Mathématiques spéciales pour le 9 Janvier 2018

Devoir maison n°4

1. Informatique

Exercice 1.

On se donne, codée en Python, la fonction de tri de liste suivante :

```python
def tri(L):
    n = len(L)
    for i in range(1, n):
        j = i
        x = L[i]
        while 0 < j and x < L[j-1]:
            L[j] = L[j-1]
            j = j-1
            L[j] = x
```

1. Lors de l'appel de `tri(L)` lorsque la liste `[5,2,3,1,4]`, donner le contenu de la liste `L` à la fin de chaque itération de la boucle `for`
2. Évaluer la complexité dans le meilleur et dans le pire des cas de l'appel `tri(L)` en fonction du nombre `n` d'éléments de `L`. Citer un algorithme de tri plus efficace dans le pire des cas.
3. On souhaite, en partant d'une liste constituée de couples (chaîne, entier), trier la liste par ordre croissant de l'entier associé suivant le fonctionnement suivant :

```python
>>> L = [['Bresil', 76], ['Kenya', 26017], ['Ouganda', 8431]]
>>> tri_chaine(L)
>>> L
[['Bresil', 76], ['Ouganda', 8431], ['Kenya', 26017]]
```

   Écrire en Python une fonction `tri_chaine` réalisant cette opération.

2. Mathématiques

Exercice 2.

1. Déterminer et justifier la convergence ou la divergence des séries suivantes :

   a. $\sum \left(\frac{1}{9}\begin{pmatrix} 5 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix}\right)^n$. En cas de convergence, déterminer la limite de la série.

b. $\sum \frac{(-1)^n+1}{\sqrt{n^3+n}}$

c. $\sum \frac{(n!)^2}{(\sqrt{n})^{(2n)}}$.

d. $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{\sqrt{n^2-1}} - \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}$

e. $\sum_{n\geq 1} \left(e - \left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)$

f. $\sum_{n\geq 1} \frac{\cos(n^2\pi)}{\sqrt{n}}$

g. $\sum \frac{x^{2n}}{\binom{2n}{n}}$ en fonction des valeurs de $x \in \mathbb{R}_+$.

2. a. On considère la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$. Montrer que le reste d'ordre n de cette série vérifie

$$R_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}.$$

(Indication : on pourra s'aider de la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{x^2}$)

b. Montrer que la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2+\sqrt{n}}$ est convergente. On note S_n sa somme partielle d'ordre n et S sa somme.

c. Établir

$$S_n = S - \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

Exercice 3.

On appelle A la matrice carrée d'ordre $n > 0$ ayant des 2 sur la diagonale et des 1 ailleurs, c'est-à-dire :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & \cdots & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Soit J la matrice carrée d'ordre $n > 0$ dont le terme général est égal à 1, c'est à dire :

$$J = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & \cdots & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & \cdots & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

(a) Exprimer la matrice J^2 en fonction de la matrice J.

(b) En déduire un polynôme annulateur du second degré de la matrice A.

(c) Montrer que la matrice A est inversible et calculer son inverse A^{-1}.

2. (a) Montrer qu'il existe une matrice Q appartenant au groupe orthogonal $O_n(\mathbb{R})$ et une matrice diagonale D telles que :
$$A = QDQ^{-1}.$$
(b) Déterminer les valeurs propres et sous-espaces propres de la matrice A, en déduire la matrice D.

3. Soit $\mathcal{E}$ l'ensemble des matrices U carrées d'ordre $n > 0$ à coefficients réels vérifiant la relation :
$${}^tUA = AU$$
(a) Montrer que $\mathcal{E}$ est un sous-espace vectoriel de l'ensemble des matrices carrées d'ordre $n > 0$ à coefficients réels.

(b) Pour toute matrice U de l'ensemble $\mathcal{E}$, on pose $V = {}^tQUQ$ où la matrice Q est la matrice de la question $2)a)$. Montrer que :
$${}^tVD = DV$$
où D désigne la matrice diagonale de la question 2).

(c) Soit $\mathcal{F}$ l'ensemble des matrices V carrées d'ordre $n > 0$ à coefficients réels vérifiant la relation :
$${}^tVD = DV$$
On admet que $\mathcal{F}$ est un sous-espace vectoriel de l'ensemble des matrices carrées d'ordre $n > 0$ à coefficients réels, montrer que : $\dim \mathcal{E} = \dim \mathcal{F}$.

(d) En déduire la dimension de l'espace $\mathcal{E}$.

4. On appelle φ l'application de $(\mathbb{R}^n)^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $\varphi(x, y) = {}^tXAY$ où X et Y désignent les matrices colonnes formées par les coordonnées des vecteurs x et y dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

   (a) Montrer que φ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$.

   (b) A chaque matrice U de l'espace $\mathcal{E}$, on associe l'application linéaire u de $\mathbb{R}^n$ dans lui-même telle que la matrice de u dans la base canonique soit la matrice U.
   Montrer que l'application linéaire u est symétrique pour le produit scalaire φ.

   (c) En déduire que pour toute matrice U de l'espace $\mathcal{E}$, il existe une matrice B appartenant à $GL_n(\mathbb{R})$ et une matrice Δ diagonale appartenant à $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant

$$\begin{cases} U = B\Delta B^{-1} \\ {}^tBAB = I_n \end{cases}$$

Indication.

Soit E un espace vectoriel muni d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$. On dit qu'un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ est symétrique si, pour tous $x, y \in E$:

$$\langle u(x), u(y) \rangle = \langle x, y \rangle.$$

Si, de plus, E est de dimension finie et si $\mathcal{B}$ une base E, alors la matrice $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ d'un endomorphisme symétrique $u \in \mathcal{L}(E)$ est une **matrice symétrique** i.e ${}^tA = A$.