Corrigé du devoir surveillé n°2

Exercice 1.

Soit E un espace vectoriel normé, et A et B deux parties de E. On définit :

$$A+B=\{z\in E;\ \exists x\in A,\ \exists y\in B,\ z=x+y\}.$$

1. Démontrer que si A est ouvert, alors $A+B$ est ouvert.
2. Démontrer que les parties $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2;\ xy=1\}$ et $B=\{0\}\times\mathbb{R}$ sont fermées.
3. Démontrer que $A+B$ n'est pas fermée.

Correction.

1. Remarquons que :
$$A+B=\bigcup_{b\in B}A+b.$$
La réunion d'une famille (quelconque) d'ouverts étant un ouvert, il suffit de prouver que $A+\{b\}=$ est ouvert pour chaque b de B. Soit $z\in A+\{b\}$, $z=x+b$ avec $x\in A$. Puisque A est ouvert, il existe $\varepsilon>0$ tel que $B(x,\varepsilon)\subset A$. Mais alors, $B(z,\varepsilon)=B(x+b,\varepsilon)\subset A+b$. En effet, si y est élément de cette boule, $N((y-b)-x)<\varepsilon$, et donc $y-b=a$ avec $a\in B(x,\varepsilon)\subset A$. D'où $y=a+b\in A+\{b\}$.
2. Soit $(u_n)=(x_n,y_n)$ une suite d'éléments de A, convergeant vers $u=(x,y)$. Alors pour tout entier n, on a $x_ny_n=1$ et donc en passant à la limite, $xy=1$ ce qui prouve que $u\in A$. Par la caractérisation séquentielle des fermés, on en déduit que A est fermé. B est lui-aussi fermé, en utilisant une démonstration tout à fait similaire, ou parce que le produit cartésien de deux fermés est un fermé.
3. Considérons la suite $(u_n)=(1/n,1)$. Alors c'est une suite d'éléments de $A+B$ car elle s'écrit $u_n=a_n+b_n$ avec $a_n=(1/n,n)\in A$ et $b_n=(0,1-n)\in B$. Elle converge vers $(0,1)$, qui n'est pas un élément de $A+B$ car tout élément de $A+B$ a sa première coordonnée non nulle.

Exercice 2.

Soit (u_n) une suite bornée de nombre réels. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on note A_n le sous-ensemble de $\mathbb{R}$:

$$A_n=\{u_p\mid p\leq n\},$$

et on pose :

$$x_n=\inf(A_n)\quad\text{ et }\quad y_n=\sup(A_n).$$

1. Pourquoi les suites (x_n) et (y_n) sont-elles bien définies ?
2. Déterminer les suites (x_n) et (y_n) dans les cas suivants :

$$\textbf{a. } u_n=(-1)^n\qquad \textbf{b. } u_n=1-\frac{1}{n+1}.$$

3. Démontrer que (x_n) est croissante, que (y_n) est décroissante. En déduire que ces deux suites sont convergentes. On notera $\alpha = \lim_{n\to+\infty} x_n$ et $\beta = \lim_{n\to+\infty} y_n$.
4. Démontrer que $\alpha \leq \beta$.
5. Démontrer que si $\alpha = \beta$, alors la suite (u_n) converge.
6. Démontrer que si (u_n) admet une sous-suite convergeant vers un réel ℓ, alors $\alpha \leq \ell \leq \beta$.
7. Démontrer que, pour tout $\varepsilon > 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $p \geq n$ tel que
$$y_n - \varepsilon \leq u_p \leq y_n.$$
8. Démontrer que, pour tout $\varepsilon > 0$ et pour tout $p_0 \in \mathbb{N}$, il existe $p \geq p_0$ tel que
$$\beta - 2\varepsilon \leq u_p \leq \beta + 2\varepsilon.$$
9. En déduire qu'il existe une sous-suite de (u_n) qui converge vers β.
10. Quel théorème vient-on de redémontrer ?

Correction.

