Corrigé du devoir maison n^{o}1

Exercice 1.

On définit dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ l'application φ par : $\varphi(A, A') = \text{tr}({}^tAA')$, où $\text{tr}({}^tAA')$ désigne la trace du produit de la matrice ${}^tA$ par la matrice A'.
On admet que φ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

On note $\mathcal{F} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix},\ (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$.

1. Démontrer que $\mathcal{F}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
2. Déterminer une base de $\mathcal{F}^\perp$.
3. Déterminer la projection orthogonale de $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ sur $\mathcal{F}^\perp$.
4. Calculer la distance de J à $\mathcal{F}$.

Correction.

1. On a immédiatement $\mathcal{F} = \text{Vect}(\text{I}_2, K)$ avec $K = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.
   On peut donc affirmer que $\mathcal{F}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
   $\mathcal{F} = \text{Vect}(\text{I}_2, K)$ donc (I_2, K) est une famille génératrice de $\mathcal{F}$.
   De plus, I_2 et K sont non colinéaires donc la famille (I_2, K) est libre.
   On en déduit que (I_2, K) est une base de $\mathcal{F}$.
2. Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
   Comme (I_2, K) est une base de $\mathcal{F}$,
   $M \in \mathcal{F}^\perp \iff \varphi(M, \text{I}_2) = 0$ et $\varphi(M, K) = 0$.
   C'est-à-dire, $M \in \mathcal{F}^\perp \iff a + d = 0$ et $b - c = 0$.
   Ou encore, $M \in \mathcal{F}^\perp \iff d = -a$ et $c = b$.
   On en déduit que $\mathcal{F}^\perp = \text{Vect}(A, B)$ avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.
   (A, B) est une famille libre et génératrice de $\mathcal{F}^\perp$ donc (A, B) est une base de $\mathcal{F}^\perp$.
3. On peut écrire $J = \text{I}_2 + B$ avec $\text{I}_2 \in \mathcal{F}$ et $B \in \mathcal{F}^\perp$.
   Donc le projeté orthogonal de J sur $\mathcal{F}^\perp$ est $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.
4. On note $d(J, \mathcal{F})$ la distance de J à $\mathcal{F}$.
   D'après le cours, $d(J, \mathcal{F}) = ||J - p_{\mathcal{F}}(J)||$ où $p_{\mathcal{F}}(J)$ désigne le projeté orthogonal de J sur $\mathcal{F}$.
   On peut écrire à nouveau que $J = \text{I}_2 + B$ avec $\text{I}_2 \in \mathcal{F}$ et $B \in \mathcal{F}^\perp$.
   Donc $p_{\mathcal{F}}(J) = \text{I}_2$.
   On en déduit que $d(J, \mathcal{F}) = ||J - p_{\mathcal{F}}(J)|| = ||J - \text{I}_2|| = ||B|| = \sqrt{2}$.

Exercice 2.

Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ la suite définie par

$$u_n = \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)\left(1 + \frac{2}{n^2}\right)\ldots\left(1 + \frac{n-1}{n^2}\right)\left(1 + \frac{n}{n^2}\right).$$

On pose $v_n = \ln(u_n)$.

1. Montrer, pour tout $x \geq 0$, l'inégalité
$$x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x.$$
2. Montrer, par récurrence sur $\mathbb{N}^*$, que :
$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$
3. Déduire des deux questions précédentes que
$$\frac{n+1}{2n} - \frac{(n+1)(2n+1)}{12n^3} \leq v_n \leq \frac{n+1}{2n}.$$
4. Montrer que (v_n) converge, et préciser sa limite.
5. Montrer que (u_n) converge, et préciser sa limite.

Correction.

