Corrigé du devoir surveillé n°6

1. Exercices

Exercice 1. *E3A 2013*

1) a) Déterminer le rayon de convergence de la série entière réelle : $\sum \frac{x^{2n}}{2n+1}$.

b) On note $S(x)$ sa somme $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{2n+1}$. Préciser son ensemble de définition I.

2) a) Démontrer que la fonction $x \mapsto xS(x)$ est dérivable sur I et donner une expression simple de sa dérivée.

b) Déterminer deux nombres réels a et b tels que : $\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{1,-1\}$, $\frac{1}{1-x^2} = \frac{a}{1-x} + \frac{b}{1+x}$, en déduire que :

$$\forall x \in I,\ xS(x) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right).$$

Correction.

1) a) Notons R ce rayon de convergence. Pour $x \in [-1,1]$, le terme général de la série tend vers 0, donc $R \geqslant 1$; mais ce terme diverge si $|x| > 1$, donc $R \leqslant 1$. Finalement, $\boxed{R = 1.}$

b) On sait déjà que I contient l'ouvert $]-1,1[$, et que la série diverge pour $|x| > 1$. Pour $|x| = 1$, le terme général de la série vaut $1/(2n+1)$, donc la série diverge ; par suite $\boxed{I =]-1,1[.}$

2) a) Pour tout $x \in I$, $xS(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$; cette fonction est donc la somme d'une série entière convergente sur I, le rayon de convergence de cette série vaut donc au moins 1. On sait qu'alors la somme est dérivable sur I, et que la fonction dérivée s'obtient par dérivation terme à terme. On a donc sur I : $\boxed{\frac{d}{dx}(xS(x)) = \sum_{n=0}^{+\infty} x^{2n} = \frac{1}{1-x^2}}$ (série géométrique de raison x^2).

b) On trouve facilement que $\boxed{a = b = 1/2 \text{ convient.}}$
Puisque $xS(x)$ est la primitive de cette fonction qui s'annule en 0, on a effectivement

$$\boxed{\forall x \in I \quad xS(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right).}$$

Exercice 2. *CCP 2011*

On considère la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geq 2} \frac{2x^n}{n^2-1}$.

1. Déterminer le rayon de convergence R de cette série entière.
2. On note S la fonction somme de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 2} \frac{2x^n}{n^2-1}$. Déterminer S sur $]-R, R[$.
3. Démontrer que $S(x)$ admet une limite lorsque x tend vers 1 par valeurs strictement inférieures et déterminer cette limite.

Correction.

1. Soit, pour $n \geq 2$, $a_n = \frac{2}{n^2-1}$. On a $\forall n \geq 2,\ a_n > 0$ et $\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{(n+1)^2-1}{n^2-1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ donc, selon la règle de D'Alembert, $R = 1$.
2. Pour $n \geq 1$, $a_n = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1} = b_n - c_n$ et, comme ci-dessus $\lim_{n\to+\infty} \frac{b_n}{b_{n+1}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{c_n}{c_{n+1}} = 1$ montre que les séries $\sum_{n\geq 2} \frac{x^n}{n-1}$ et $\sum_{n\geq 2} \frac{x^n}{n+1}$ ont aussi comme rayon de convergence 1. On peut donc écrire, pour tout $x \in]-1, 1[\setminus\{0\}$,
$$S(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^n}{n-1} - \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^n}{n+1} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n} - \sum_{n=3}^{+\infty} \frac{x^{n-1}}{n} = x\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} - \frac{1}{x}\left[\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{x^n}{n} - x - \frac{x^2}{2}\right]$$
soit $\forall x \in]-1, 1[\setminus\{0\}, S(x) = \frac{1-x^2}{x} \ln(1-x) + 1 + \frac{x}{2}$ et $S(0) = 0$.
3. Pour $x \in]0, 1[$, $S(x) = \frac{1+x}{x}(1-x)\ln(1-x) + 1 + \frac{x}{2}$ donc $\lim_{x\to 1^-} S(x) = \frac{3}{2}$.

2. Problèmes au choix

Problème 1.

Il est utile en physique, notamment pour étudier des spectres d'énergie ou pour décomposer un signal périodique en harmoniques, de pouvoir écrire une fonction périodique en somme d'une série de fonctions trigonométriques.

Nous allons nous intéresser à l'aspect mathématique de cette décomposition pour les fonctions de période 2π.

Dans ce qui suit, on appelle "série trigonométrique" une série de fonctions du type
$$\sum (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$
où (a_n) et (b_n) sont deux suites de réels.

Dans la première partie, on étudie quelques exemples. Dans la deuxième partie, on s'intéresse plus particulièrement aux séries trigonométriques qui convergent normalement sur $\mathbb{R}$.

On notera $C_{2\pi}$ l'espace vectoriel des fonctions continues et 2π-périodiques de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Pour

$f \in C_{2\pi}$ et $n \in \mathbb{N}$, on notera

$$\alpha_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx \quad \text{et} \quad \beta_n(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\,dx$$

Partie 1 : exemples

1. Démontrer que la série trigonométrique $\sum \left(\frac{1}{2^n}\cos(nx) + \frac{1}{3^n}\sin(nx)\right)$ converge normalement sur $\mathbb{R}$. Pour tout entier $p \geq 2$, déterminer la somme de la série $\sum_{n\geq 0}\left(\frac{e^{ix}}{p}\right)^n$ puis en déduire la valeur de
$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2^n}\cos(nx) + \frac{1}{3^n}\sin(nx)\right)$$
(il n'est pas utile de réduire au même dénominateur).
2. Ecrire la fonction $\varphi\ :\ x \mapsto \exp(\cos(x))\cos(\sin(x))$ comme la somme d'une série trigonométrique. On pourra écrire la fonction $x \mapsto \exp(e^{ix})$ comme somme de série de fonctions.
3. Donner un exemple de suite (a_n) de limite nulle telle que la série trigonométrique $\sum a_n\cos(nx)$ ne converge pas simplement sur $\mathbb{R}$.
4. On admet que la série trigonométrique $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{\sqrt{n}}\sin(nx)$ converge simplement sur $\mathbb{R}$. Converge-t-elle normalement sur $\mathbb{R}$?

Partie 2 : propriétés

Une condition suffisante

5. Démontrer que si les séries $\sum a_n$ et $\sum b_n$ sont absolument convergentes, alors la série trigonométrique $\sum(a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx))$ converge normalement sur $\mathbb{R}$.

Une condition nécessaire

6. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ quelconques. Démontrer que le maximum de la fonction $x \mapsto |a\cos(x) + b\sin(x)|$ est $\sqrt{a^2+b^2}$.
7. Démontrer que si la série trigonométrique $\sum(a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx))$ converge normalement sur $\mathbb{R}$, alors les suites (a_n) et (b_n) convergent vers 0 et les séries $\sum a_n$ et $\sum b_n$ sont absolument convergentes.

Autres propriétés

8. On note f la somme d'une série trigonométrique $\sum(a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx))$ qui converge normalement sur $\mathbb{R}$. Justifier que $f \in C_{2\pi}$.
9. Calculer $\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2(nx)\,dx$ pour $n \neq 0$ et donner la valeur de $\int_{-\pi}^{\pi}\sin(kx)\cos(nx)\,dx$ pour k et n entiers.
10. On note f la somme d'une série trigonométrique $\sum(a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx))$ qui converge normalement sur $\mathbb{R}$: pour tout réel x, $f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty}(a_k\cos(kx) + b_k\sin(kx))$. Démontrer que pour tout entier naturel n non nul, $\alpha_n(f) = a_n$ puis exprimer $\alpha_0(f)$ en fonction de a_0. On pourra utiliser sans démonstration que pour $k \neq n$, $\int_{-\pi}^{\pi}\cos(kx)\cos(nx)\,dx = 0$.
On admettra, pour la suite du problème, que pour tout entier naturel n non nul $\beta_n(f) = b_n$ et $\beta_0(f) = 0$ (la démonstration n'est pas demandée).
11. Soit $f \in C_{2\pi}$. Pour tout réel x, on pose $u_0(x) = \frac{\alpha_0(f)}{2}$. Pour tout entier $n \geq 1$, on pose $u_n(x) = \alpha_n(f)\cos(nx) + \beta_n(f)\sin(nx)$. On suppose ici que la série trigonométrique

$\sum(u_n(x))$ converge normalement sur $\mathbb{R}$ vers une fonction notée g :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) = \frac{\alpha_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty}(\alpha_k(f)\cos(kx) + \beta_k(f)\sin(kx))$$

Quelles relations a-t-on dans ce cas entre $\alpha_n(g)$ et $\alpha_n(f)$? $\beta_n(g)$ et $\beta_n(f)$?

12. Il est admis que si une fonction $h \in C_{2\pi}$ vérifie : pour tout entier naturel n, $\alpha_n(h) = \beta_n(h) = 0$, alors h est la fonction nulle. Démontrer que pour tout réel x, $g(x) = f(x)$.

En résumé, lorsque la série trigonométrique $\sum(\alpha_n(f)\cos(nx) + \beta_n(f)\sin(nx))$ d'une fonction $f \in C_{2\pi}$ converge normalement que $\mathbb{R}$ alors pour tout réel x, on a

$$f(x) = \frac{\alpha_0(f)}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty}(\alpha_n(f)\cos(nx) + \beta_n(f)\sin(nx))$$

13. Si $f \in C_{2\pi}$ est une fonction paire, que vaut $\beta_n(f)$? Exprimer, sans démonstration, $\alpha_n(f)$ en fonction de l'intégrale $\int_0^\pi f(x)\cos(nx)\,dx$.
14. Exemple. Soit $f \in C_{2\pi}$ définie ainsi : pour tout $x \in [-\pi, \pi]$, $f(x) = x^2$ et f est 2π-périodique sur $\mathbb{R}$. Construire la courbe de cette fonction paire f sur l'intervalle $[-3\pi, 3\pi]$ puis déterminer, pour tout entier naturel, les coefficients $\alpha_n(f)$ et $\beta_n(f)$. Donner une série trigonométrique qui converge normalement sur $\mathbb{R}$ vers f.
15. En déduire les sommes
$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n^2} \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$$
Déduire alors de la seconde somme la valeur de
$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}$$
16. Application. Justifier que la fonction $x \mapsto \frac{\ln(1+x)}{x}$ est intégrable sur l'intervalle $]0, 1[$ puis démontrer que $\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x}\,dx = \frac{\pi^2}{12}$.
17. La somme d'une série trigonométrique qui converge normalement sur $\mathbb{R}$ est-elle nécessairement une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$?
Proposer une condition suffisante sur les séries $\sum na_n$ et $\sum nb_n$ pour que la somme de la série trigonométriquen$\sum(a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx))$, qui converge normalement sur $\mathbb{R}$ soit une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.
18. Déterminer la somme de la série trigonométrique $\sum \frac{n}{3^n}\cos(nx)$.

Correction.

