Devoir surveillé n°3

Problème 1.

Soit $E = \mathbb{R}[X]$. Pour tout $P \in E$, on écrira $P = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k$ sa décompositon sur la base $(X^k)_{k\in\mathbb{N}}$, étant entendu que la famille $(a_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est alors implicitement une famille presque nulle, c'est-à-dire qu'elle n'a qu'un nombre fini de termes non nuls. On pose alors

$$\|P\|_c = \sup_{k\in\mathbb{N}} |a_k|.$$

On définit également

$$\|P\|_\infty = \sup_{t\in[-1,1]} |P(t)|.$$

A. Comparaison de ces deux normes et études de continuité

A.1. Montrer que $\|.\|_c$ et $\|.\|_\infty$ sont des normes sur E.

A.2. On compare ici ces deux normes.

(a) Montrer qu'il n'existe aucune constante $M > 0$ telle que pour tout $P \in E$, on ait $\|P\|_c \leqslant M\|P\|_\infty$. On pourra considérer le polynôme $(1 - X^2)^n$ pour $n \in \mathbb{N}$.

(b) Montrer de même qu'il n'existe aucune constante $M > 0$ telle que pour tout $P \in E$, on ait $\|P\|_\infty \leqslant M\|P\|_c$.

A.3. Soit $\varphi : P \mapsto \int_0^1 P(t)\mathrm{d}t$.

(a) Montrer que $\varphi : (E, \|.\|_\infty) \to \mathbb{R}$ est une application linéaire continue.

(b) Montrer que $\varphi : (E, \|.\|_c) \to \mathbb{R}$ n'est pas continue. On pourra considérer $P_n = \sum_{k=0}^{n} X^k$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

A.4. Soit $\psi : P(X) \mapsto P\left(\frac{X}{2}\right)$.

(a) Étudier la continuité de $\psi : (E, \|.\|_c) \to (E, \|.\|_c)$.

(b) Montrer que ψ est une bijection de E sur E.

(c) Étudier la continuité de $\psi^{-1} : (E, \|.\|_c) \to (E, \|.\|_c)$.

B. Restriction à la dimension finie

Dans toute la suite, on fixe $d \in \mathbb{N}$ et on pose $E_d = \mathbb{R}_d[X]$. On considère la restriction de $\|.\|_c$ et $\|.\|_\infty$ à E_d, que l'on note de la même façon.

B.1. Justifier que $\|.\|_c$ et $\|.\|_\infty$ sont des normes sur E_d équivalentes.

B.2. Donner la plus petite constante $M > 0$ telle que pour tout $P \in E_d$

$$\|P\|_\infty \leqslant M\|P\|_c.$$

B.3. Le but de cette question est d'obtenir une constante pour l'inégalité dans l'autre sens. On définit la suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}[X]^{\mathbb{N}}$ par

$$T_0 = 1 \qquad ; \qquad T_1 = X$$

et pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$T_{n+2} = 2XT_{n+1} - T_n.$$

(a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a

$$\deg T_n = n$$

et pour tout $\theta \in [0, \pi]$

$$T_n(\cos\theta) = \cos(n\theta).$$

(b) En déduire que $\|T_n\|_\infty = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et que pour tout $P \in E_d$, il existe un unique $(\alpha_0, \ldots, \alpha_d) \in \mathbb{R}^{d+1}$ tel que

$$P = \sum_{k=0}^{d} \alpha_k T_k.$$

(c) Calculer

$$I_{p,q} = \int_0^\pi \cos(p\theta)\cos(q\theta)\,\mathrm{d}\theta$$

pour tout $(p,q) \in \mathbb{N}^2$. En déduire, avec les notations de la question précédente, que

$$\alpha_k = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi P(\cos\theta)\cos(k\theta)\,\mathrm{d}\theta$$

si $k \in [\![1,d]\!]$ et donner une expression similaire pour α_0. Montrer enfin que

$$|\alpha_k| \leqslant \sqrt{2}\|P\|_\infty$$

pour tout $k \in [\![0,d]\!]$.

(d) Montrer par récurrence que pour tout $k \in \mathbb{N}$

$$\|T_k\|_c \leqslant (1+\sqrt{2})^k.$$

(e) Montrer que pour tout $P \in E_d$

$$\|P\|_c \leqslant M_d\|P\|_\infty$$

où $M_d = (1+\sqrt{2})^{d+1} - 1$.

Exercice 1.

Dans tout le problème, on note I l'intervalle $I =]-1,1[$.
Nous allons munir I d'une structure de groupe un peu particulière.

1. Montrer que : $\forall (s,t) \in I^2,\ 1 + st \neq 0$.

   On pose, pour tous s et t de I : $s * t := \dfrac{s+t}{1+st}$.

