Devoir maison n^{o}1

À rendre le 2 Octobre : 3 exercices

Exercice 1.

On définit dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ l'application φ par : $\varphi(A, A') = \operatorname{tr}({}^tAA')$, où $\operatorname{tr}({}^tAA')$ désigne la trace du produit de la matrice ${}^tA$ par la matrice A'.
On admet que φ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

On note $\mathcal{F} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}, \ (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$.

1. Démontrer que $\mathcal{F}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
2. Déterminer une base de $\mathcal{F}^\perp$.
3. Déterminer la projection orthogonale de $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ sur $\mathcal{F}^\perp$.
4. Calculer la distance de J à $\mathcal{F}$.

Exercice 2.

Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ la suite définie par

$$u_n = \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)\left(1 + \frac{2}{n^2}\right) \dots \left(1 + \frac{n-1}{n^2}\right)\left(1 + \frac{n}{n^2}\right).$$

On pose $v_n = \ln(u_n)$.

1. Montrer, pour tout $x \geq 0$, l'inégalité
$$x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1 + x) \leq x.$$
2. Montrer, par récurrence sur $\mathbb{N}^*$, que :
$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$
3. Déduire des deux questions précédentes que
$$\frac{n+1}{2n} - \frac{(n+1)(2n+1)}{12n^3} \leq v_n \leq \frac{n+1}{2n}.$$
4. Montrer que (v_n) converge, et préciser sa limite.
5. Montrer que (u_n) converge, et préciser sa limite.

Exercice 3.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x - x^2$, et (u_n) la suite définie par $u_0 \in]0,1[$ et $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Etudier les variations de f.
2. Montrer que, pour tout n, $0 < u_n < \frac{1}{n+1}$.
3. En déduire que la suite (v_n) définie par $v_n = nu_n$, $n \geq 0$, est croissante.
4. Montrer que la suite (v_n) admet une limite l appartenant à $]0,1]$ (on ne demande pas de calculer l pour le moment).
5. On pose $w_n = n(v_{n+1} - v_n)$. Montrer que (w_n) converge vers $l(1-l)$.
6. Soit (t_n) une autre suite telle qu'il existe $n_0 \geq 1$ vérifiant que, pour $n \geq n_0$, on a
$$t_{n+1} - t_n \geq \frac{a}{n},$$
où $a > 0$. Montrer que $t_{2n} - t_n \geq \frac{a}{2}$ pour $n \geq n_0$, puis que (t_n) est divergente.
7. Montrer que si $l \neq 1$, la suite (v_n) vérifie les mêmes conditions que la suite (t_n) de la question précédente. En déduire la valeur de l.