Partie 1 : exemples

1. On a
$$\forall x\in\mathbb{R},\ \left|\frac{1}{2^n}\cos(nx)+\frac{1}{3^n}\sin(nx)\right|\leq\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}$$
Le majorant est indépendant de x et est le terme général d'une série convergente. La série de fonctions est donc normalement convergente sur $\mathbb{R}$.
Pour le calcul, on remarque que pour $p\geq 2$, e^{ix}/p est de module <1 et que donc (somme géométrique)
$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{e^{ix}}{p}\right)^n=\frac{1}{1-\frac{e^{ix}}{p}}=\frac{p}{p-e^{ix}}$$
En passant aux parties réelle et imaginaire, on a donc
$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos(nx)}{p^n}=\frac{p^2-p\cos(x)}{p^2-2p\cos(x)+1}\quad\text{et}\quad\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos(nx)}{p^n}=\frac{p\sin(x)}{p^2-2p\cos(x)+1}$$
Il reste à combiner les résultats pour $p=2$ et $p=3$:
$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2^n}\cos(nx)+\frac{1}{3^n}\sin(nx)\right)=\frac{4-2\cos(x)}{5-4\cos(x)}+\frac{3\sin(x)}{10-6\cos(x)}$$
2. En utilisant le DSE de l'exponentielle, on a
$$\forall x\in\mathbb{R},\ \exp(e^{ix})=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{e^{inx}}{n!}$$
Or, $\exp(e^{ix})=\exp(\cos(x))\exp(i\sin(x))$ et la partie réelle de cette quantité est
$$\forall x\in\mathbb{R},\ \exp(\cos(x))\cos(\sin(x))=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos(nx)}{n!}$$
3. Posons $a_n=\frac{1}{n+1}$ et $u_n(x)=a_n\cos(nx)$. (a_n) est de limite nulle mais $u_n(0)=\frac{1}{n+1}$ est le terme général d'une série divergente. $\sum(u_n)$ n'est donc pas simplement convergente sur $\mathbb{R}$.
4. La norme infinie sur $\mathbb{R}$ de $x\mapsto\frac{\sin(nx)}{\sqrt{n}}$ est immédiatement égale à $\frac{1}{\sqrt{n}}$ qui est le terme général d'une série divergente. La série de fonction proposée n'est donc pas normalement convergente sur $\mathbb{R}$.

Partie 2 : propriétés

Une condition suffisante

5. On a
$$\forall x\in\mathbb{R},\ |a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx)|\leq|a_n|+|b_n|$$
Le majorant est indépendant de x et est le terme général d'une série convergente. La série de fonctions est donc normalement convergente sur $\mathbb{R}$.

Une condition nécessaire

6. On a $((.|.)$ étant le produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^2)$
$$\forall x\in\mathbb{R},\ |a\cos(x){+}b\sin(x)|=|((a,b)|(\cos(x),\sin(x)))|\leq\|(a,b)\|{\cdot}\|(\cos(x),\sin(x))\|=\sqrt{a^2+b^2}$$
De plus, il y a un cas d'égalité :

- c'est immédiat si $a = b = 0$ (n'importe quel x convient) ;
- si $(a, b) \neq (0, 0)$, $(a/\sqrt{a^2 + b^2}, b/\sqrt{a^2 + b^2})$ est un vecteur normé et il existe donc un x tel que ce vecteur soit $(\cos(x), \sin(x))$.

7. Posons $u_n(x) = a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$. On suppose ici que $\sum(\|u_n\|_\infty)$ converge. On a (avec la question précédente et car nx varie dans $\mathbb{R}$ quand c'est le cas pour x si $n > 0$)
$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \|u_n\|_\infty = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \geq \max(|a_n|, |b_n|)$$
Par comparaison des séries positives, $\sum(a_n)$ et $\sum(b_n)$ convergent absolument.

Autres propriétés

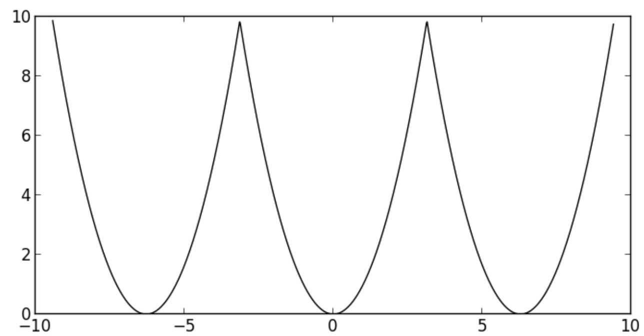
8. La convergence normale sur $\mathbb{R}$ entraîne la convergence uniforme sur $\mathbb{R}$ et cette dernière conserve la continuité. Les fonctions de la séries étant continues sur $\mathbb{R}$, il en est de même de f.
La convergence normale sur $\mathbb{R}$ entraîne la convergence simple sur $\mathbb{R}$. La convergence simple conserva la 2π-périodicité (si $S_n(x + 2\pi) = S_n(x)$, on peut passer à la limite pour obtenir la 2π-périodicité de la limite). Ici, f est donc 2π-périodique et
$$f \in C_{2\pi}$$
9. On effectue une linéarisation : $\cos^2(nx) = \frac{1}{2}(\cos(2nx) + 1)$. On a donc
$$\forall n \geq 1,\ \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(nx)\ dx = \left[\frac{1}{4n}\sin(2nx) + \frac{x}{2}\right]_{-\pi}^{\pi} = \pi$$
De même, $\sin(kx)\cos(nx) = \frac{1}{2}(\sin(kx + nx) + \sin(kx - nx))$. $\sin(px)$ est d'intégrale nulle sur $[-\pi, \pi]$ (évident si $p = 0$, par primitivation en $-\frac{\cos(px)}{p}$ sinon). On en déduit que
$$\forall n, k,\ \int_{-\pi}^{\pi} \sin(kx)\cos(nx)\ dx = 0$$
10. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a
$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\ dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} (a_k \cos(kx)\cos(nx) + b_k \sin(kx)\cos(nx))\ dx$$
Posons encore $u_k(x) = a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)$. On a $\forall x,\ |u_k(x)\cos(nx)| \leq |u_k(x)| \leq \|u_k\|_\infty$. Le majorant est indépendant de x et est le terme général d'une série convergente (par l'hypothèse de normale convergence). On a donc sous l'intégrale une série de fonctions normalement convergente sur le SEGMENT $[-\pi, \pi]$ et on est dans le cas simple où on peut intervertir :
$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\ dx = \sum_{k=0}^{\infty} \left(a_k \int_{-\pi}^{\pi} \cos(kx)\cos(nx)\ dx + b_k \int_{-\pi}^{\pi} \sin(kx)\cos(nx))\ dx\right)$$
Dans la somme, tous les termes sont nuls sauf celui d'indice $k = n$ qui vaut $a_n\pi$ si $n \neq 0$ (question précédente et résultat admis) et $2\pi a_0$ si $n = 0$. Ainsi,
$$\forall n \neq 0,\ a_n = \alpha_n(f) \ \text{ et } \ a_0 = \frac{1}{2}\alpha_0(f)$$
11. Il s'agit d'utiliser la question précédente avec $a_0 = \alpha_0(f)/2$, $b_0 = 0$ et pour $n \geq 1$, $a_n = \alpha_n(f)$ et $b_n = \beta_n(f)$. La somme est ici égale à g et on obtient donc
$$\forall n \in \mathbb{N},\ \alpha_n(f) = \alpha_n(g) \ \text{ et } \ \beta_n(f) = \beta_n(g)$$

12. $h \mapsto \alpha_n(h)$ et $h \mapsto \beta_n(h)$ étant linéaire, on a ici $\alpha_n(g-f) = \beta_n(g-f) = 0$ et, avec le résultat admis $g - f = 0$.
13. Si f est paire, $x \mapsto f(x)\sin(nx)$ est impaire et sa fonction est donc d'intégrale nulle sur un intervalle centré sur 0 (ce que l'on voit par le changement de variable affine $t = -x$). En particulier,
$$\forall n,\ \beta_n(f) = 0$$
$x \mapsto f(x)\cos(nx)$ est paire et
$$\forall n \in \mathbb{N},\ \alpha_n(f) = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\cos(nx)\,dx$$
14. Utilisons un petit script Python. Pour calculer $f(x)$, on cherche un entier k tel que $x - 2k\pi = y \in [-\pi, \pi]$ et on renvoie y^2.

```
from numpy import *
from matplotlib import pyplot as plt

def f(x):
    k=floor((x+pi)/(2*pi))
    return (x-2*k*pi)**2

a,b=-3*pi,3*pi
pas=(b-a)/1000
lx=[a+k*pas for k in range(1000)]
ly=[f(x) for x in lx]
plt.plot(lx,ly,'k')
plt.axis('scaled')
plt.show()
```



La fonction f étant paire, les coefficients $\beta_n(f)$ sont tous nuls. De plus
$$\alpha_n(f) = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x^2\cos(nx)\,dx$$

Une double intégration par parties donne, pour $n \neq 0$,

$$\int_0^\pi x^2 \cos(nx)\, dx = -\frac{2}{n}\int_0^\pi x\sin(nx)\, dx = -\frac{2}{n}\left(\left[-\frac{x\cos(nx)}{n}\right]_0^\pi + \frac{1}{n}\int_0^\pi \cos(nx)\, dx\right)$$

et ainsi

$$\forall n \neq 0,\ \alpha_n(f) = \frac{4(-1)^n}{n^2}$$

On a aussi

$$\alpha_0(f) = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x^2\, dx = \frac{2}{3}\pi^2$$

Comme $\sum(\alpha_n(f))$ et $\sum(\beta_n(f))$ convergent absolument, on peut utiliser ce qui précède et conclure

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos(nx)$$

la série étant normalement convergente sur $\mathbb{R}$.

15. Pour $x = 0$, on obtient

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{\pi^2}{12}$$

Pour $x = \pi$, on obtient

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

On découpe la somme en isolant les termes d'indice pair et ceux d'indice impair (c'est licite car la série est absolument convergente) :

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)^2} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}$$

On en déduit que

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{6} - \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

16. $x \mapsto \frac{\ln(1+x)}{x}$ est continue sur $]0,1]$. En 0, la fonction est équivalente à $\frac{x}{x} = 1$ et est donc prolongeable par continuité. Notre fonction est donc intégrable sur $[0,1]$ (ce n'est même pas une intégrale généralisée).
Utilisons le DSE de $x \mapsto \ln(1+x)$:

$$\forall x \in]0,1[,\ \frac{\ln(1+x)}{x} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{n-1}}{n}$$

On en déduit que

$$\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x}\, dx = \int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{n-1}}{n}\, dx$$

On veut intervertir somme et intégrale. Je choisis le théorème d'intégration terme à terme.

- $g_n\ :\ x \mapsto (-1)^{n-1}\frac{x^{n-1}}{n}$ est le terme général d'une série de fonctions continue qui converge simplement sur $]0,1[$ vers $x \mapsto \frac{\ln(1+x)}{x}$.

- La somme simple est continue sur $]0,1[$.
- g_n est intégrable sur $]0,1[$ et $\int_0^1 |g_n(x)|\,dx = \frac{1}{n^2}$ est le terme générale d'une série convergente.

L'interversion est licite et donne

$$\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x}\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 (-1)^{n-1}\frac{x^{n-1}}{n}\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}$$

17. Dans l'exemple de la question 18, on a obtenu une série normalement convergente sur $\mathbb{R}$. Cependant la somme f n'est pas dérivable. En effet, f est dérivable à droite et gauche en π avec des nombres dérivés 2π (à gauche) et -2π (à droite).
Supposons que $\sum(na_n)$ et $\sum(nb_n)$ sont des séries absolument convergente. Montrons qu'alors en posant $u_n(x) = a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx)$, $\sum(u_n)$ converge normalement sur $\mathbb{R}$ vers une fonction de classe C^1 sur $\mathbb{R}$. On utilise pour cela le théorème de régularité des sommes de séries fonctions.
    - $\forall n,\ u_n \in C^1(\mathbb{R})$ et $u_n'(x) = -na_n\sin(nx) + nb_n\cos(nx)$.
    - $\sum(u_n)$ converge simplement sur $\mathbb{R}$.
    - $\|u_n'\|_\infty \leq |na_n| + |nb_n|$ est le terme général d'une série convergente et $\sum(u_n')$ est donc normalement convergente sur $\mathbb{R}$.

    Le théorème s'applique donc et indique non seulement que la somme est de classe C^1 mais que sa dérivée est la somme de la série dérivée.
18. On a vu en question 5 que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{3^n} = \frac{3\sin(x)}{10 - 6\cos(x)}$$

On est dans le cadre de la condition précédente avec $a_n = 0$ et $b_n = 1/3^n$. On en déduit (en dérivant) que

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n\cos(nx)}{3^n} = \frac{3}{2}\frac{5\cos(x) - 3}{(5 - 3\cos(x))^2}$$

Indication.