1. Posons $f(x) = x - \ln(1+x)$. On a $f'(x) = 1 - \frac{1}{1+x} = \frac{x}{1+x} \geq 0$ pour $x \geq 0$. La fonction f est donc croissante sur $[0, +\infty[$. En particulier, on a $f(x) \geq f(0) = 0$, ce qui donne la première inégalité $\ln(1+x) \leq x$. De même, on pose $g(x) = (x - x^2/2) - \ln(1+x)$. g est dérivable sur $[0, +\infty[$ et on a $g'(x) = 1 - x - \frac{1}{1+x} = \frac{-x^2}{1+x} \leq 0$ pour $x \geq 0$. La fonction g est donc décroissante sur $[0, +\infty[$ et on a $g(x) \leq g(0) = 0$ pour $x \geq 0$, ce qui donne l'autre inégalité $x - x^2/2 \leq \ln(1+x)$.
2. On a, puisque $\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$,
$$v_n = \ln\left(1 + \frac{1}{n^2}\right) + \ln\left(1 + \frac{2}{n^2}\right) + \cdots + \ln\left(1 + \frac{n}{n^2}\right).$$
On utilise ensuite l'inégalité $\ln(1+x) \leq x$ pour trouver
$$\begin{aligned} v_n &\leq \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \cdots + \frac{n}{n^2} \\ &\leq \frac{1}{n^2}(1 + 2 + \ldots + n) \\ &\leq \frac{1}{n^2} \times \frac{n(n+1)}{2} \\ &\leq \frac{n+1}{2n} \end{aligned}$$
où on a utilisé $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$. Pour l'autre inégalité, on procède de façon identique en utilisant cette fois $\ln(1+x) \geq x - x^2/2$. On trouve
$$v_n \geq \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \cdots + \frac{n}{n^2} - \left(\frac{1^2}{2n^4} + \frac{2^2}{2n^4} + \cdots + \frac{n^2}{2n^4}\right)$$

La première partie a déjà été calculée auparavant. Pour la seconde, on utilise le rappel de l'énoncé.

$$\begin{aligned} v_n &\geq \frac{n+1}{2n} - \frac{1}{2n^4}\left(1^2+2^2+\cdots+n^2\right) \\ &\geq \frac{n+1}{2n} - \frac{1}{2n^4} \times \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\ &\geq \frac{n+1}{2n} - \frac{(n+1)(2n+1)}{12n^3}. \end{aligned}$$

3. On sait que $(n+1)/(2n) \to 1/2$ tandis que $(n+1)(2n+1)/(12n^3) \to 0$ (quotient d'un polynôme de degré 2 et d'un polynôme de degré 3). (v_n) est donc encadré par deux suites qui tendent toutes deux vers $1/2$. Par le théorème d'encadrement des limites (ou théorème des gendarmes), (v_n) converge elle-même vers $1/2$.
4. On a $u_n = \exp(v_n)$. Par le théorème de composition des limites, (u_n) est convergente, de limite $\exp(1/2)$.

Exercice 3.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x - x^2$, et (u_n) la suite définie par $u_0 \in]0,1[$ et $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Etudier les variations de f.
2. Montrer que, pour tout n, $0 < u_n < \frac{1}{n+1}$.
3. En déduire que la suite (v_n) définie par $v_n = nu_n$, $n \geq 0$, est croissante.
4. Montrer que la suite (v_n) admet une limite l appartenant à $]0,1]$ (on ne demande pas de calculer l pour le moment).
5. On pose $w_n = n(v_{n+1} - v_n)$. Montrer que (w_n) converge vers $l(1-l)$.
6. Soit (t_n) une autre suite telle qu'il existe $n_0 \geq 1$ vérifiant que, pour $n \geq n_0$, on a
$$t_{n+1} - t_n \geq \frac{a}{n},$$
où $a > 0$. Montrer que $t_{2n} - t_n \geq \frac{a}{2}$ pour $n \geq n_0$, puis que (t_n) est divergente.
7. Montrer que si $l \neq 1$, la suite (v_n) vérifie les mêmes conditions que la suite (t_n) de la question précédente. En déduire la valeur de l.

Correction.

