Devoir surveillé n°2

Durée : 4H.

Aucun document autorisé.
Calculatrice interdite.

Exercice 1.

Soit E un espace vectoriel normé, et A et B deux parties de E. On définit :

$$A+B=\{z\in E \mid \exists x\in A,\ \exists y\in B,\ z=x+y\}.$$

1. Démontrer que si A est ouvert, alors $A+B$ est ouvert.
2. Démontrer que les parties $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid xy=1\}$ et $B=\{0\}\times\mathbb{R}$ sont fermées.
3. Démontrer que $A+B$ n'est pas fermée.

Exercice 2.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée de nombre réels. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on note A_n le sous-ensemble de $\mathbb{R}$:

$$A_n=\{u_p \mid p\geq n\},$$

et on pose :

$$x_n=\inf(A_n) \quad \text{et} \quad y_n=\sup(A_n).$$

1. Pourquoi les suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont-elles bien définies ?
2. Déterminer, pour $n\in\mathbb{N}$, l'ensemble A_n ainsi que les suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans les cas suivants :

   a. $u_n=(-1)^n$ **b.** $u_n=1-\dfrac{1}{n+1}$.
3. Démontrer que (x_n) est croissante, que (y_n) est décroissante. En déduire que ces deux suites sont convergentes. On notera $\alpha=\lim_{n\to+\infty}x_n$ et $\beta=\lim_{n\to+\infty}y_n$.
4. Démontrer que $\alpha\leq\beta$.
5. Démontrer que si $\alpha=\beta$, alors la suite (u_n) converge.
6. Démontrer que si (u_n) admet une sous-suite convergeant vers un réel ℓ, alors $\alpha\leq\ell\leq\beta$.
7. Démontrer que, pour tout $\varepsilon>0$ et pour tout $n\in\mathbb{N}$, il existe $p\geq n$ tel que

   $$y_n-\varepsilon\leq u_p\leq y_n.$$
8. Démontrer que, pour tout $\varepsilon>0$ et pour tout $p_0\in\mathbb{N}$, il existe $p\geq p_0$ tel que

   $$\beta-2\varepsilon\leq u_p\leq\beta+2\varepsilon.$$
9. En déduire qu'il existe une sous-suite de (u_n) qui converge vers β.
10. Quel théorème vient-on de redémontrer ?

Exercice 3.

Le but de l'exercice est de calculer $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2}$ et de donner un développement asymptotique de la somme partielle $S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}$.

1. (a) Soit $\alpha>1$ et $k\geq 2$. Démontrer que
$$\int_k^{k+1}\frac{dt}{t^\alpha}\leq\frac{1}{k^\alpha}\leq\int_{k-1}^{k}\frac{dt}{t^\alpha}.$$
   (b) En déduire que
$$\sum_{k\geq n}\frac{1}{k^\alpha}\sim_{+\infty}\frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}.$$
2. Soit f une fonction de classe C^1 sur $[0,\pi]$. Démontrer que
$$\int_0^\pi f(t)\sin\left(\frac{(2n+1)t}{2}\right)dt\xrightarrow[n\to+\infty]{}0.$$
   Indication : on pourra effectuer une intégration par partie.
3. On pose $A_n(t)=\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos(kt)$. Vérifier que, pour $t\in]0,\pi]$, on a
$$A_n(t)=\frac{\sin\left((2n+1)t/2\right)}{2\sin(t/2)}.$$
   Indication : on rappelle que pour tout $x\in\mathbb{R}$, $\cos(x)=Re(e^{ix})$.
4. Déterminer deux réels a et b tels que, pour tout $n\geq 1$,
$$\int_0^\pi(at^2+bt)\cos(nt)dt=\frac{1}{n^2}.$$
   Vérifier alors que
$$\int_0^\pi(at^2+bt)A_n(t)=S_n-\frac{\pi^2}{6}.$$
5. Déduire des questions précédentes que $S_n\to\frac{\pi^2}{6}$.
6. Déduire des questions précédentes que
$$S_n=\frac{\pi^2}{6}-\frac{1}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Problème 1. *(E3A 2014)*

On désigne par $\mathbb{K}$ le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Soit n un entier naturel non nul et soit $E = \mathbb{K}^n$.

Pour tout endomorphisme u de E, on note $\operatorname{Ker}(u)$ le noyau de u, et $\operatorname{Im}(u)$ l'image de u.

1. Question de cours : Soient u et v deux endomorphismes qui commutent. Démontrer que $\operatorname{Ker}(u)$ et $\operatorname{Im}(u)$ sont stables par v.

Dans la suite de l'exercice, u désigne un endomorphisme de E tel que $u^2 = 0$.

2. Démontrer que $\operatorname{Im}(u)$ est contenu dans $\operatorname{Ker}(u)$.
3. Quelle inégalité obtient-on ainsi sur le rang de u ? On citera précisément le théorème utilisé.
4. On suppose ici que $n = 2$, soit $E = \mathbb{K}^2$. On suppose ici u non nul.
   (a) Démontrer qu'il existe une droite D dans E telle que $\operatorname{Ker}(u) = \operatorname{Im}(u) = D$.
   (b) Soit v un endomorphisme de E tel que $v^2 = 0$ et $u \circ v = v \circ u$.
      i. Démontrer que $v(D) \subset D$.
      ii. Démontrer que $u \circ v = 0$.
   (c) Soient v et w deux endomorphismes de E tels que $v^2 = 0$, $w^2 = 0$, $u \circ v = v \circ u$ et $u \circ w = w \circ u$. Démontrer que $v \circ w = 0$.
5. On revient au cas général. Soit m un entier naturel ≥ 2. Soient $u_1, ..., u_m$ des endomorphismes de E tels que :
$$\forall (i,j) \in \{1,...,m\}^2,\ u_i^2 = 0 \text{ et } u_i \circ u_j = u_j \circ u_i.$$
   On pose $F_1 = \operatorname{Im}(u_1)$ et pour un entier i compris entre 2 et m, $F_i = \operatorname{Im}(u_1 \circ u_2 \circ \cdots \circ u_{i-1} \circ u_i)$.
   (a) Démontrer que, pour tout entier i compris entre 1 et $m-1$, F_i est un sous-espace vectoriel stable par u_{i+1}.
   (b) En déduire que, pour tout entier i compris entre 1 et m, F_i est de dimension au plus $\dfrac{n}{2^i}$.
   (c) Dans le cas où $n < 2^m$, démontrer que l'endomorphisme $u_1 \circ u_2 \circ \cdots \circ u_m = 0$.
6. On suppose $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ dans ce paragraphe. Soit $E = \mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire $< , >$ usuel:
$$< (x_1, ..., x_n), (y_1, ..., y_n) >= \sum_{i=1}^{n} x_i y_i.$$
   Pour toute matrice A, on note $\operatorname{Ker}(A)$ le noyau de A, et $\operatorname{Im}(A)$ l'image de A.

   Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$. On note ${}^tA$ la matrice transposée de A.
   (a) Démontrer que $E = \operatorname{Ker}(A) \oplus \operatorname{Im}({}^tA)$.
   (b) On suppose de plus $A^2 = 0$. Démontrer que $\operatorname{Im}(A + {}^tA) = \operatorname{Im}(A) + \operatorname{Im}({}^tA)$.