Pour le problème suivant, on rappelle la formule de Taylor avec reste intégrale :
Soit $n \in \mathbb{N}$, I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$. Si f est de classe C^{n+1} sur I, alors on a, pour tout $x, a \in I$:

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(a)}{i!}(x-a)^i + \int_a^x \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n dt.$$

Cette formule est appelée **formule de Taylor avec reste intégrale à l'ordre n.**

Problème 2. *Centrale 2011*

Développement asymptotique du reste des séries de Riemann convergentes

L'objet de ce problème est de donner une approximation de la somme des séries de Riemann convergentes $S(\alpha) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ où α est un réel strictement supérieur à 1. Pour cela, on étudie le reste $R_n(\alpha) = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}$.

Dans la première partie, on donne une première approximation du reste. Cette méthode se généralisant mal, on utilise dans la deuxième partie une formule de Taylor pour obtenir simplement un développement asymptotique du reste. L'inconvénient de cette méthode est qu'elle ne donne aucun contrôle de l'erreur.

Dans la troisième partie, on retrouve à partir de la formule sommatoire d'Euler-Maclaurin le même développement asymptotique avec une expression de l'erreur assez satisfaisante. On a besoin dans cette partie d'une étude succincte des polynômes de Bernoulli.

Dans la dernière partie, on étudie de manière assez précise le contrôle de cette erreur, pour conclure que les formules sommatoires étudiées ne sont pas nécessairement convergentes.

Rappels et notations

On note $[x]$ la partie entière d'un réel x.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles. On note $v_n = O(u_n)$ si

$$\exists M \in \mathbb{R},\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant n_0 \Rightarrow |v_n| \leqslant M|u_n|$$

I Étude préliminaire

I.A – Convergence des séries de Riemann

I.A.1) Soit f une fonction réelle, définie continue et décroissante sur $[a, +\infty[$, où $a \in \mathbb{R}$. Montrer, que pour tout entier $k \in [a+1, +\infty[$, on a $\int_k^{k+1} f(x)\,dx \leqslant f(k) \leqslant \int_{k-1}^{k} f(x)\,dx$.

I.A.2) En déduire la nature de la série de Riemann $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^\alpha}$ selon la valeur de $\alpha \in \mathbb{R}$.

En cas de convergence, on pose $S(\alpha) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$.

I.A.3) Pour tout réel $\alpha > 1$, montrer que $1 \leqslant S(\alpha) \leqslant 1 + \frac{1}{\alpha - 1}$.

I.B – Première étude asymptotique du reste

Dans la suite du problème, pour tout réel α strictement supérieur à 1 et pour tout entier naturel non nul n, on pose $R_n(\alpha) = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}$.

I.B.1) En utilisant l'encadrement de la question **I.A.1**, montrer que $R_n(\alpha) = \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}} + O\Big(\frac{1}{n^\alpha}\Big)$.

I.B.2) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = \frac{1}{(1-\alpha)x^{\alpha-1}}$. En appliquant à f la formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre 2, montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $f(k+1) - f(k) = \frac{1}{k^\alpha} - \frac{\alpha}{2}\frac{1}{k^{\alpha+1}} + A_k$ où A_k est un réel vérifiant $0 \leqslant A_k \leqslant \frac{\alpha(\alpha+1)}{2k^{\alpha+2}}$.

I.B.3) En déduire que

$$R_n(\alpha) = \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}} + \frac{1}{2n^\alpha} + O\Big(\frac{1}{n^{\alpha+1}}\Big)$$

On pourrait répéter le procédé pour obtenir un développement asymptotique plus précis de $R_n(\alpha)$, mais la partie suivante va donner une méthode plus rapide.

II Formule de Taylor et nombres de Bernoulli

II.A – Nombres de Bernoulli

II.A.1) Montrer qu'il existe une suite réelle $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ayant la propriété suivante : pour tout entier $p \in \mathbb{N}^*$, pour tout intervalle non réduit à un point I et pour toute fonction complexe f de classe C^∞ sur I, la fonction g définie sur I par $g = a_0 f + a_1 f' + \cdots + a_{p-1} f^{(p-1)}$ vérifie

$$g' + \frac{1}{2!}g'' + \frac{1}{3!}g^{(3)} + \cdots + \frac{1}{p!}g^{(p)} = f' + \sum_{l=1}^{p-1} b_{l,p} f^{(p+l)}$$

où les $b_{l,p}$ sont des coefficients indépendants de f que l'on ne cherchera pas à calculer.

II.A.2) Montrer que $a_0 = 1$ et que pour tout $p \geqslant 1$, $a_p = -\displaystyle\sum_{i=2}^{p+1} \frac{a_{p+1-i}}{i!}$. En déduire que $|a_p| \leqslant 1$ pour tout entier naturel p. Déterminer a_1 et a_2.

II.A.3) *a)* Pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 1$, justifier que la série $\displaystyle\sum_{p\in\mathbb{N}} a_p z^p$ est convergente.

On note $\varphi(z)$ sa somme : $\varphi(z) = \displaystyle\sum_{p=0}^{\infty} a_p z^p$.

b) Pour $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 1$, calculer le produit $(e^z - 1)\varphi(z)$. En déduire que, pour tout $z \in \mathbb{C}^*$ vérifiant $|z| < 1$, on a $\varphi(z) = \dfrac{z}{e^z - 1}$.

c) Montrer que $a_{2k+1} = 0$ pour tout entier $k \geqslant 1$. Calculer a_4.

Les nombres $b_n = n! a_n$ sont appelés nombres de Bernoulli.

II.B – Formule de Taylor

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = \dfrac{1}{(1-\alpha)x^{\alpha-1}}$, où α est un réel strictement supérieur à 1.

Dans cette question II.B, on fixe un entier naturel non nul p et on note $g = a_0 f + a_1 f' + \cdots + a_{2p-1} f^{(2p-1)}$. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on pose $R(k) = g(k+1) - g(k) - f'(k)$ de sorte que $g(k+1) - g(k) = f'(k) + R(k)$.

II.B.1) En appliquant à g la formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre $2p$, montrer qu'il existe un réel A tel que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $|R(k)| \leqslant A k^{-(2p+\alpha)}$.

II.B.2) En déduire le développement asymptotique du reste

$$R_n(\alpha) = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} = -\Big(a_0 f(n) + a_1 f'(n) + a_2 f''(n) + \cdots + a_{2p-2} f^{(2p-2)}(n)\Big) + O\Big(\frac{1}{n^{2p+\alpha-1}}\Big)$$

On obtient ainsi une valeur approchée de $S(\alpha)$, donnée par

$$\widetilde{S}_{n,2p-2}(\alpha) = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^\alpha} - \Big(a_0 f(n) + a_1 f'(n) + a_2 f''(n) + \cdots + a_{2p-2} f^{(2p-2)}(n)\Big)$$

II.B.3) Donner le développement asymptotique de $R_n(3)$ correspondant au cas $\alpha = 3$ et $p = 3$.

III Polynômes de Bernoulli et formule sommatoire d'Euler-Maclaurin

On peut calculer, pour $n = 100$: $\widetilde{S}_{100,4}(3) = 1{,}202056903159594277\ldots$ tandis que $S(3)$ vaut $1{,}202056903159594285\ldots$ (constante d'Apéry). La méthode de la partie II semble satisfaisante, mais ne fournit pas d'information précise sur le terme $O\Big(\dfrac{1}{n^{2p+\alpha-1}}\Big)$. C'est pourquoi on introduit dans cette partie les polynômes de Bernoulli et la formule sommatoire d'Euler-Maclaurin.

III.A – Polynômes de Bernoulli

On définit une suite de polynômes $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} = (A_n(X))_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant les conditions suivantes

$$A_0 = 1,\ A'_{n+1} = A_n \text{ et } \int_0^1 A_{n+1}(t)\,dt = 0 \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \tag{III.1}$$

Les polynômes $B_n = n!A_n$ sont appelés polynômes de Bernoulli.

III.A.1) Propriétés élémentaires

a) Montrer que la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est déterminée de façon unique par les conditions III.1 ; préciser le degré de A_n ; calculer A_1, A_2 et A_3.

b) Montrer que $A_n(t) = (-1)^n A_n(1-t)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $t \in \mathbb{R}$.

c) Pour tout entier $n \geqslant 2$, montrer que $A_n(0) = A_n(1)$ et que $A_{2n-1}(0) = 0$.

d) On pose provisoirement $c_n = A_n(0)$ pour tout entier naturel n. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$A_n(X) = c_0\frac{X^n}{n!} + \cdots + c_{n-2}\frac{X^2}{2!} + c_{n-1}X + c_n$$

puis que, si $n \geqslant 1$,

$$\frac{c_0}{(n+1)!} + \cdots + \frac{c_{n-2}}{3!} + \frac{c_{n-1}}{2!} + c_n = 0$$

e) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a en fait $c_n = a_n$.

III.A.2) Fonction génératrice

a) Montrer que la série $\sum_n A_n(t)z^n$ converge pour tout réel $t \in [-1, 1]$ et tout complexe z vérifiant $|z| < 1$.

Sous ces conditions, on pose $f(t,z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} A_n(t)z^n$.

b) Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 1$. Montrer que la fonction $t \mapsto f(t,z)$ est dérivable sur $[0,1]$ et exprimer sa dérivée en fonction de $f(t,z)$. En déduire que, si $|z| < 1$ et $z \neq 0$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} A_n(t)z^n = \frac{ze^{tz}}{e^z - 1}.$$

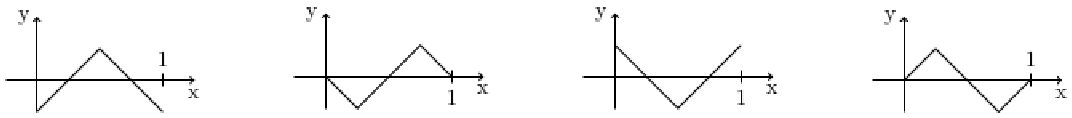
c) Montrer que, si $z \in \mathbb{C}$ et $|z| < 2\pi$, on a $\dfrac{ze^{z/2}}{e^z-1} + \dfrac{z}{e^z-1} = 2\dfrac{z/2}{e^{z/2}-1}$.

En déduire, pour tout entier naturel n, $A_n\left(\dfrac{1}{2}\right) = \left(\dfrac{1}{2^{n-1}} - 1\right)a_n$.

III.A.3) Variations des polynômes de Bernoulli

On établit ici une majoration des polynômes de Bernoulli sur $[0,1]$.

a) Montrer que pour tout entier naturel $n \geqslant 2$, les variations des polynômes A_n sur $[0,1]$ correspondent schématiquement aux quatre cas ci-dessous :



$n \equiv 0 (\mathrm{mod}\, 4)$ $n \equiv 1 (\mathrm{mod}\, 4)$ $n \equiv 2 (\mathrm{mod}\, 4)$ $n \equiv 3 (\mathrm{mod}\, 4)$

En d'autres termes, pour $n \geqslant 2$, on a :

1. Si $n \equiv 2 \bmod 4$, alors $A_n(0) = A_n(1) > 0 > A_n(\frac{1}{2})$; de plus, la fonction A_n est strictement décroissante sur $[0, \frac{1}{2}]$ et strictement croissante sur $[\frac{1}{2}, 1]$.
2. Si $n \equiv 0 \bmod 4$, alors $A_n(0) = A_n(1) < 0 < A_n(\frac{1}{2})$; de plus, la fonction A_n est strictement croissante sur $[0, \frac{1}{2}]$ et strictement décroissante sur $[\frac{1}{2}, 1]$.
3. Si $n \equiv 1 \bmod 4$, alors $A_n(0) = A_n(\frac{1}{2}) = A_n(1) = 0$; de plus, $A_n < 0$ sur $]0, \frac{1}{2}[$ et $A_n > 0$ sur $]\frac{1}{2}, 1[$.
4. Si $n \equiv 3 \bmod 4$, alors $A_n(0) = A_n(\frac{1}{2}) = A_n(1) = 0$; de plus, $A_n > 0$ sur $]0, \frac{1}{2}[$ et $A_n < 0$ sur $]\frac{1}{2}, 1[$.