1. On dérive f : $f'(x) = 1 - 2x$, fonction qui s'annule en $1/2$, positive sur $]-\infty, 1/2]$, négative sur $[1/2, +\infty[$. Ainsi, f est croissante sur $]-\infty, 1/2[$, décroissante sur $]1/2, +\infty[$ et $f(1/2) = 1/4$.
2. On remarque que le résultat est vrai pour $n = 0$. Il est aussi vrai pour $n = 1$. En effet, si $u_0 \in]0,1[$, d'après l'étude des variations de f, $u_1 = f(u_0)$ est dans l'intervalle $]0,1/4[$. Supposons le résultat vrai au rang n et prouvons le au rang $n+1$. Puisque $u_n \in \left]0, \frac{1}{n+1}\right[\subset$

$\left]0, \frac{1}{2}\right[$ et que la fonction f est strictement croissante sur cet intervalle, on obtient :

$$0 < u_n < \frac{1}{n+1} \implies f(0) = 0 < f(u_n) = u_{n+1} < f\left(\frac{1}{n+1}\right) = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{(n+1)^2}.$$

Pour conclure, on remarque que

$$\frac{1}{n+1} - \frac{1}{(n+1)^2} - \frac{1}{n+2} = \frac{1}{(n+1)(n+2)} - \frac{1}{(n+1)^2} = -\frac{1}{(n+1)^2(n+2)} < 0.$$

Ainsi, on a bien

$$0 < u_n < \frac{1}{n+1} - \frac{1}{(n+1)^2} \leq \frac{1}{n+2}.$$

3. On calcule $v_{n+1} - v_n$, et on trouve

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= (n+1)u_{n+1} - nu_n \\ &= (n+1)(u_n - u_n^2) - nu_n \\ &= u_n - (n+1)u_n^2 \\ &= u_n(1-(n+1)u_n). \end{aligned}$$

Or, comme $0 < u_n < \frac{1}{n+1}$, on a $u_n > 0$ et $1-(n+1)u_n > 0$, et donc $v_{n+1} - v_n \geq 0$: la suite (v_n) est croissante.

4. Puisque (v_n) est croissante, il suffit de prouver qu'elle est majorée pour démontrer qu'elle est convergente. Mais $v_n \leq \frac{n}{n+1}$. Ainsi, $v_n \leq 1$ et (v_n) est convergente vers une limite notée l. De plus, pour tout n, on a $v_0 \leq v_n \leq 1$. Par passage à la limite, on en déduit que $v_0 \leq l \leq 1$. Il suffit enfin de remarquer que $v_0 > 0$.

5. On va exprimer w_n en fonction de v_n et de u_n puisqu'on sait que ces deux suites convergent. On a

$$\begin{aligned} w_n &= n(v_{n+1} - v_n) \\ &= nu_n(1-(n+1)u_n) \end{aligned}$$

d'après le calcul fait à la question précédente, soit

$$w_n = v_n(1 - nu_n - u_n) = v_n(1 - v_n - u_n).$$

Puisque la suite (u_n) converge vers 0, que la suite (v_n) converge vers l, on en déduit, par les opérations usuelles sur les suites convergentes, que la suite (w_n) est convergente vers $l(1-l-0) = l(1-l)$.

6. Pour $n \geq n_0$, on écrit

$$\begin{aligned} t_{2n} - t_n &= (t_{2n} - t_{2n-1}) + (t_{2n-1} - t_{2n-2}) + \cdots + (t_{n+1} - t_n) \\ &\geq \frac{a}{2n-1} + \frac{a}{2n-2} + \cdots + \frac{a}{n} \\ &\geq \frac{a}{2n} + \cdots + \frac{a}{2n} \\ &\geq \frac{a}{2}. \end{aligned}$$

Si la suite (t_n) était convergente, de limite ℓ_1, la suite (t_{2n}) serait convergente de même limite, et on aurait

$$0 = \ell_1 - \ell_1 \geq \frac{a}{2} > 0,$$

ce qui est absurde. Ainsi, la suite (t_n) est divergente.

7. Supposons $l \neq 1$. Alors $l(1-l)$ est strictement positif (rappelons que $l \in]0,1]$). Posons $a = l(1-l)/2$ de sorte que $a < l(1-l)$. Puisque (w_n) converge vers $l(1-l) > a > 0$, il existe un entier n_0 tel que, pour $n \geq n_0$, on a
$$w_n > a \implies v_{n+1} - v_n \geq \frac{a}{n}.$$
Ainsi, par la question précédente, on sait que (v_n) tend vers $+\infty$. Ce n'est pas le cas. L'hypothèse de départ est donc fausse, et (v_n) converge vers 1.