2. (a) Soit $s \in I$ *fixé*. Etudier la fonction $f : \left| \begin{array}{lcl} I & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & f(t) = s * t = \dfrac{s+t}{1+st} \end{array} \right.$.

   En déduire que $*$ est une loi de composition interne dans I.

   (b) Montrer que $(I,*)$ est un groupe commutatif.

   (c) $([0,1[,*)$ est-il un sous-groupe de $(I,*)$?

   (d) Soit x un réel strictement positif (fixé). On considère l'ensemble $H_x = \left\{ \dfrac{x^n-1}{x^n+1},\ \text{avec } n \in \mathbb{Z} \right\}$.

   Ainsi, on a la caractérisation : $(s \in H_x) \Leftrightarrow (\exists n \in \mathbb{Z} \mid s = \dfrac{x^n-1}{x^n+1})$

   Montrer que $(H_x,*)$ est un sous-groupe de $(I,*)$.

3. Soit $s \in I$, avec $s \neq 0$.

   Dans cette question, on désire expliciter $\underbrace{s * s * s \cdots * s}_{n \text{ fois}}$, que l'on notera $s^{[n]}$.

   On prendra la convention $s^{[0]} = 0$.

   (a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $s^{[n]}$ peut s'écrire $\dfrac{p_n}{q_n}$ avec les suites $(p_n)_{n\geq 0}$ et $(q_n)_{n\geq 0}$ définies par :

$$\left\{ \begin{array}{l} p_0 = 0 \\ q_0 = 1 \end{array} \right. \quad \text{et pour tout } n \in \mathbb{N},\ \left\{ \begin{array}{l} p_{n+1} = p_n + sq_n \\ q_{n+1} = sp_n + q_n \end{array} \right.$$

(b) Exprimer sq_{n+1} en fonction de p_{n+1} et p_n puis exprimer p_{n+2} en fonction de p_{n+1} et p_n.

(c) En déduire l'expression générale de p_n puis celle de q_n.

(d) Exprimer $s^{[n]}$. On observera que cette formule vaut aussi pour $s = 0$.

4. Montrer que la fonction th (tangente hyperbolique) définie par $\mathrm{th}(x) = \dfrac{\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}(x)} = \dfrac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$ réalise un isomorphisme de $(\mathbb{R}, +)$ vers $(I, *)$.

5. Exploiter ces résultats pour exprimer $\mathrm{th}(nx)$ en fonction de $\mathrm{th}(x)$.
Application : exprimer $\mathrm{th}(2x)$, $\mathrm{th}(3x)$, $\mathrm{th}(3x)$, $\mathrm{th}(4x)$, $\mathrm{th}(5x)$ en fonction de $\mathrm{th}(x)$.

Exercice 2. *extrait de CNM 2017*

Soit $(\mathcal{A}, +, \times, .)$ une $\mathbb{K}$-algèbre, c'est-à-dire $(\mathcal{A}, +, \times)$ est un anneau et $(\mathcal{A}, +, .)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, tel que $\forall \alpha \in \mathbb{K}$, $\forall (x, y) \in \mathcal{A}^2$, $(\alpha.x) \times y = x \times (\alpha.y) = \alpha.(x \times y)$, avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Soit $\|.\|$ une norme sur $\mathcal{A}$, $\|.\|$ est appelée une norme sous-multiplicative de la $\mathbb{K}$-algèbre $\mathcal{A}$, si pour tout $(x, y) \in \mathcal{A}^2$, $\|x \times y\| \leq \|x\|\|y\|$. Dans tout le problème n et p désignent des entiers naturels non nuls, on rappelle que, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est l'ensemble des matrices à coefficients dans $\mathbb{K}$ ayant n lignes et p colonnes. Si $n = p$, alors $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est noté $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et on rappelle aussi que $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, muni de ses opérations usuelles, est une $\mathbb{K}$-algèbre. Pour toute matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on note $A^0 = I_n$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $A^{n+1} = AA^n$, où I_n est la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. $GL_n(\mathbb{K})$ désigne le groupe des matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Partie I
Etude de quelques normes sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

On définit sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ la norme notée $\|.\|_\infty$, telle que $\forall A = (a_{i,j})_{1\leq i\leq n,\ 1\leq j\leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$,
$\|A\|_\infty = \max\limits_{1\leq i\leq n,\ 1\leq j\leq n}(|a_{i,j}|)$.

