Devoir maison n°5

Exercice 1.

On munit $\mathcal{C}([0,1])$ du produit scalaire

$$\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(t)g(t)dt.$$

Démontrer que la famille $(X^n)_{n\geq 0}$ est totale dans cet espace préhilbertien.

Problème 1.

PARTIE 1. Développement en série entière de $x \mapsto (1+x)^\alpha$:

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Dans cette partie, on considère la fonction $f : x \mapsto (1+x)^\alpha$ sur l'intervalle $]1, +\infty[$. Le but est de démontrer que f est développable en série entière sur $]-1, 1[$ et de déterminer ce développement.

1er cas : On suppose que $\alpha \in \mathbb{N}$.

1. En appliquant la formule du binôme de Newton, déterminer le développement en série entière sur $\mathbb{R}$ de la fonction polynomiale $f : x \mapsto (1+x)^\alpha$.

2eme cas : On suppose que $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$.

2. a. Calculer $f(0)$ et déterminer la dérivée de f.
   b. En déduire que f est solution, sur $]1, +\infty[$, du problème de Cauchy :

$$(E) \begin{cases} y(0) = 1 \\ (1+x)y' = \alpha y \end{cases}$$

   D'après le théorème de Cauchy-Lipschitz, f est alors l'*unique* solution de (E) sur $]1, +\infty[$.

3. On considère une série entière de la variable réelle $\sum a_n x^n$ de rayon de convergence $R > 0$ et de somme $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.
   a. Montrer que pour tout $x \in]-R, R[$,

$$S'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^{n-1} \quad \text{(on convient que le terme } n = 0 \text{ est nul pour } x = 0)$$

   On suppose que S est solution de (E) sur $]-R, R[$.
   b. Que vaut le terme $a_0 (= S(0))$?
   c. En substituant y par S dans l'équation $(1+x)y' = \alpha y$, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$a_{n+1} = \frac{\alpha - n}{n+1} a_n.$$

   d. Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n \neq 0$.

e. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En considérant le produit $\dfrac{a_n}{a_{n-1}} \cdots \dfrac{a_1}{a_0}$, montrer que

$$a_n = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}.$$

4. Réciproquement, on considère la série entière $\sum a_n x^n$ où $a_{n+1} = \dfrac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}$ pour $n \in \mathbb{N}$ (on convient que pour $n = 0$, $a_0 = 1$).
   a. Déterminer le rayon de convergence de cette série entière.
   b. Montrer que $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est solution de (E) sur $]-1,1[$.
   c. En déduire que pour tout $x \in]-1,1[$,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n.$$

Conclusion. On généralise le binôme de Newton de la façon suivante : pour $\alpha \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$, on note :

$$\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}.$$

On remarque que pour $\alpha = N \in \mathbb{N}$, cette définition coïncide bien avec

$$\binom{N}{n} = \begin{cases} \dfrac{N!}{(N-n)!n!} & \text{si } n \leq N \\ 0 & \text{si } n > N. \end{cases}.$$

Ainsi, on a prouvé dans cette partie que pour $\alpha \in \mathbb{R}$, on a, pour tout $x \in]-1,1[$,

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{\alpha}{n} x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n.$$

PARTIE II. Calcul de $\zeta(2)$:

On rappelle que l'on note ζ la fonction $\zeta : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$. Le but de cette partie est de montrer que $\zeta(2) = \dfrac{\pi^2}{6}$ en utilisant le développement en série entière de arcsin.

5. a. Soit $a > 1$. Montrer que la série de fonctions $\sum \dfrac{1}{n^x}$ converge normalement sur $[a, +\infty[$.
   b. En déduire que ζ est continue sur $]1, +\infty[$.
   c. Montrer plus généralement que ζ est C^∞ sur $]1, +\infty[$.
6. Par sommation par paquets, on remarque que $\zeta(2) = \displaystyle\sum_{n \in 2\mathbb{N}^*} \frac{1}{n^2} + \sum_{n \in 2\mathbb{N}+1} \frac{1}{n^2}$.

a. Grâce à des changements d'indices, prouver que $\zeta(2) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n)^2} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}$.

b. En déduire que $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{3}{4}\zeta(2)$.

7. On cherche à établir le développement en série entière (DSE) de la fonction arcsin sur $]-1,1[$.

   a. En utilisant la partie I., déterminer le DSE sur $]-1,1[$ de $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x}} = (1+x)^{-\frac{1}{2}}$.

   b. En déduire le DSE sur $]-1,1[$ de $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

   c. Montrer que pour tout $x \in]-1,1[$,

$$\arcsin(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdots 2n} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

8. a. Justifier que la formule précédente est également valable pour $x = \pm 1$.

   b. Soit $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$. Grâce au changement de variable $x = \sin(t)$, montrer que :

$$t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdots 2n} \frac{\sin^{2n+1}(t)}{2n+1}.$$

   c. En déduire que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdots 2n} \frac{1}{2n+1} I_{2n+1} = \frac{\pi^2}{8},$$

   où $I_{2n+1} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n+1}(t)dt$.

   (On admettra ici que l'on peut intervertir somme et intégrale sur $[0, \pi/2]$).

9. Calcul de $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t)dt$.

   a. Calculer I_1.

   b. En utilisant deux Intégrations Par Parties, déterminer une relation entre I_{n+2} et I_n et en déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n.$$

   c. Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_{2n+1} \neq 0$.

   d. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En considérant le produit $\frac{I_{2n+1}}{I_{2n-1}} \cdot \frac{I_{2n-1}}{I_{2n-3}} \cdots \frac{I_3}{I_1}$, montrer que :

$$I_{2n+1} = \frac{2 \cdot 4 \cdots 2n}{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)(2n+1)}.$$

10. Conclusion :

a. En déduire que :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

b. Conclure quant à la valeur de $\zeta(2)$.