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in [0,1]$, montrer que $|A_{2n}(x)| \leqslant |a_{2n}|$ et $|A_{2n+1}(x)| \leqslant \dfrac{|a_{2n}|}{2}$.

III.B – Formule sommatoire d'Euler-Maclaurin

III.B.1) Soit f une fonction complexe de classe C^∞ sur $[0,1]$.

a) Montrer que pour tout entier $q \geqslant 1$

$$f(1) - f(0) = \sum_{j=1}^{q} (-1)^{j+1} \left[A_j(t) f^{(j)}(t) \right]_0^1 + (-1)^q \int_0^1 A_q(t) f^{(q+1)}(t)\, dt$$

b) En tenant compte des relations trouvées dans la partie précédente, montrer que pour tout entier naturel impair $q = 2p+1$

$$f(1) - f(0) = \frac{1}{2}\left(f'(0) + f'(1)\right) - \sum_{j=1}^{p} a_{2j} \left(f^{(2j)}(1) - f^{(2j)}(0) \right) - \int_0^1 A_{2p+1}(t) f^{(2p+2)}(t)\, dt$$

III.B.2) Soit $n \in \mathbb{N}$ et soit f une fonction réelle de classe C^∞ sur $[n, +\infty[$. On suppose que f et toutes ses dérivées sont de signe constant sur $[n, +\infty[$ et tendent vers 0 en $+\infty$.

En appliquant, pour $k \geqslant n$, le résultat précédent à $f_k(t) = f(k+t)$, montrer

$$\sum_{k=n}^{+\infty} f'(k) = -f(n) + \frac{1}{2} f'(n) - \sum_{j=1}^{p} a_{2j} f^{(2j)}(n) + \int_n^{+\infty} A^*_{2p+1}(t) f^{(2p+2)}(t)\, dt$$

où on a posé $A^*_j(t) = A_j(t - [t])$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Montrer que

$$\left| \int_n^{+\infty} A^*_{2p+1}(t) f^{(2p+2)}(t) dt \right| \leqslant \left| \frac{a_{2p}}{2} \right| \left| f^{(2p+1)}(n) \right|$$

III.B.3) Montrer que, dans l'expression de $R_n(\alpha)$ du **II.B.2**, le terme $O\left(\dfrac{1}{n^{2p+\alpha-1}}\right)$ peut s'écrire sous forme d'une intégrale.

Correction.

Dans tout ce corrigé on notera $D(0,1)$ le disque unité de $\mathbb{C}$, c'est à dire : $D(0,1)=\{z\in\mathbb{C}\quad\text{tq}\quad |z|<1\}$. Rappelons en outre que : $\forall z\in D(0,1)$, la série $(\sum z^n)$

converge absolument de somme : $\sum\limits_{n=0}^{\infty} z^n=\frac{1}{1-z}$.

I Étude préliminaire

I.A– Convergence des séries de Riemann

I.A.1) $\forall x\in[k,k+1]\ ;\ \forall y\in[k-1,k]\ ;\ f(x)\le f(k)\le f(y)$

Alors : $\int_k^{k+1} f(x)dx\le\int_k^{k+1} f(k)dx=f(k)=\int_{k-1}^{k} f(k)dx\le\int_{k-1}^{k} f(y)dy$

I.A.2) Pour $\alpha\le 0$, la série $\left(\sum\frac{1}{n^\alpha}\right)$ diverge grossièrement.

Pour $\alpha>1$, on applique la question précédente pour $a=1$, et $f(t)=\frac{1}{t^\alpha}$.

$\forall k\ge 2,\ \frac{1}{k^\alpha}\le\int_{k-1}^{k}\frac{dt}{t^\alpha}$ et $\forall n\ge 2\,;\ \sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k^\alpha}\le 1+\int_1^n\frac{dt}{t^\alpha}=1+\left[\frac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right]_1^n\le\frac{\alpha}{\alpha-1}$

La suite $\left(\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k^\alpha}\right)_{n\ge 1}$ est croissante majorée, alors elle converge.

Pour $0<\alpha\le 1$, on applique aussi la question précédente pour $a=1$, et $f(t)=\frac{1}{t}$.

$\forall k\ge 1\,;\ \frac{1}{k^\alpha}\ge\frac{1}{k}\ge\int_k^{k+1}\frac{dt}{t}$ et $\forall n\ge 2\,;\ \sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k^\alpha}\ge\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\ge\int_1^{n+1}\frac{dt}{t}=\ln(n+1)\underset{n\to\infty}{\to}+\infty$.

Conclusion :

La série de Riemann $\left(\sum\frac{1}{n^\alpha}\right)$ converge si et seulement si $\alpha>1$.

I.A.3) D'aprés la question précèdente, pour tout $\alpha>1$, et tout $n\in\mathbb{N}^*$, $1\le\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k^\alpha}\le\frac{\alpha}{\alpha-1}$.

On fait tendre n vers l'infini, on obtient alors : $1\le S(\alpha)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^\alpha}\le\frac{\alpha}{\alpha-1}$.

I.B– Première étude asymptotique du reste

Dans la suite on pose : $\forall n\in\mathbb{N}^*\ ;\ \forall\alpha>1\ ;\ R_n(\alpha)=\sum\limits_{k=n}^{\infty}\frac{1}{k^\alpha}$.

I.B.1) $\forall k\ge n\ge 2\ ;\ \int_k^{k+1}\frac{dx}{x^\alpha}\le\frac{1}{k^\alpha}\le\int_{k-1}^{k}\frac{dx}{x^\alpha}$

Pour tout entier $N\ge n\ ;\ \int_n^{N+1}\frac{dx}{x^\alpha}\le\sum\limits_{k=n}^{N}\frac{1}{k^\alpha}\le\int_{n-1}^{N}\frac{dx}{x^\alpha}$

$\forall N\ge n\ge 2\ ;\ \left[\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right]_n^{N+1}\le\sum\limits_{k=n}^{N}\frac{1}{k^\alpha}\le\left[\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right]_{n-1}^{N}$.

On fait encore tendre N vers l'infini, on obtient : $\frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}\le R_n(\alpha)\le\frac{1}{(\alpha-1)(n-1)^{\alpha-1}}$.

D'où $\left|R_n(\alpha)-\frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}\right|\le\frac{1}{(\alpha-1)(n-1)^{\alpha-1}}-\frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}$

$\left|R_n(\alpha)-\frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}\right|\le\frac{-1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}(-(1-\frac{1}{n})^{1-\alpha}+1)=\frac{1}{(\alpha-1)n^\alpha}(\alpha-1+o(1))=O(\frac{1}{n^\alpha})$

Finalement : $R_n(\alpha)=\frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}+O(\frac{1}{n^\alpha})$.

I.B.2) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^{*+}$ par $f(x)=\frac{1}{(1-\alpha)x^{\alpha-1}}$.

f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^{*+}$, alors d'aprés la formule de Taylor avec reste intégral appliqué à f entre k et $(k+1)$ on a :

$\forall k\in\mathbb{N}^*\ ;\ f(k+1)=f(k)+f'(k)+\frac{f''(k)}{2}+\int_k^{k+1}\frac{(k+1-t)^2}{2}f'''(t)dt$.

$\forall k\in\mathbb{N}^*\ ;\ f(k+1)-f(k)=\frac{1}{k^\alpha}-\frac{\alpha}{2}\frac{1}{k^{\alpha+1}}+A_k$

$A_k=\int_k^{k+1}(k+1-t)^2\frac{\alpha(\alpha+1)}{2t^{\alpha+2}}dt\,;$ on a : $0\le A_k\le\frac{\alpha(\alpha+1)}{2k^{\alpha+2}}\int_k^{k+1}(k+1-t)^2dt\le\frac{\alpha(\alpha+1)}{2k^{\alpha+2}}\int_k^{k+1}dt$

$0\le A_k\le\frac{\alpha(\alpha+1)}{2k^{\alpha+2}}$.

I.B.3) D'aprés **I.B.2**) $\forall k \geq n \geq 1$; $f(k+1)-f(k)=\frac{1}{k^\alpha}-\frac{\alpha}{2}\frac{1}{k^{\alpha+1}}+A_k$ avec $0 \leq A_k \leq \frac{\alpha(\alpha+1)}{2k^{\alpha+2}}$.
$f(k+1)-f(k)-\frac{1}{k^\alpha}+\frac{\alpha}{2}\frac{1}{k^{\alpha+1}}=A_k$. D'où $\forall N \geq n \geq 1$;
$0 \leq f(N+1)-f(n)-\sum\limits_{k=n}^{N}\frac{1}{k^\alpha}+\frac{\alpha}{2}\sum\limits_{k=n}^{N}\frac{1}{k^{\alpha+1}}=\sum\limits_{k=n}^{N}A_k \leq \frac{\alpha(\alpha+1)}{2}\sum\limits_{k=n}^{N}\frac{1}{k^{\alpha+2}}$
On fait tendre N vers l'infini, on obtient alors :
$0 \leq -f(n)-R_n(\alpha)+\frac{\alpha}{2}R_n(\alpha+1) \leq \frac{\alpha(\alpha+1)}{2}R_n(\alpha+2)$. D'aprés **I.B.1**) on a :
$R_n(\alpha+1)=\frac{1}{\alpha n^\alpha}+O(\frac{1}{n^{\alpha+1}})$ et $R_n(\alpha+2) \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{(\alpha+1)n^{\alpha+1}}=O(\frac{1}{n^{\alpha+1}})$
D'où $-f(n)-R_n(\alpha)+\frac{1}{2n^\alpha}=O(\frac{1}{n^{\alpha+1}})$ c'est à dire : $R_n(\alpha)=\frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}+\frac{1}{2n^\alpha}+O(\frac{1}{n^{\alpha+1}})$

II Formule de Taylor et nombres de Bernoulli

II.A– Nombres de Bernoulli

II.A.1) Soient $p \in \mathbb{N}^*$, I un intervalle infini de $\mathbb{R}$, et $f : I \to \mathbb{C}$ une fonction de classe C^∞sur I.
Posons : $g=\sum\limits_{i=0}^{p-1}a_i f^{(i)}$.

$$\sum_{j=1}^{p}\frac{g^{(j)}}{j!}=\sum_{j=1}^{p}\frac{1}{j!}\sum_{i=0}^{p-1}a_i f^{(i+j)}=\sum_{k=1}^{2p-1}\left(\sum_{i=0}^{k-1}\frac{a_i}{(k-i)!}\right)f^{(k)}$$

$$\sum_{j=1}^{p}\frac{g^{(j)}}{j!}=a_0 f\,'+\sum_{k=2}^{p}\left(\sum_{i=0}^{k-1}\frac{a_i}{(k-i)!}\right)f^{(k)}+\sum_{k=p+1}^{2p-1}\left(\sum_{i=0}^{k-1}\frac{a_i}{(k-i)!}\right)f^{(k)}.$$

Soit alors $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite réelle définie par : $\begin{cases} a_0=1 \\ \forall k \geq 2\,;\, a_{k-1}=-\sum\limits_{i=0}^{k-2}\frac{a_i}{(k-i)!}\end{cases}$

L'égalité précèdente devient alors : $\sum\limits_{j=1}^{p}\frac{g^{(j)}}{j!}=f\,'+\sum\limits_{k=p+1}^{2p-1}\left(\sum\limits_{i=0}^{k-1}\frac{a_i}{(k-i)!}\right)f^{(k)}$.

$$\sum_{j=1}^{p}\frac{g^{(j)}}{j!}=f\,'+\sum_{l=1}^{p-1}\left(\sum_{i=0}^{l+p-1}\frac{a_i}{(l+p-i)!}\right)f^{(p+l)}$$

On pose alors : $\forall l \in [[1,p-1]]$; $b_{l,p}=\sum\limits_{i=0}^{l+p-1}\frac{a_i}{(l+p-i)!}$.

