Devoir de Rentrée

Exercice 1.

Soit f l'application linéaire de $\mathbb{R}^4$ dans lui-même défini par :

$$f(x, y, z, t) = (x - y + z, y + z + t, 0, x + y + 3z + 2t).$$

1. Déterminer les images par f des vecteurs de la base canonique (e_1, e_2, e_3, e_4) de $\mathbb{R}^4$.
2. Écrire la matrice A représentant l'endomorphisme f dans cette base.
3. Montrer que $f(e_3)$ et $f(e_4)$ sont combinaisons linéaires de $f(e_1)$ et $f(e_2)$.
4. En déduire la dimension de $\mathrm{Im}(f)$ et une base de $\mathrm{Im}(f)$.
5. Quelle est la dimension du noyau de f ?
   Montrer que la famille de vecteurs (u, v) avec $u = (-2, -1, 1, 0)$ et $v = (-1, -1, 0, 1)$ forme une base de $\mathrm{Ker}(f)$.

Exercice 2.

Un garagiste dispose de deux voitures de location. Chacune est utilisable en moyenne 4 jours sur 5. Il loue les voitures avec une marge brute de 300 euros par jour et par voiture. On considère X la variable aléatoire égale au nombre de clients se présentant chaque jour pour louer une voiture. On suppose que $X(\Omega) = \{0, 1, 2, 3\}$ avec

$$P(X = 0) = 0,1 \quad P(X = 1) = 0,3 \quad P(X = 2) = 0,4 \quad P(X = 3) = 0,2.$$

1. On note Z le nombre de voitures disponibles par jour. Déterminer la loi de Z. On pourra considérer dans la suite que X et Z sont indépendantes.
2. On note Y la variable aléatoire : "nombre de clients satisfaits par jour". Déterminer la loi de Y.
3. Calculer la marge brute moyenne par jour.

Exercice 3.

Calculer les développements limités suivants :

1. $\dfrac{1}{1-x} - e^x$ à l'ordre 3 en 0

2. $\sqrt{1-x} + \sqrt{1+x}$ à l'ordre 4 en 0

3. $\sin x \cos(2x)$ à l'ordre 6 en 0

4. $\cos(x)\ln(1+x)$ à l'ordre 4 en 0

5. $(x^3+1)\sqrt{1-x}$ à l'ordre 3 en 0

6. $\big(\ln(1+x)\big)^2$ à l'ordre 4 en 0

Exercice 4.

Déterminer les développements limités des fonctions suivantes :

1. $\dfrac{1}{1+x+x^2}$ à l'ordre 4 en 0 **2.** $\tan(x)$ à l'ordre 5 en 0

3. $\dfrac{\sin x - 1}{\cos x + 1}$ à l'ordre 2 en 0 **4.** $\dfrac{\ln(1+x)}{\sin x}$ à l'ordre 3 en 0.

Exercice 5.

Le but de l'exercice est de déterminer tous les couples d'entiers $(m,n) \in \mathbb{N}^2$ tels que $2^m - 3^n = 1$.

1. Déterminer le reste de la division euclidienne de 3^n par 8 (on distinguera les cas n pair et n impair).
2. En déduire que si $(m,n) \in \mathbb{N}^2$ est solution de $2^m - 3^n = 1$, alors $m \leq 2$.
3. Déterminer toutes les solutions de l'équation.

Exercice 6.

Déterminer la nature des séries dont les termes généraux sont les suivants :

1. $u_n = \dfrac{n}{n^2+1}$
2. $u_n = \dfrac{\mathrm{ch}(n)}{\mathrm{ch}(2n)}$
3. $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n^2-1}} - \dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}}$
4. $u_n = e - \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$