, y) \to y^2(y^2 - x^4)$ est différentiable sur $\mathbb{R}^2$ et déterminer le gradient de f en tout point de $\mathbb{R}^2$.

b. Opérations et gradient

Proposition 12.

Soit $f, g : U \to \mathbb{R}$. Si f et g sont différentiable sur U alors on a :

— $\nabla(f + g) = \nabla f + \nabla g$;

— $\nabla(fg) = g\nabla f + f\nabla g$;

— pour $\varphi : I \to \mathbb{R}$ dérivable sur I et telle que $f(U) \subset I$,

$$\nabla(\varphi \circ f) = (\varphi' \circ f)\nabla f;$$

— si f ne s'annule pas sur U,

$$\nabla\left(\frac{1}{f}\right) = -\frac{1}{f^2}\nabla f.$$

c. Interprétation géométrique

Proposition 13.

Soit $f : U \to \mathbb{R}$ et $a \in U$. On suppose que f est différentiable en a et que $\nabla f(a) \neq 0$. Alors la fonction $h \mapsto D_h f(a)$ restreinte à la sphère unité de E admet un unique maximum en $h_0 = \dfrac{1}{\|\nabla f(a)\|}\nabla f(a)$.

Démonstration.

On a, pour tout $h \in S_E = \{u \in E \mid \|u\| = 1\}$, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$D_h f(a) = df(a)(h) = (\nabla f(a)|h) \leq \|\nabla f(a)\|.\|h\| = \|\nabla f(a)\|.$$

avec égalité, si, et seulement si, h est colinéaire et de même sens que $\nabla f(a)$

Par suite, $h \mapsto D_h f(a)$ admet un maximum en $h_0 = \dfrac{1}{\|\nabla f(a)\|}\nabla f(a)$. $\square$

2. Points critiques et extrema

Définition 11. *Extremum local*

Soit $f : U \to \mathbb{R}$ et $a \in U$.

On dit que f admet un **minimum local** (resp. un **maximum local** en a s'il existe un voisinage

W de a tel que pour tout $x \in W \cap U$:

$$f(a) \leq f(x) \quad (\text{resp. } f(a) \geq f(x)).$$

Si f admet un minimum ou un maximum local en a, on dit que f admet un **extremum local en** a.

Théorème 2.

Soit $f : U \to \mathbb{R}$ et $a \in U$. On suppose que f est différentiable en a. Si f admet un extremum en a, alors $df(a) = \mathbf{0}$.

Corollaire 4.

Soit $f : U \to \mathbb{R}$ et $a \in U$. On suppose que f est différentiable en a. Si f admet un extremum en a, alors $\nabla f = 0_E$.

Définition 12. *Point critique*

Soit $f : U \to \mathbb{R}$ et $a \in U$. On dit que a est un **point critique** de f si f est différentiable en a et que $df(a) = \mathbf{0}$.

Exemple 6.

La fonction $f : (x, y) \mapsto x^4 + y^4 - x^2 + y^2$ admet des extrema locaux en $(-\frac{1}{2}, 0)$ et en $(\frac{1}{2}, 0)$ mais pas en $(0, 0)$.

Remarque 4.

Comme le montre l'exemple précédent, la réciproque du Théorème 2 est fausse ! Une fonction qui admet un point critique n'admet pas forcément d'extremum en ce point.

Exercice 16.

Étudier les extrema de :

1. $f : (x, y) \mapsto y^2(y^2 - x^4)$ sur $\mathbb{R}^2$.
2. $g : (x, y) \mapsto y^2 - x^2 + \dfrac{x^4}{2}$ sur $\mathbb{R}^2$.

Partie E

Dérivées partielles d'ordre supérieur

1. Dérivées partielles successives

Définition 13.

Soit $f : U \to F$, $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_p)$ une base de E, $a \in U$ et $j_1, ..., j_k \in [\![1, p]\!]$.
Sous réserve d'existence, on appelle **dérivée partielle partielle de f d'ordre k selon les indices** $(j_1, ..., j_k)$ le vecteur $D_{j_1}(D_{j_2}(...(D_{j_k}f(a))...))$ et on note :

$$\frac{\partial^k f}{\partial x_{j_1} ... \partial x_{j_k}} = D_{j_1}(D_{j_2}(...(D_{j_k}f(a))...)).$$

Exercice 17.

Calculer les dérivées secondes dans la base canonique de $f : (x, y) \mapsto (x^2 y, e^{xy+1})$.

2. Fonction de classes C^k

Définition 14.

Soit $f : U \to F$. On dit que f est de **classe C^k sur U** si les dérivées partielles de f d'ordre k existent et sont continues sur U.
Si f est de classe C^k sur U pour tout $k \in \mathbb{N}$, alors on dit que f est de **classe C^∞ sur U**.

3. Théorème de Schwarz

Théorème 3. *Théorème de Schwarz*

Soit $f : U \to F$ de classe C^2 sur U et $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_p)$ une base de E. Pour tout $i, j \in [\![1, p]\!]$, on a :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}.$$

Exercice 18.

Déterminer s'il existe une fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathbb{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ telle que $V = \nabla f$; et dans ce cas, déterminer f :

1. $V : (x,t) \mapsto (xt^2, -xt)$
2. $V : (x,t) \mapsto (2xt, x^2 + t)$.