Ainsi l'existence de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est démontrée.
II.A.2) Soit maintenant $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite répondant aux conditions de la question précèdente.

D'aprés la question précédente : $\forall p \in \mathbb{N}^*$; $\forall f \in C^\infty(I,\mathbb{C})$

$$\sum_{j=1}^{p}\frac{g^{(j)}}{j!}=a_0 f\,'+\sum_{k=2}^{p}\left(\sum_{i=0}^{k-1}\frac{a_i}{(k-i)!}\right)f^{(k)}+\sum_{l=1}^{p-1}\left(\sum_{i=0}^{l+p-1}\frac{a_i}{(l+p-i)!}\right)f^{(p+l)}=f\,'+\sum_{l=1}^{p-1}b_{l,p}f^{(p+l)}$$

$$(a_0-1)f\,'+\sum_{k=2}^{p}\left(\sum_{i=0}^{k-1}\frac{a_i}{(k-i)!}\right)f^{(k)}+\sum_{l=1}^{p-1}\left(\left(\sum_{i=0}^{l+p-1}\frac{a_i}{(l+p-i)!}\right)-b_{l,p}\right)f^{(p+l)}=0$$

Pour $f(x)=x^p$, cet égalité s'écrit :
$p(a_0-1)x^{p-1}\sum\limits_{k=2}^{p}\left(\sum\limits_{i=0}^{k-1}\frac{a_i}{(k-i)!}\right)\frac{p!}{(p-k)!}x^{p-k}=0$.
C'est un polynôme nul, alors ses coefficients sont nuls, et par suite :
$a_0=1$ et $\forall k \geq 2\,;\, a_{k-1}=-\sum\limits_{j=0}^{k-2}\frac{a_j}{(k-j)!}$ ou encore : en posant : $p=k-1$ et $i=k-j=p+1-j$

$\boxed{a_0 = 1}$ et $\boxed{\forall p \geq 1 \;;\; a_p = -\sum_{i=2}^{p+1} \frac{a_{p+1-i}}{i!}}$; $\boxed{a_1 = \frac{-1}{2}}$; $\boxed{a_2 = \frac{1}{12}}$

Montrons par récurence sur p que : $\forall p \in \mathbb{N} \;;\; |a_p| \leq 1$
ceci est évident pour $p = 0$, soit $p \geq 1$ tel que : $\forall k \in [[0, p-1]] \;;\; |a_k| \leq 1$.

alors : $\forall i \in [[2, p+1]] \;;\; |a_{p+1-i}| \leq 1$. D'où : $|a_p| = \left|\sum_{i=2}^{p+1} \frac{a_{p+1-i}}{i!}\right| \leq \sum_{i=2}^{p+1} \frac{1}{i!} \leq e - 2 \leq 1$.

II.A.3) a) $\forall p \in \mathbb{N} \;;\; |a_p| \leq 1$, alors $\forall p \in \mathbb{N} \;;\; \forall z \in \mathbb{C} \;;\; |a_p z^p| \leq |z|^p$.

Si $|z| < 1$ alors la série $(\sum |z|^p)$ converge, et par suite la série $\left(\sum_{p\in\mathbb{N}} a_p z^p\right)$ converge aussi absolument. On note alors : $\varphi(z) = \sum_{p\in\mathbb{N}} a_p z^p$.

b) Pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que : $|z| < 1$, les deux séries : $e^z - 1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ et $\varphi(z) = \sum_{p\in\mathbb{N}} a_p z^p$ sont absolument convergentes, alors $(e^z - 1)\varphi(z) = \sum_{n=1}^{\infty} d_n z^n$ qui est la série produit de Cauchy des deux séries $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ et $\sum_{p\in\mathbb{N}} a_p z^p$.

$\forall n \in \mathbb{N}^* \;;\; d_{n+1} = \sum_{p=1}^{n+1} \frac{a_{n+1-p}}{p!} = a_n + \sum_{p=2}^{n+1} \frac{a_{n+1-p}}{p!} = 0 \quad et \quad d_1 = a_0 = 1.$

Pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que : $|z| < 1$, $(e^z - 1)\varphi(z) = z$ et $\varphi(z) = \frac{z}{e^z - 1}$ si $z \neq 0$.

Pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que : $|z| < 1$, on pose : $\psi(z) = \varphi(z) - a_1 z = \frac{z}{e^z-1} + \frac{z}{2} = \frac{2z + z(e^z-1)}{2(e^z-1)} = \frac{z + ze^z}{2(e^z-1)}$

$\psi(-z) = \frac{z + ze^{-z}}{2(1-e^{-z})} = \frac{(z + ze^{-z})e^z}{2(1-e^{-z})e^z} = \psi(z)$.

$\psi(z) = 1 + \sum_{k=2}^{\infty} a_k z^k$ est la somme d'une série entière paire sur $D(0,1)$.

D'où : $\forall k \in \mathbb{N}^* \;;\; a_{2k+1} = 0$.

$a_4 = -\sum_{i=2}^{5} \frac{a_{5-i}}{i!} = -(\frac{a_0}{5!} + \frac{a_1}{4!} + \frac{a_2}{3!} + \frac{a_3}{2!}) = -(\frac{1}{120} - \frac{1}{48} + \frac{1}{72}) = -\frac{6-15+10}{720} = -\frac{1}{720}$.

<u>Définition :</u>

Les nombres $b_n = n! a_n$ sont appelés nombres de Bernoulli.

<u>II.B– Formule de Taylor</u>

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = \frac{1}{(1-\alpha)x^{\alpha-1}}$, où $\alpha > 1$.

On fixe un entier naturel non nul p, et on note : $g = \sum_{i=0}^{2p-1} a_i f^{(i)}$.

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on pose : $R(k) = g(k+1) - g(k) - f'(k)$.

II.B.1) Remarquons d'abord que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+^*$, alors g l'est aussi.
Appliquons à g la formule de Taylor avec reste intégral entre k et $(k+1)$à l'ordre $2p$

$$g(k+1) - g(k) = \sum_{i=1}^{2p} \frac{g^{(i)}(k)}{i!} + \int_k^{k+1} \frac{(k+1-t)^{2p}}{(2p)!} f^{(2p+1)}(t)dt$$

$$g(k+1) - g(k) = f'(k) + \sum_{l=1}^{2p-1} b_{l,2p} f^{(2p+l)}(k) + \int_k^{k+1} \frac{(k+1-t)^{2p}}{(2p)!} f^{(2p+1)}(t)dt$$

$$R(k) = \sum_{l=1}^{2p-1} b_{l,2p} f^{(2p+l)}(k) + \int_k^{k+1} \frac{(k+1-t)^{2p}}{(2p)!} f^{(2p+1)}(t)dt$$

$$R(k)=\sum_{l=1}^{2p-1} b_{l,2p}\left[\frac{-\alpha(-\alpha-1)...(-\alpha-2p-l+1)}{k^{\alpha+2p+l}}\right]+\int_k^{k+1}\frac{(k+1-t)^{2p}}{(2p)!}\frac{-\alpha(-\alpha-1)...(-\alpha-2p)}{t^{\alpha+2p+1}}dt$$

$$|R(k)|\leq\sum_{l=1}^{2p-1}|b_{l,2p}|\left[\frac{\alpha(\alpha+1)...(\alpha+2p+l-1)}{k^{\alpha+2p+l}}\right]+\int_k^{k+1}\frac{(k+1-t)^{2p}}{(2p)!}\frac{\alpha(\alpha+1)...(\alpha+2p)}{t^{\alpha+2p+1}}dt$$

$$|R(k)|\leq\sum_{l=1}^{2p-1}|b_{l,2p}|\left[\frac{\alpha(\alpha+1)...(\alpha+2p+l-1)}{k^{\alpha+2p+l}}\right]+\frac{\alpha(\alpha+1)...(\alpha+2p)}{(2p)!}\int_k^{k+1}\frac{1}{t^{\alpha+2p+1}}dt$$

$$|R(k)|\leq\sum_{l=1}^{2p-1}|b_{l,2p}|\left[\frac{\alpha(\alpha+1)...(\alpha+2p+l-1)}{k^{\alpha+2p+l}}\right]+\frac{\alpha(\alpha+1)...(\alpha+2p)}{(2p)!}\int_k^{k+1}\frac{1}{k^{\alpha+2p+1}}dt$$

$$|R(k)|\leq\frac{1}{k^{\alpha+2p}}\left(\sum_{l=1}^{2p-1}|b_{l,2p}|\left[\frac{\alpha(\alpha+1)...(\alpha+2p+l-1)}{k^{l}}\right]+\frac{\alpha(\alpha+1)...(\alpha+2p)}{(2p)!}\frac{1}{k}\right)$$

$$|R(k)|\leq\frac{1}{k^{\alpha+2p}}\left(\sum_{l=1}^{2p-1}|b_{l,2p}|\left[\alpha(\alpha+1)...(\alpha+2p+l-1)\right]+\frac{\alpha(\alpha+1)...(\alpha+2p)}{(2p)!}\right)$$

D'où pour $A=\left(\sum_{l=1}^{2p-1}|b_{l,2p}|\left[\alpha(\alpha+1)...(\alpha+2p+l-1)\right]+\frac{\alpha(\alpha+1)...(\alpha+2p)}{(2p)!}\right)$;
$\forall k\in\mathbb{N}^*$; $|R(k)|\leq\frac{A}{k^{\alpha+2p}}$.

II.B.2) D'aprés la question précèdente : $\forall k\in\mathbb{N}^*$; $g(k+1)-g(k)=f'(k)+R(k)$.
$\forall N\geq n\geq 1$; $\sum_{k=n}^{N}\frac{1}{k^\alpha}+\sum_{k=n}^{N}R(k)=g(N+1)-g(n)$.
On fait tendre N vers l'infini, on obtient : $|R_n(\alpha)+g(n)|\leq AR_n(\alpha+2p)=O(\frac{1}{n^{\alpha+2p-1}})$
D'où : $R_n(\alpha)=-g(n)+O(\frac{1}{n^{\alpha+2p-1}})$. autrement dit :
$R_n(\alpha)=-\sum_{i=0}^{2p-1}a_if^{(i)}(n)+O(\frac{1}{n^{\alpha+2p-1}})$. or pour $p\geq 2$; $a_{2p-1}=0$, alors pour $p\geq 2$, on a :
$R_n(\alpha)=-\sum_{i=0}^{2p-2}a_if^{(i)}(n)+O(\frac{1}{n^{\alpha+2p-1}})$. or on a déjà établit cet égalité dans la première partie

pour $p=1$, d'où pour tout entier non nul p on a :

$$R_n(\alpha)=-\sum_{i=0}^{2p-2}a_if^{(i)}(n)+O(\frac{1}{n^{\alpha+2p-1}})$$

II.B.3) $R_n(3)=-a_0f(n)-a_1f'(n)-a_2f''(n)-a_3f'''(n)-a_4f^{(4)}(n)+O(\frac{1}{n^8})$.
$f(n)=\frac{-1}{2n^2}$; $f'(n)=\frac{1}{n^3}$; $f''(n)=\frac{-3}{n^4}$; $f'''(n)=\frac{12}{n^5}$; $f^{(4)}(n)=\frac{-60}{n^6}$
$a_0=1$; $a_1=\frac{-1}{2}$; $a_2=\frac{1}{12}$; $a_3=0$; $a_4=\frac{-1}{720}$.
$\boxed{R_n(3)=\frac{1}{2n^2}+\frac{1}{2n^3}+\frac{3}{12n^4}-\frac{1}{12n^6}+O(\frac{1}{n^8})}$

III Polynômes de Bernoulli et formule sommatoire d'Euler-Maclaurin

III.A− Polynômes de Bernoulli

On définit une suite de polynômes $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant :
$A_0=1$; $\forall n\in\mathbb{N}$; $A'_{n+1}=A_n$ et $\int_0^1 A_{n+1}(t)dt=0$.