1. Notons m un minorant de la suite (u_n), M un majorant de cette suite, et pour tout $n \geq 0$, notons
$$A_n = \{u_p;\ p \geq n\}.$$
Alors l'ensemble A_n est minoré par m et majoré par M. En conséquence, il admet une borne inférieure et une borne supérieure.
2. Dans le premier cas, pour tout entier n, on a $A_n = \{-1, 1\}$ et donc $x_n = -1$, $y_n = 1$. Dans le second cas, l'ensemble A_n est minoré par $1 - \frac{1}{n+1}$ (car la suite est croissante), et cet élément appartient à A_n. Donc $x_n = 1 - \frac{1}{n+1}$. L'ensemble A_n est majoré par 1, et de plus, pour tout $\varepsilon > 0$, on peut trouver $p > n$ tel que
$$1 - \varepsilon < 1 - \frac{1}{p+1} \leq 1.$$
Ainsi, y_n, borne supérieure de A_n, est égal à 1.
3. On a $A_{n+1} \subset A_n$, ce qui entraîne automatiquement que $x_{n+1} \geq x_n$ et $y_{n+1} \leq y_n$. De plus, les deux suites sont bornées (minorées, avec les notations précédentes, par m et majorées par M). Ainsi, les deux suites sont convergentes.
4. Pour tout entier n, on a $x_n \leq y_n$, et donc, en passant à la limite, on a $\alpha \leq \beta$.
5. Pour tout entier n, on a $x_n \leq u_n \leq y_n$ car u_n est élément de A_n. Par le théorème des gendarmes, (u_n) converge vers α.
6. Si $(u_{\phi(n)})$ converge vers ℓ, alors puisque pour tout entier n on a
$$x_{\phi(n)} \leq u_{\phi(n)} \leq y_{\phi(n)},$$
on en déduit par passage à la limite des inégalités que
$$\alpha \leq \ell \leq \beta.$$
7. C'est simplement la définition de la borne supérieure d'un ensemble.

8. Puisque (y_n) converge vers β, on peut trouver $n \geq p_0$ tel que
$$\beta - \varepsilon \leq y_n \leq \beta + \varepsilon.$$
D'après la question précédente, on peut trouver $p \geq n \geq p_0$ tel que
$$\beta - 2\varepsilon \leq y_n - \varepsilon \leq u_n \leq y_n \leq \beta + \varepsilon.$$
9. Construisons par récurrence sur k une suite strictement croissante d'entiers (p_k) telle que, pour tout $k \geq 1$, on a
$$\beta - \frac{2}{k} \leq u_{p_k} \leq \beta + \frac{2}{k}.$$
Si ceci est fait, la suite (u_{p_k}) est bien une suite extraite de (u_n) qui converge, par le théorème des gendarmes, vers β. Passons maintenant à la construction. Pour construire p_1, on applique le résultat de la question précédente avec $\varepsilon = 1$ et $p_0 = 0$. Supposons p_{k-1} construit. Alors on construit p_k en appliquant le résultat de la question précédente avec $\varepsilon = \frac{1}{k}$ et $p_0 = p_k + 1$.
10. On vient de redémontrer le théorème de Weierstrass.

Exercice 3.

Le but de l'exercice est de calculer $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ et de donner un développement asymptotique de la somme partielle $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$.

1. (a) Soit $\alpha > 1$ et $k \geq 2$. Démontrer que
$$\int_k^{k+1} \frac{dt}{t^\alpha} \leq \frac{1}{k^\alpha} \leq \int_{k-1}^k \frac{dt}{t^\alpha}.$$
   (b) En déduire que
$$\sum_{k\geq n} \frac{1}{k^\alpha} \sim_{+\infty} \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}.$$
2. Soit f une fonction de classe C^1 sur $[0,\pi]$. Démontrer que
$$\int_0^\pi f(t) \sin\left(\frac{(2n+1)t}{2}\right) dt \longrightarrow_{n\to+\infty} 0.$$
Indication : on pourra effectuer une intégration par partie.
3. On pose $A_n(t) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos(kt)$. Vérifier que, pour $t \in]0,\pi]$, on a
$$A_n(t) = \frac{\sin((2n+1)t/2)}{2\sin(t/2)}.$$
Indication : on rappelle que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\cos(x) = Im(e^{ix})$.
4. Déterminer deux réels a et b tels que, pour tout $n \geq 1$,
$$\int_0^\pi (at^2 + bt)\cos(nt)dt = \frac{1}{n^2}.$$
Vérifier alors que
$$\int_0^\pi (at^2 + bt)A_n(t) = S_n - \frac{\pi^2}{6}.$$

5. Déduire des questions précédentes que $S_n \to \frac{\pi^2}{6}$.
6. Déduire des questions précédentes que

$$S_n = \frac{\pi^2}{6} - \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Correction.