1. Montrer que $\forall (A, B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))^2$, $\|AB\|_\infty \leq n\|A\|_\infty\|B\|_\infty$.
2. Soit N une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
   a) On pose $(E_i^j)_{1\leq i\leq n,\ 1\leq j\leq n}$ la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
   Soit $X = (x_{i,j})_{1\leq i\leq n,\ 1\leq j\leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer que $N(X) \leq \left(\sum\limits_{1\leq i\leq n,\ 1\leq j\leq n} N(E_i^j)\right)\|X\|_\infty$.
   b) i) Montrer que N est une fonction continue de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ muni de la norme $\|.\|_\infty$ vers $\mathbb{R}$ muni de la valeur absolue.
   ii) On pose $S_\infty = \{X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K});\ \|X\|_\infty = 1\}$. Montrer qu'il existe $X_0 \in S_\infty$ tel que pour tout $X \in S_\infty$, $N(X_0) \leq N(X)$.
   iii) En déduire qu'il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\alpha\|X\|_\infty \leq N(X)$.
   c) En déduire que toutes les normes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sont équivalentes.
3. Soit N une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et soit $(A, B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))^2$.
   a) Montrer qu'il existe un réel strictement positif β tel que $N(AB) \leq n\beta\|A\|_\infty\|B\|_\infty$.
   b) Montrer qu'il existe deux réels strictement positifs α et β tels que $N(AB) \leq n\frac{\beta}{\alpha^2}N(A)N(B)$.
   c) En déduire qu'il existe un réel strictement positif γ tel que γN soit une norme sous-multiplicative sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

4. Soit N une norme sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, pour toute matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on pose,
$\|A\| = \sup\left\{\frac{N(AX)}{N(X)};\ X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \setminus \{0\}\right\}$.

a) i) Justifier, pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, l'existence de $\|A\|$.

ii) Montrer que, pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\|A\| = \sup\{N(AX);\ X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}),\ N(X) = 1\}$.

iii) Montrer que $\|.\|$ est une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

b) i) Montrer que, pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, $N(AX) \leq \|A\|N(X)$.

ii) En déduire que, pour tout $(A, B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))^2$, $\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$.

Partie II
Suites de matrices

On rappelle que si $(A_m)_{m\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et si $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, la suite $(A_m)_{m\in\mathbb{N}}$ converge vers A si la suite réelle $(\|A_m - A\|)_{m\in\mathbb{N}}$ converge vers 0, où $\|.\|$ est une norme donnée sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, on écrit dans ce cas $\lim\limits_{m\to+\infty} A_m = A$.

1. Soit $(A_m)_{m\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, on pose pour tout $m \in \mathbb{N}$, $A_m = (a_{i,j}^{(m)})_{1\leq i\leq n,\ 1\leq j\leq p}$ et $A = (a_{i,j})_{1\leq i\leq n,\ 1\leq j\leq p}$.
Montrer que la suite $(A_m)_{m\in\mathbb{N}}$ converge vers A si, et seulement si, pour tout $(i, j) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}$; $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq p$, la suite $(a_{i,j}^{(m)})_{m\in\mathbb{N}}$ converge vers $a_{i,j}$.

En cas de convergence, on écrit $\lim\limits_{m\to+\infty} A_m = \left(\lim\limits_{m\to+\infty} a_{i,j}^{(m)}\right)_{1\leq i\leq n,\ 1\leq j\leq p}$.

2. Soit α un réel, on pose pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, $A_m = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{\alpha}{m} \\ \frac{\alpha}{m} & 1 \end{pmatrix}$.

a) Montrer que pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, il existe $C_m \in \mathbb{R}$ et $\theta_m \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ tels que,
$A_m = C_m \begin{pmatrix} \cos\theta_m & -\sin\theta_m \\ \sin\theta_m & \cos\theta_m \end{pmatrix}$

b) Déterminer $\lim\limits_{m\to+\infty} A_m^m$.

Exercice 3.

On rappelle les notations suivantes : pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathbb{U}_n = \{z \in \mathbb{C} \mid z^n = 1\} \quad \text{et} \quad \mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}.$$

On pose :

$$G = \{z \in \mathbb{C} \mid \exists p \in \mathbb{Z},\ z^{2^p} = 1\}.$$

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $\mathbb{U}_n$ est un sous-groupe de $\mathbb{U}$ puis montrer que $\mathbb{U}_n$ est cyclique.
2. Montrer que G est un sous-groupe de $\mathbb{U}$.
3. a. Montrer que $\{n \in \mathbb{N}^* \mid \mathbb{U}_n \subset G\}$ est infini.
   b. En déduire que G est infini.
4. On suppose par l'absurde que G est monogène.
   a. Montrer qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $G \subset \mathbb{U}_{2^p}$.

b. En déduire une contradiction et conclure.

5. Montrer que tout sous-groupe fini de G est cyclique.