Les polynômes $B_n = n!A_n$ s'appellent les polynômes de Bernoulli.

III.A.1) Propriétés élémentaires

a) A_0 est uniquement déterminé et $\deg(A_0) = 0$, $A_1 = X + \lambda$ et $\int_0^1 (t+\lambda)dt = 0 = \frac{1}{2} + \lambda$
Alors $A_1 = X - \frac{1}{2}$ est bien déterminé et $\deg(A_1) = 1$.
Soit $n \geq 1$ tel que : $\forall k \in [[0, n]]$; A_k existe et unique et $\deg(A_k) = k$.
Alors A_{n+1} est un polynôme de degré $(n+1)$.
$A_{n+1}(X) = A_{n+1}(0) + \int_0^X A_n(t)dt$ et $\int_0^1 A_{n+1}(t)dt = 0 = A_{n+1}(0) + \int_0^1 \left(\int_0^x A_n(t)dt\right) dx$
$A_{n+1}(X) = \int_0^X A_n(t)dt - \int_0^1 \left(\int_0^x A_n(t)dt\right) dx$ est donc un polynôme uniquement déterminé.
$A_2 = \frac{1}{2}X^2 - \frac{1}{2}X + \mu$ et $\int_0^1 (\frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{2}t + \mu)dt = 0 = \frac{1}{6} - \frac{1}{4} + \mu$, alors $\mu = \frac{1}{12}$.
$A_2 = \frac{1}{6}X^3 - \frac{1}{4}X^2 + \frac{1}{12}X + \nu$ et $\int_0^1 (\frac{1}{6}t^3 - \frac{1}{4}t^2 + \frac{1}{12}t + \nu)dt = 0 = \frac{1}{24} - \frac{1}{12} + \frac{1}{24} + \nu$, alors $\nu = 0$.

$\boxed{A_0 = 1}$; $\boxed{A_1 = X - \frac{1}{2}}$; $\boxed{A_2 = \frac{1}{2}X^2 - \frac{1}{2}X + \frac{1}{12}}$; $\boxed{A_3 = \frac{1}{6}X^3 - \frac{1}{4}X^4 + \frac{1}{12}X}$

b) Posons : $\forall n \in \mathbb{N}$; $\alpha_n(X) = (-1)^n A_n(1-X)$.
$(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de polynômes telle que :
$\alpha_0 = 1$; $\forall n \in \mathbb{N}$; $\alpha'_{n+1} = \alpha_n$ et $\int_0^1 \alpha_{n+1}(t)dt = \int_0^1 A_{n+1}(u)du = 0$. (poser : $u = 1 - t$)
Alors par unicité de l'existence de la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ établit à la question précèdente, on déduit

que : $\forall n \in \mathbb{N}$; $A_n = \alpha_n$ c'est à dire : $\forall n \in \mathbb{N}$; $A_n(X) = (-1)^n A_n(1-X)$.
c) $\forall n \geq 2$; $A_n(1) - A_n(0) = \int_0^1 A_{n-1}(t)dt = 0$.
D'aprés la question précèdente on a : $A_{2n-1}(0) = (-1)^{2n-1}A_{2n-1}(1) = -A_{2n-1}(0)$. ($2n - 1 \geq 2$)

D'où : $\forall n \geq 2$; $A_n(1) = A_n(0)$ et $A_{2n-1}(0) = 0$.
d) On pose : $\forall n \in \mathbb{N}$; $c_n = A_n(0)$. $c_0 = 1 = A_0(0) = A_0(X)$.

Soit $n \in \mathbb{N}$, tel que : $A_n(X) = \sum\limits_{i=0}^{n} c_i \frac{X^{n-i}}{(n-i)!}$, alors : $A_{n+1}(X) = \sum\limits_{i=0}^{n} c_i \frac{X^{n+1-i}}{(n+1-i)!} + A_{n+1}(0) = \sum\limits_{i=0}^{n+1} c_i \frac{X^{n+1-i}}{(n+1-i)!}$
D'aprés la question précèdente : $\forall n \geq 1$; $A_{n+1}(1) - A_{n+1}(0) = 0 = \sum\limits_{i=0}^{n} \frac{c_i}{(n+1-i)!}$.

e) D'aprés la formule ci dessus : $c_0 = 1$ et $\forall n \geq 1$; $c_n = -\sum\limits_{i=0}^{n-1} \frac{c_i}{(n+1-i)!} = -\sum\limits_{i=2}^{n+1} \frac{c_{n+1-i}}{i!}$.

Alors d'aprés la question **II.A.2**), $\forall n \in \mathbb{N}$; $a_n = c_n$.

III.A.2) Fonction génératrice

a) $\forall t \in [-1, 1]$; $\forall n \in \mathbb{N}$; $|A_n(t)| = \left| \sum\limits_{i=0}^{n} a_i \frac{t^{n-i}}{(n-i)!} \right| \leq \sum\limits_{i=0}^{n} \frac{|a_i|}{(n-i)!} \leq \sum\limits_{i=0}^{n} \frac{1}{(n-i)!}$ (selon **II.A.2**))
$\forall z \in D(0,1)$; $\forall t \in [-1, 1]$; $\forall n \in \mathbb{N}$; $|A_n(t)| \, |z|^n \leq e \, |z|^n$
D'où la série $(\sum A_n(t)z^n)$ converge absolument pour tout $t \in [-1, 1]$ et tout $z \in D(0, 1)$.
On posera alors : $f(t, z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} A_n(t)z^n$.
b) Fixons $z \in D(0, 1)$ et posons : $\forall t \in [0, 1]$; $f_z(t) = f(t, z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} A_n(t)z^n$.
D'aprés la question précèdente, cette série converge normalement sur $[0, 1]$.
$\forall n \in \mathbb{N}$; posons : $g_n(t) = A_n(t)z^n$; g_n est une fonction polynôme donc de classe C^1 sur $[0, 1]$, et $\forall n \in \mathbb{N}^*$; $g'_n(t) = A'_n(t)z^n = zg_{n-1}(t)$, alors la série $(\sum g'_n(t))$ est aussi normalement convergente pour $t \in [0, 1]$. D'où ; f_z définit une application de classe C^1 sur $[0, 1]$ et

$\forall t \in [0,1]$; $f_z{}'(t) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} z g_{n-1}(t) = z f_z(t)$.
Alors il existe une constante complexe δ_z telle que : $\forall t \in [0,1]$; $f_z(t) = \delta_z e^{tz}$
$\forall t \in [0,1]$; $f_z(0) = \delta_z = \sum\limits_{n=0}^{\infty} A_n(0) z^n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n = \frac{z}{e^z-1}$ si $z \neq 0$ (d'aprés : **II.A.3)b)**)

Finalement : $\boxed{\forall t \in [0,1] \ ; \ \forall z \in D(0,1)\backslash\{0\} \ ; \ \sum\limits_{n=0}^{\infty} A_n(t) z^n = \frac{z e^{tz}}{e^z-1}}$.

c) Soit $z \in \mathbb{C}^*$ tel que : $|z| < 2\pi$. $\frac{z e^{z/2} + z}{e^z - 1} = \frac{z(e^{z/2}+1)}{\left(e^{z/2}\right)^2 - 1} = \frac{z}{e^{z/2}-1} = 2\frac{z/2}{e^{z/2}-1}$.
Alors pour tout $z \in D(0,1)\backslash\{0\}$;
$f_z(\frac{1}{2}) + f_z(0) = 2 f_{z/2}(0) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(A_n(\frac{1}{2}) + A_n(0)\right) z^n = 2 \sum\limits_{n=0}^{\infty} A_n(0) \left(\frac{z}{2}\right)^n$.
Alors par identification des deux séries entières qui sont de rayon de convergence non nul, on a :
$\forall n \in \mathbb{N}$; $A_n(\frac{1}{2}) + a_n = 2\frac{a_n}{2^n}$. D'où : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \ ; \ A_n(\frac{1}{2}) = \left(\frac{1}{2^{n-1}} - 1\right) a_n}$.

III.A.3) Variations des polynômes de Bernoulli
a) (i) $A_2 = \frac{1}{2}X^2 - \frac{1}{2}X + \frac{1}{12}$; $A_2'(x) = x - \frac{1}{2}$; A_2 est strictement décroissante sur $[0, \frac{1}{2}]$ et strictement croissante sur $[\frac{1}{2}, 1]$. $A_2(0) = A_2(1) = \frac{1}{12} > 0 > A_2(\frac{1}{2}) = -\frac{1}{2}a_2 = \frac{-1}{24}$.
(ii) Soit $n \in \mathbb{N}$, tel que : $\forall k \in [[2, 4n+2]]$; A_k satisfait les conditions données à l'énoncé.
A_{4n+2} est strictement décroissante sur $[0, \frac{1}{2}]$ et strictement croissante sur $[\frac{1}{2}, 1]$.
$A_{4n+2}(0) = A_{4n+2}(1) > 0 > A_{4n+2}(\frac{1}{2})$.
Il existe un unique couple de réels (u, v) tel que : $0 < u < \frac{1}{2} < v < 1$ et $A_{4n+2}(u) = A_{4n+2}(v) = 0$.
et donc $A_{4n+2}(t) > 0$ sur $]0, u[$; $A_{4n+2}(t) < 0$ sur $]u, v[$; $A_{4n+2}(t) > 0$ sur $]v, 1[$
$\forall t \in [0,1]$; $A'_{4n+3}(t) = A_{4n+2}(t)$
A_{4n+3} est strictement croissante sur $[0, u]$ et sur $[v, 1]$, et strictement décroissante sur $[u, v]$.
D'aprés : **III.A.1)c)** $A_{4n+3}(0) = A_{4n+3}(1) = 0 = a_{4n+3}$ donc d'aprés la question précèdente :
On déduit : $A_{4n+3}(0) = A_{4n+3}(1) = A_{4n+3}(\frac{1}{2}) = 0$.
Les variations ci dessus de A_{4n+3} permettent alors de déduire que :
$A_{4n+3}(t) < 0$ si $t \in]\frac{1}{2}, 1[$ et $A_{4n+3}(t) > 0$ si $t \in]0, \frac{1}{2}[$.
(iii) On refait le même procédé en exploitant les variations de A_{4n+3} établits ci dessus et le faite que $A_{4n+3} = A'_{4n+4}$ pour établir les propriétés relatives à A_{4n+4}.
et ensuite celle de A_{4n+5} par le même procédé.