1. (a) On sait que $\frac{1}{k^\alpha} \leq \frac{1}{t^\alpha}$ pour $t \in [k, k+1]$. On intègre cette inégalité entre k et $k+1$ et on trouve la partie gauche de l'inégalité demandée. De même, on sait que $\frac{1}{t^\alpha} \leq \frac{1}{k^\alpha}$ pour $t \in [k-1, k]$, et on intègre cette inégalité.

   (b) On somme ces inégalités pour k allant de n à $+\infty$, et on trouve :

$$\int_n^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha} \leq S_n \leq \int_{n-1}^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha},$$

   soit encore

$$\frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}} \leq S_n \leq \frac{1}{(\alpha-1)(n-1)^{\alpha-1}}.$$

   Puisque

$$\frac{(n-1)^{\alpha-1}}{n^{\alpha-1}} \to 1,$$

   on en déduit le résultat demandé.

2. Une intégration par parties donne

$$\int_0^\pi f(t)\sin\big((2n+1)t/2\big)dt = (-1)^{n+1}\frac{2}{2n+1}f(\pi) + \frac{2}{2n+1}\int_0^\pi f'(t)\cos\big((2n+1)t/2\big)dt.$$

   Or,

$$\left|\int_0^\pi f'(t)\cos\big((2n+1)t/2\big)dt\right| \leq \int_0^\pi |f'(t)|dt,$$

   et donc on a

$$\int_0^\pi f(t)\sin\big((2n+1)t/2\big)dt \to 0.$$

3. C'est un calcul classique. On écrit $\cos(kt) = \Re e(e^{ikt})$ et on utilise la somme d'une série géométrique de raison différente de 1 (puisque $t \in]0, \pi]$). On obtient

$$\begin{aligned} A_n(t) &= \frac{1}{2} + \Re e\left(\frac{e^{it} - e^{i(n+1)t}}{1 - e^{it}}\right) = \frac{1}{2} + 2\Re e\left(e^{i(n+1)t/2}\frac{\sin(nt/2)}{\sin(t/2)}\right) \\ &= \frac{1}{2} + \frac{\sin(nt/2)\cos((n+1)t/2)}{\sin(t/2)}. \end{aligned}$$

   Une petite formule de trigo donne

$$A_n(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sin(t/2)} \times \big(\sin((2n+1)t/2) + \sin(-t/2)\big)$$

   ce qui finalement donne le résultat.

4. On calcule l'intégrale en faisant deux intégrations par parties :

$$\begin{aligned}
\int_0^\pi (at^2+bt)\cos(nt)dt &= \left[(at^2+bt)\frac{\sin(nt)}{n}\right]_0^\pi - \int_0^\pi (2at+b)\frac{\sin(nt)}{n}dt\\
&= 0-\left[(2at+b)\frac{-\cos(nt)}{n^2}\right]_0^\pi - \int_0^\pi 2a\frac{\cos(nt)}{n^2}dt\\
&= \frac{(2a\pi+b)(-1)^n-b}{n^2}.
\end{aligned}$$

Ceci vaudra $1/n^2$ pour $b=-1$ et $a=1/2\pi$. On déduit alors

$$\int_0^\pi (at^2+bt)A_n(t)dt = \frac{1}{2}\int_0^\pi \left(\frac{t^2}{2\pi}-t\right)dt + S_n = S_n - \frac{\pi^2}{6}.$$