Par récurrence sur n, on obtient alors les propriétés énoncées dans le texte de ce problème.

b) D'aprés les propriétés de la question précédente : $\forall n \in \mathbb{N}^*$; $\forall x \in [0,1]$

(i) $|A_{2n}(x)| \leq \max(|A_{2n}(0)|, |A_{2n}(\frac{1}{2})|) = \max(|a_{2n}|, \left|\left(\frac{1}{2^{2n-1}} - 1\right) a_{2n}\right| = |a_{2n}|$.
(ii) $|A_{2n+1}(x)| = \left|A_{2n+1}(x) - A_{2n+1}(\frac{1}{2})\right| \leq \sup\limits_{y \in [0,1]} \left|A'_{2n+1}(y)\right| \left|x - \frac{1}{2}\right| = \sup\limits_{y \in [0,1]} |A_{2n}(y)| \left|x - \frac{1}{2}\right| \leq \frac{|a_{2n}|}{2}$.

où l'on a utilisé l'inégalité des accroissements finis et le (i) ci dessus.
III.B– Formule sommatoire d'Euler-Maclaurin
III.B.1) Soit f une fonction de classe C^∞ sur $[0,1]$.
a) Par récurrence sur $q \geq 1$, montrons que :

$\forall q \in \mathbb{N}^*$; $f(1)-f(0)=\sum\limits_{j=1}^{q}(-1)^{j+1}\left[A_j(t)f^{(j)}(t)\right]_0^1+(-1)^q\int_0^1 A_q(t)f^{(q+1)}(t)dt.$
Pour $q=1$:
$\int_0^1 A_1(t)f\,''(t)dt=[A_1(t)f\,'(t)]_0^1-\int_0^1 A_1'(t)f\,'(t)dt=[A_1(t)f\,'(t)]_0^1-\int_0^1 f\,'(t)dt$

$\int_0^1 A_1(t)f\,''(t)dt=[A_1(t)f\,'(t)]_0^1-(f(1)-f(0))$
La propriété est établit pour $q=1$.
Soit $q\in\mathbb{N}^*$ tel que : $f(1)-f(0)=\sum\limits_{j=1}^{q}(-1)^{j+1}\left[A_j(t)f^{(j)}(t)\right]_0^1+(-1)^q\int_0^1 A_q(t)f^{(q+1)}(t)dt.$

Par intégration par parties on a :
$\int_0^1 A_q(t)f^{(q+1)}(t)dt=\left[A_{q+1}(t)f^{(q+1)}(t)\right]_0^1-\int_0^1 A_{q+1}(t)f^{(q+2)}(t)dt.$ remplaçons dans l'égalité ci dessus on obtient :
$f(1)-f(0)=\sum\limits_{j=1}^{q+1}(-1)^{j+1}\left[A_j(t)f^{(j)}(t)\right]_0^1+(-1)^{q+1}\int_0^1 A_{q+1}(t)f^{(q+2)}(t)dt.$

b) On applique la question précèdente pour $q=2p+1$.
$f(1)-f(0)=\sum\limits_{j=1}^{2p+1}(-1)^{j+1}\left[A_j(t)f^{(j)}(t)\right]_0^1-\int_0^1 A_{2p+1}(t)f^{(2p+2)}(t)dt.$
$f(1)-f(0)=\sum\limits_{j=1}^{2p+1}(-1)^{j+1}\left(A_j(1)f^{(j)}(1)-A_j(0)f^{(j)}(0)\right)-\int_0^1 A_{2p+1}(t)f^{(2p+2)}(t)dt.$
$f(1)-f(0)=\frac{1}{2}(f\,'(0)+f\,'(1))+\sum\limits_{j=2}^{2p+1}(-1)^{j+1}\left(A_j(1)f^{(j)}(1)-A_j(0)f^{(j)}(0)\right)-\int_0^1 A_{2p+1}(t)f^{(2p+2)}(t)dt.$
Donc en utilisant **III.A.1)c)**

$f(1)-f(0)=\frac{1}{2}(f\,'(0)+f\,'(1))-\sum\limits_{j=1}^{p}a_{2j}\left(f^{(2j)}(1)-f^{(2j)}(0)\right)-\int_0^1 A_{2p+1}(t)f^{(2p+2)}(t)dt.$
III.B.2) Soient $n\in\mathbb{N}$ et f une fonction de classe C^∞ sur $[n,+\infty[$.
On suppose que f et toutes ses dérivées sont de signe constant sur $[n,+\infty[$ et tendent vers 0 en $+\infty$.
Pour tout $k\geq n$, on pose : $f_k(t)=f(k+t)$.
f_k est C^∞ sur $[0,1]$, alors d'aprés la question précèdente : $\forall p\in\mathbb{N}^*$ on a :
$f_k(1)-f_k(0)=\frac{1}{2}(f_k'(0)+f_k'(1))-\sum\limits_{j=1}^{p}a_{2j}\left(f_k^{(2j)}(1)-f_k^{(2j)}(0)\right)-\int_0^1 A_{2p+1}(t)f_k^{(2p+2)}(t)dt.$
$f(k+1)-f(k)=\frac{1}{2}(f\,'(k)+f\,'(k+1))-\sum\limits_{j=1}^{p}a_{2j}\left(f^{(2j)}(k+1)-f^{(2j)}(k)\right)-\int_0^1 A_{2p+1}(t)f^{(2p+2)}(k+t)dt.$
Alors selon le changement de variable : $u=k+t$, on obtient :
$f(k+1)-f(k)=\frac{1}{2}(f\,'(k)+f\,'(k+1))-\sum\limits_{j=1}^{p}a_{2j}\left(f^{(2j)}(k+1)-f^{(2j)}(k)\right)-\int_k^{k+1} A_{2p+1}(u-k)f^{(2p+2)}(u)du$
$f(k+1)-f(k)=\frac{1}{2}(f\,'(k)+f\,'(k+1))-\sum\limits_{j=1}^{p}a_{2j}\left(f^{(2j)}(k+1)-f^{(2j)}(k)\right)-\int_k^{k+1} A_{2p+1}^*(t)f^{(2p+2)}(t)dt.$

Soit $N \geq n$, et sommons l'expression précèdente entre n et N.
$f(N+1) - f(n) = \sum\limits_{k=n}^{N} f'(k) - \frac{1}{2}f'(n) + \frac{1}{2}f'(N+1) - \sum\limits_{j=1}^{p} a_{2j}\left(f^{(2j)}(N+1) - f^{(2j)}(n)\right) - \int_n^{N+1} A^*_{2p+1}(t)f^{(2p+2)}(t)dt$
$\forall j \in \mathbb{N}$; $f^{(j)}$ garde un signe constant sur $[n, +\infty[$ et tend vers 0 en $+\infty$, alors $\forall j \in \mathbb{N}^*$ $f^{(j)}$ est intégrable sur $[n, +\infty[$, de plus, d'aprés **III.A.3)b)** et **II.A.2)** ; $\forall x \in [0,1]$; $|A_{2p+1}(x)| \leq 1$
Alors : $\forall t \in [n, +\infty[$; $\left|A^*_{2p+1}(t)f^{(2p+2)}(t)\right| \leq \left|f^{(2p+2)}(t)\right|$.
L'application $[t \longmapsto A^*_{2p+1}(t)f^{(2p+2)}(t)]$ est donc continue par morceaux intégrable sur $[n, +\infty[$.
D'où $\lim\limits_{N\to\infty} \int_n^{N+1} A^*_{2p+1}(t)f^{(2p+2)}(t)dt$ existe bien et par conséquent $\lim\limits_{N\to\infty}\left(\sum\limits_{k=n}^{N} f'(k)\right)$ existe aussi.
On fait alors tendre N vers l'infini dans l'égalité ci dessus on obtient :
$\sum\limits_{k=n}^{\infty} f'(k) = -f(n) + \frac{1}{2}f'(n) - \sum\limits_{j=1}^{p} a_{2j}f^{(2j)}(n) + \int_n^{+\infty} A^*_{2p+1}(t)f^{(2p+2)}(t)dt.$
En utilisant **III.A.3)b)** On a : $\left|\int_n^{+\infty} A^*_{2p+1}(t)f^{(2p+2)}(t)dt\right| \leq \int_n^{+\infty} \frac{|a_{2p}|}{2}\left|f^{(2p+2)}(t)\right| dt$

Puisque $f^{(2p+2)}$ garde un signe constant sur $[n, +\infty[$, alors :
$\int_n^{+\infty} \left|f^{(2p+2)}(t)\right| dt = \left|\int_n^{+\infty} f^{(2p+2)}(t)dt\right| = \left|f^{(2p+1)}(n)\right|$. D'où $\left|\int_n^{+\infty} A^*_{2p+1}(t)f^{(2p+2)}(t)dt\right| \leq$

$\frac{|a_{2p}|}{2}\left|f^{(2p+1)}(n)\right|$.
III.B.2) On a vu dans **II.B.2)** que : $R_n(\alpha) = -\sum\limits_{i=0}^{2p-2} a_i f^{(i)}(n) + O(\frac{1}{n^{\alpha+2p-1}})$
$R_n(\alpha) = -f(n) + \frac{1}{2}f'(n) - \sum\limits_{i=2}^{2p-2} a_i f^{(i)}(n) + O(\frac{1}{n^{\alpha+2p-1}}).$
Alors selon la question : **II.A.3)c)** et pour $f(t) = \frac{1}{(1-\alpha)t^{\alpha-1}}$ qui définit bien une application de classe C^∞ sur $[n, +\infty[$ qui satisfait bien les conditions de **II.A.2)**, l'égalité précèdente s'écrit :
$\sum\limits_{k=n}^{\infty} f'(k) = -f(n) + \frac{1}{2}f'(n) - \sum\limits_{j=1}^{p-1} a_{2j}f^{(2j)}(n) + O(\frac{1}{n^{\alpha+2p-1}}).$
Identifions avec l'égalité de la question précèdente, le terme $O(\frac{1}{n^{\alpha+2p-1}})$ s'écrit sous forme :

d'une intégrale, qui est : $\int_n^{+\infty} A^*_{2p-1}(t)f^{(2p)}(t)dt$. On écrit alors :
$R_n(\alpha) = -f(n) + \frac{1}{2}f'(n) - \sum\limits_{j=1}^{p-1} a_{2j}f^{(2j)}(n) + \int_n^{+\infty} A^*_{2p-1}(t)f^{(2p)}(t)dt.$

IV Compléments sur l'erreur

On fixe ici un réel $\alpha > 1$ et on considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*_+$ par $f(x) = \frac{1}{(1-\alpha)x^{\alpha-1}}$.

IV.A– Encadrement de l'erreur

IV.A.1) Soit g une fonction continue par morceaux croissante sur $[0,1]$.
$\int_0^1 A_n(t)g(t)dt = \int_0^{1/2} A_n(t)g(t)dt + \int_{1/2}^1 A_n(t)g(t)dt$. On change la deuxième intégrale par le changement de variable : $u = 1-t$, on obtient :
$\int_0^1 A_n(t)g(t)dt = \int_0^{1/2} A_n(t)g(t)dt + \int_0^{1/2} A_n(1-t)g(1-t)dt$. et d'aprés **III.A.1)b)**
$\int_0^1 A_n(t)g(t)dt = \int_0^{1/2} A_n(t)(g(t) + (-1)^n g(1-t))dt$
Alors pour n impair, ceci s'écrit : $\int_0^1 A_n(t)g(t)dt = \int_0^{1/2} A_n(t)(g(t) - g(1-t))dt.$
g est croissante, alors : $\forall t \in [0, \frac{1}{2}]$; $(g(t) - g(1-t)) \leq 0$.
Si $n \equiv 1 \pmod 4$ alors : $\forall t \in [0, \frac{1}{2}]$; $A_n(t) \leq 0$, d'où : $\int_0^1 A_n(t)g(t)dt \geq 0$.

Si $n \equiv 3 \pmod 4$ alors : $\forall t \in [0, \frac{1}{2}]$; $A_n(t) \geq 0$, d'où : $\int_0^1 A_n(t)g(t)dt \leq 0$.
IV.A.2) On reprend les notations de **II.B.2**) et le résultat du **III.B.2**)
$R_n(\alpha) = -f(n) + \frac{1}{2}f\,'(n) - \sum\limits_{j=1}^{p-1} a_{2j} f^{(2j)}(n) + \int_n^{+\infty} A_{2p-1}^*(t) f^{(2p)}(t)dt.$
$R_n(\alpha) = \widetilde{S}_{n,2p-2}(\alpha) - \sum\limits_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^\alpha} + \int_n^{+\infty} A_{2p-1}^*(t) f^{(2p)}(t)dt.$
$S(\alpha) = \widetilde{S}_{n,2p-2}(\alpha) + \int_n^{+\infty} A_{2p-1}^*(t) f^{(2p)}(t)dt.$
Remlaçons successivement dans cet égalité p par $(2p+1)$, $(2p+2)$, et $2p$. On obtient :
(i) $S(\alpha) = \widetilde{S}_{n,4p}(\alpha) + \int_n^{+\infty} A_{4p+1}^*(t) f^{(4p+2)}(t)dt.$
(ii) $S(\alpha) = \widetilde{S}_{n,4p+2}(\alpha) + \int_n^{+\infty} A_{4p+3}^*(t) f^{(4p+4)}(t)dt.$
(iii) $S(\alpha) = \widetilde{S}_{n,4p-2}(\alpha) + \int_n^{+\infty} A_{4p-1}^*(t) f^{(4p)}(t)dt.$
Examinons le cas (i). $\int_n^{+\infty} A_{4p+1}^*(t) f^{(4p+2)}(t)dt = \sum\limits_{k=n}^{\infty} \int_k^{k+1} A_{4p+1}^*(t) f^{(4p+2)}(t)dt$
$\int_n^{+\infty} A_{4p+1}^*(t) f^{(4p+2)}(t)dt = \sum\limits_{k=n}^{\infty} \int_k^{k+1} A_{4p+1}(t-k) f^{(4p+2)}(t)dt = \sum\limits_{k=n}^{\infty} \int_0^1 A_{4p+1}(u) f^{(4p+2)}(u+k)dt.$
L'application : $[u \longmapsto f^{(4p+2)}(u+k)]$ est continue croissante sur $[0,1]$, alors d'aprés la question précèdente : $\int_0^1 A_{4p+1}(u) f^{(4p+2)}(u+k)dt \geq 0$ et par conséquent : $\int_n^{+\infty} A_{4p+1}^*(t) f^{(4p+2)}(t)dt \geq 0$
D'où $\widetilde{S}_{n,4p}(\alpha) \leq S(\alpha)$.
De la même manière on a : $\int_n^{+\infty} A_{4p+3}^*(t) f^{(4p+4)}(t)dt \leq 0$ et $\int_n^{+\infty} A_{4p-1}^*(t) f^{(4p)}(t)dt \leq 0$.
D'où les inégalités : $\widetilde{S}_{n,4p}(\alpha) \leq S(\alpha) \leq \widetilde{S}_{n,4p+2}(\alpha)$ et $\widetilde{S}_{n,4p}(\alpha) \leq S(\alpha) \leq \widetilde{S}_{n,4p-2}(\alpha)$.

Soit maintenant $p \geq 1$. On va utiliser ces deux inégalités dans les deux cas suivants :
Premier cas : Si p est pair ; $p = 2q$
$0 \leq S(\alpha) - \widetilde{S}_{n,2p}(\alpha) = S(\alpha) - \widetilde{S}_{n,4q}(\alpha) \leq \widetilde{S}_{n,4q+2}(\alpha) - \widetilde{S}_{n,4q}(\alpha) = -a_{4q+2} f^{(4q+2)}(n) = -a_{2p+2} f^{(2p+2)}(n).$

D'où $\left| S(\alpha) - \widetilde{S}_{n,2p}(\alpha) \right| \leq \left| a_{2p+2} f^{(2p+2)}(n) \right|$.
Deuxième cas : Si p est impair ; $p = 2q-1$
$0 \leq \widetilde{S}_{n,2p}(\alpha) - S(\alpha) = \widetilde{S}_{n,4q-2}(\alpha) - S(\alpha) \leq \widetilde{S}_{n,4q-2}(\alpha) - \widetilde{S}_{n,4q}(\alpha) = a_{4q} f^{(4q)}(n) = a_{2p+2} f^{(2p+2)}(n).$

D'où $\left| S(\alpha) - \widetilde{S}_{n,2p}(\alpha) \right| \leq \left| a_{2p+2} f^{(2p+2)}(n) \right|$.
IV.A.3) Dans cette question on reprend le cas de **II.B.3**), on applique la question précèdente, on obtient : $\left| S(3) - \widetilde{S}_{100,4}(3) \right| \leq \left| a_6 f^{(6)}(100) \right| = \frac{1}{720.42} \left| f^{(6)}(100) \right|$.
$f(x) = \frac{-1}{2x^2}$; $f\,'(x) = \frac{1}{x^3}$; $f\,''(x) = \frac{-3}{x^4}$; $f^{(3)}(x) = \frac{12}{x^5}$; $f^{(4)}(x) = \frac{-60}{x^6}$; $f^{(5)}(x) = \frac{360}{x^7}$; $f^{(6)}(x) = \frac{-360.7}{x^8}$.
$f^{(6)}(100) = -360.7.10^{-16}$, alors $\left| S(3) - \widetilde{S}_{100,4}(3) \right| \leq \frac{360.7.10^{-16}}{720.42} = \frac{1}{12} 10^{-16} \leq 10^{-17}$.

IV.B– Séries de Fourier
Pour tout entier naturel $p \geq 1$ et tout réel x, on pose : $\widetilde{A}_p(x) = A_p(\frac{x}{2\pi} - \left[\frac{x}{2\pi}\right])$.
IV.B.1) A_p est continue sur $\mathbb{R}$ et l'application $[x \longmapsto \frac{x}{2\pi} - \left[\frac{x}{2\pi}\right]]$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$, alors $\widetilde{A}_p$ est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$.
$\widetilde{A}_p(x+2\pi) = A_p(\frac{x+2\pi}{2\pi} - \left[\frac{x+2\pi}{2\pi}\right]) = A_p(\frac{x}{2\pi} + 1 - \left[\frac{x}{2\pi} + 1\right]) = \widetilde{A}_p(x)$.

IV.B.2) $\widehat{A}_p(n) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \widetilde{A}_p(t) e^{-int} dt$.

$\forall t \in [0, 2\pi[\ ;\ \left[\frac{t}{2\pi}\right] = 0$ et $\widetilde{A}_p(t) = A_p(\frac{t}{2\pi})$ et $\widehat{A}_p(n) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} A_p(\frac{t}{2\pi})e^{-int}dt$. On pose : $x = \frac{t}{2\pi}$.
$\widehat{A}_p(n) = \int_0^1 A_p(x)e^{-2i\pi nx}dx$. Fixons $n \in \mathbb{Z}^*$et posons : $h(x) = \frac{e^{-2i\pi nx}}{(-2i\pi n)^{p+1}}$. h est C^∞ sur $[0,1]$ et on a :
$\widehat{A}_p(n) = \int_0^1 A_p(x)h^{(p+1)}(x)dx$. Appliquons maintenant la question **III.B.1**).
$\widehat{A}_p(n) = (-1)^p(h(1) - h(0)) - (-1)^p \sum\limits_{j=1}^{q} (-1)^{j+1}\left[A_j(t)h^{(j)}(t)\right]_0^1$

Vu que h est ses dérivées successives sont 1-périodiques et que d'aprés **III.A.1)c**)
pour tout $j \geq 2$, $A_j(1) = A_j(0)$.
$\widehat{A}_p(n) = (-1)^{p+1}(A_1(1)h'(1) - A_1(0)h'(0)) = (-1)^{p+1}h'(0) = \frac{(-1)^{p+1}}{(-2i\pi n)^p} = \frac{-1}{(2i\pi n)^p}$.
$\widehat{A}_p(0) = \int_0^1 A_p(x)dx = 0$.

IV.B.3) La série de Fourier de $\widetilde{A}_p$ est donnée par : $\widetilde{S}_p(x) = \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}^*} \frac{e^{inx}}{(2i\pi n)^{p+1}}$.
$p+1 > 1$,alors la série de Fourier de $\widetilde{A}_p$ converge normalement sur $\mathbb{R}$.

IV.B.4) $a_{2p} = A_{2p}(0)$, $\widetilde{A}_{2p}$ est 2π-périodique de classe C^1 par morceaux, alors d'aprés le théorème de Dirichlet : $\sum\limits_{n\in\mathbb{Z}^*} \frac{-1}{(2i\pi n)^{2p}} = \frac{\widetilde{A}_{2p}(+0)+\widetilde{A}_{2p}(-0)}{2}$.
Pour $x > 0$, x proche de 0, $\widetilde{A}_{2p}(x) = A_{2p}(\frac{x}{2\pi})$.
Pour $x < 0$, x proche de 0, $\widetilde{A}_{2p}(x) = A_{2p}(\frac{x}{2\pi} + 1)$.
Alors : $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{-2(-1)^p}{(2\pi n)^{2p}} = \frac{A_{2p}(0)+A_{2p}(1)}{2} = A_{2p}(0)$. (D'aprés la question **III.A.1)b**))

Finalement : $a_{2p} = A_{2p}(0) = (-1)^{p+1}\frac{S(2p)}{2^{2p-1}\pi^{2p}}$.

IV.C− Comportement de l'erreur

IV.C.1) Il suffit de dériver l'expression : $f(x) = \frac{1}{(1-\alpha)x^{\alpha-1}}$ $2p$ fois et ensuite $(2p+2)$ fois et utiliser l'égalité de **IV.B.4**) pour obtenir le résultat : $\left|\frac{a_{2p+2}f^{(2p+2)}(n)}{a_{2p}f^{(2p)}(n)}\right| = \frac{(\alpha+2p)(\alpha+2p-1)S(2p+2)}{4n^2\pi^2S(2p)}$.
IV.C.2) Ici on va examiner deux résultats, celui de **IV.A.2**) et celui de **IV.C.1**).
$\left|S(\alpha) - \widetilde{S}_{n,2p}(\alpha)\right| \leq \left|a_{2p+2}f^{(2p+2)}(n)\right|$ et $\left|\frac{a_{2p+2}f^{(2p+2)}(n)}{a_{2p}f^{(2p)}(n)}\right| = \frac{(\alpha+2p)(\alpha+2p-1)S(2p+2)}{4n^2\pi^2S(2p)}$.
$S(2p) = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2p}} = 1 + \sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^{2p}}$. La série $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^{2p}}$ converge normalement pour $p \in [1, +\infty[$, alors
$\lim\limits_{p\to+\infty}\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^{2p}} = \sum\limits_{n=2}^{\infty}\lim\limits_{p\to+\infty}\frac{1}{n^{2p}} = 0$ et $\lim\limits_{p\to+\infty} S(2p) = 1$.
Alors à n fixé : $\lim\limits_{p\to+\infty}\left|\frac{a_{2p+2}f^{(2p+2)}(n)}{a_{2p}f^{(2p)}(n)}\right| = \lim\limits_{p\to+\infty}\frac{(\alpha+2p)(\alpha+2p-1)S(2p+2)}{4n^2\pi^2S(2p)} = +\infty$.
Pour n fixé, plus que p est grand, plus que l'approximation de $S(\alpha)$ par $\widetilde{S}_{n,2p}(\alpha)$ est mauvaise.
Étant donné que $\frac{S(2p+2)}{S(2p)} < 1$, ne choisir que des couples d'entiers tels que :
$\varepsilon_n = \frac{(\alpha+2p)(\alpha+2p-1)}{4n^2\pi^2}\left|f^{(2p)}(n)\right|$ est suffisament petit, comme ça on aura :
$\left|S(\alpha) - \widetilde{S}_{n,2p}(\alpha)\right| \leq \left|a_{2p+2}f^{(2p+2)}(n)\right| \leq \left|a_{2p}f^{(2p)}(n)\right|\frac{(\alpha+2p)(\alpha+2p-1)S(2p+2)}{4n^2\pi^2S(2p)} \leq \varepsilon_n$
ce qui permet d'avoir de bonnes approximations de $S(\alpha)$ par $\widetilde{S}_{n,2p}(\alpha)$.