5. On a donc prouvé que

$$S_n - \frac{\pi^2}{6} = \int_0^\pi f(t)A_n(t)dt,$$

avec $f(t)=\frac{at^2+bt}{2\sin(t/2)}$. Pour conclure, il s'agit de prouver que f est de classe C^1 en 0. Clairement, f est de classe C^1 sur $]0,\pi]$. Pour prouver que f est dérivable en 0 et que sa dérivée y est continue, on peut appliquer le théorème de prolongement d'une dérivée. On remarque ainsi que, pour $t\in]0,\pi]$,

$$\begin{aligned}
f'(t) &= \frac{2(2at+b)\sin(t/2)-(at^2+bt)\cos(t/2)}{4\sin^2(t/2)}\\
&= \frac{2(2at+b)(t/2+o(t^2))-(at^2+bt)(1-t^2/2+o(t^2))}{t^2+o(t^2)}\\
&= \frac{at^2+o(t^2)}{t^2+o(t^2)} \to a.
\end{aligned}$$

Par le théorème de prolongement d'une dérivée, f est de classe C^1 en 0. On peut alors appliquer le résultat des questions précédentes.

6. On a

$$S_n - \frac{\pi^2}{6} = -\sum_{k\geq n+1}\frac{1}{n^2} \sim_{+\infty} -\frac{1}{n}$$

d'après la première question.

Problème 1. *(E3A 2014)*

On désigne par $\mathbb{K}$ le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Soit n un entier naturel non nul et soit $E = \mathbb{K}^n$.

Pour tout endomorphisme u de E, on note $\operatorname{Ker}(u)$ le noyau de u, et $\operatorname{Im}(u)$ l'image de u.

1. Question de cours : Soient u et v deux endomorphismes qui commutent. Démontrer que $\operatorname{Ker}(u)$ et $\operatorname{Im}(u)$ sont stables par v.

Dans la suite de l'exercice, u désigne un endomorphisme de E tel que $u^2 = 0$.

2. Démontrer que $\operatorname{Im}(u)$ est contenu dans $\operatorname{Ker}(u)$.
3. Quelle inégalité obtient-on ainsi sur le rang de u ? On citera précisément le théorème utilisé.
4. On suppose ici que $n = 2$, soit $E = \mathbb{K}^2$. On suppose ici u non nul.
   (a) Démontrer qu'il existe une droite D dans E telle que $\operatorname{Ker}(u) = \operatorname{Im}(u) = D$.
   (b) Soit v un endomorphisme de E tel que $v^2 = 0$ et $u \circ v = v \circ u$.
      i. Démontrer que $v(D) \subset D$.
      ii. Démontrer que $u \circ v = 0$.
   (c) Soient v et w deux endomorphismes de E tels que $v^2 = 0$, $w^2 = 0$, $u \circ v = v \circ u$ et $u \circ w = w \circ u$. Démontrer que $v \circ w = 0$.
5. On revient au cas général. Soit m un entier naturel ≥ 2. Soient $u_1, ..., u_m$ des endomorphismes de E tels que :
$$\forall (i,j) \in \{1, ..., m\}^2,\ u_i^2 = 0 \text{ et } u_i \circ u_j = u_j \circ u_i.$$
   On pose $F_1 = \operatorname{Im}(u_1)$ et pour un entier i compris entre 2 et m, $F_i = \operatorname{Im}(u_1 \circ u_2 \circ \cdots \circ u_{i-1} \circ u_i)$.
   (a) Démontrer que, pour tout entier i compris entre 1 et $m-1$, F_i est un sous-espace vectoriel stable par u_{i+1}.
   (b) En déduire que, pour tout entier i compris entre 1 et m, F_i est de dimension au plus $\dfrac{n}{2^i}$.
   (c) Dans le cas où $n < 2^m$, démontrer que l'endomorphisme $u_1 \circ u_2 \circ \cdots \circ u_m = 0$.
6. On suppose $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ dans ce paragraphe. Soit $E = \mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire $<\,,\,>$ usuel:
$$< (x_1, ..., x_n), (y_1, ..., y_n) >= \sum_{i=1}^{n} x_i y_i.$$
   Pour toute matrice A, on note $\operatorname{Ker}(A)$ le noyau de A, et $\operatorname{Im}(A)$ l'image de A.

   Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$. On note ${}^tA$ la matrice transposée de A.
   (a) Démontrer que $E = \operatorname{Ker}(A) \oplus \operatorname{Im}({}^tA)$.
   (b) On suppose de plus $A^2 = 0$. Démontrer que $\operatorname{Im}(A + {}^tA) = \operatorname{Im}(A) + \operatorname{Im}({}^tA)$.

Correction.

1) Soit $(u,v) \in \mathcal{L}(E)$ tels que $u \circ v = v \circ u$.
Soit $x \in \ker(u)$. $u(v(x)) = v(u(x)) = v(0) = 0$ donc $v(x) \in \ker(u)$.
$\ker(u)$ est stable par v.

Soit $x \in \mathrm{Im}(u)$. Soit $y \in E$ tel que $x = u(y)$. $v(x) = v(u(y)) = u(v(y))$ donc $v(x) \in \mathrm{Im}(u)$.
$\mathrm{Im}(u)$ est stable par v.

2)Soit $x \in \mathrm{Im}(u)$. Soit $y \in E$ tel que $x = u(y)$. $u(x) = u^2(y) = 0$ donc $x \in \ker(u)$.
$\mathrm{Im}(u) \subset \ker(u)$.

3) On en déduit que $\mathrm{rg}(u) \leq \dim(\ker(u)$. Par le théorème du rang, on obtient $\mathrm{rg}(u) \leq \dfrac{n}{2}$.

2)
a)Si $n = 2$ et $u \neq 0$, (3) conduit à $\mathrm{rg}(u) = 1 = \dim(\ker(u))$.
Alors $D = \ker(u) = \mathrm{Im}(u)$ est une droite
b)
(i) Soit v telle que $u \circ v = v \circ u$ et $v^2 = 0$. Par (1) on sait que $D = \mathrm{Im}(u)$ est stable par v.
(ii) D est donc propre pour v. Or $\mathrm{sp}(v) = \{0\}$.
Donc $v = 0$ ou $D = \ker(v) = \mathrm{Im}(v)$. Dans les deux cas $u \circ v = 0$.
c) De même, on a $w = 0$ ou $D = \ker(w) = \mathrm{Im}(w)$. Dans les deux cas $v \circ w = 0$.
5)
a)Posons, pour $1 \leq i \leq m-1$, $v = u_1 \circ \cdots \circ u_i$. v et u_{i+1} commutent, donc par (1), F_i est stable par u_{i+1}.
b) On effectue une récurrence sur i :
$(H_i)\, \dim(F_i) \leq \dfrac{n}{2^i}$.
(H_1) est obtenu par (3).
Supposons (H_{i_0}) pour $i_0 \geq 1$. Soit $\tilde{u}_{i_0+1}$ le morphisme induit par u_{i_0+1} sur F_{i_0}. $\tilde{u}_{i_0+1}^2 = 0$. En appliquant l'hypothèse de récurrence et le résultat du (3), on déduit $\mathrm{rg}(\tilde{u}_{i_0+1}) \leq \dfrac{n}{2^{i_0+1}}$. Or $\mathrm{Im}(\tilde{u}_{i_0+1}) = F_{i_0+1}$ car les (u_i) commutent. D'où (H_{i_0+1}). Ceci achève la récurrence.
c) Si $n < 2^m$, $\dim F_m < 1$ donc $\dim F_m = 0$. Ainsi $u_1 \circ \cdots \circ u_m = 0$.
6)
a) Par le théorème du rang, $\dim(\ker(A)) + \dim(\mathrm{Im}(^tA)) = n$. De plus si $x \in \ker(A) \cap \mathrm{Im}(^tA)$, $Ax = 0$ et $x = {}^tAy$ donc $A^tAy = 0$ et $\|Ay\| = 0$ donc $x = 0$. Ainsi $E = \ker(A) \oplus \mathrm{Im}(^tA)$.
b)$\mathrm{Im}(A + {}^tA) \subset \mathrm{Im}(A) + \mathrm{Im}(^tA)$. De plus les deux sous-espaces sont de même dimension $2\mathrm{rg}(A)$. Donc $\mathrm{Im}(A + {}^tA) = \mathrm{Im}(A) + \mathrm{Im}(^tA)$.