Correction du Concours Blanc Mathématiques I

E3A/CCP

Exercice 1. *E3A 2015*

A toute suite $(a_n)_{n\geqslant 1}$ de réels et à toute suite de réels non nuls $(b_n)_{n\geqslant 1}$ on associe la matrice A_n de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ où n est un entier strictement positif.

$$A_n = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & 0 & \cdots & 0 \\ b_1 & a_2 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_{n-1} & b_{n-1} \\ 0 & \cdots & 0 & b_{n-1} & a_n \end{pmatrix}$$

On note $P_n(X)$ son polynôme caractéristique qui est égal à $\det(XI_n - A_n)$.

1. Déterminer une relation de récurrence entre les polynômes $P_{n+1}(X)$, $P_n(X)$ et $P_{n-1}(X)$.

2. (a) Justifier que la matrice A_n est diagonalisable.

   (b) Soit λ une valeur propre réelle de la matrice A_n, calculer le déterminant de la matrice

$$\begin{pmatrix} -b_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \lambda - a_2 & & \ddots & \ddots & \vdots \\ -b_2 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & -b_{n-2} & 0 \\ & \cdots & -b_{n-2} & \lambda - a_{n-1} & -b_{n-1} \end{pmatrix}$$

   extraite de la matrice $\lambda I_n - A_n$ en supprimant sa première colonne et sa dernière ligne.

   (c) En déduire le rang de la matrice $\lambda I_n - A_n$ pour λ valeur propre de la matrice A_n.

   (d) En déduire que le polynôme caractéristique $P_n(X)$ de la matrice A_n admet n racines distinctes.

3. On appelle $\Delta_n(x)$ le déterminant de la matrice $\begin{pmatrix} P'_{n+1}(x) & P'_n(x) \\ P_{n+1}(x) & P_n(x) \end{pmatrix}$ où $P'_{n+1}(x)$ et $P'_n(x)$ désignent respectivement les fonctions polynômes dérivées des fonctions polynômes $P_{n+1}(x)$ et $P_n(x)$.

   (a) Soit $n \geqslant 2$. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \Delta_n(x) = P_n^2(x) + b_n^2 \Delta_{n-1}(x)$.

   (b) Montrer que $\Delta_1(x)$ est strictement positif pour tout x réel. En déduire le signe de $\Delta_n(x)$ pour tout $n \geqslant 2$.

4. Montrer que l'application $x \mapsto P_{n+1}(x)$ s'annule entre deux zéros consécutifs de P_n.

   (On pourra considérer l'application $x \mapsto \dfrac{P_{n+1}(x)}{P_n(x)}$)

Correction.

1

En développant le déterminant par rapport à sa dernière colonne, on obtient $P_{n+1} = (X - a_{n+1})P_n - b_n^2 P_{n-1}$.

2

2.1

A est une matrice symétrique réelle : elle est donc diagonalisable.

2.2

La matrice considérée est triangulaire inférieure : son déterminant vaut donc $\prod_{i=1}^{n-1} b_i$. En particulier, il est non nul.

2.3

λ est valeur propre de A donc $\lambda I_n - A$ possède un rang $< n$. De plus, par (2b), les $n-1$ dernières colonnes de $\lambda I_n - A$ sont libres. Donc $\lambda I_n - A$ est de rang $n-1$.

2.4

A est diagonalisable, donc la dimension de chaque espace propre est égale à la multiplicité de la valeur propre dans le polynôme caractéristique. Or, chaque espace propre est de dimension 1 (2c). Donc A admet n valeurs propres distinctes.

3

3.1

En utilisant le 1, on obtient

$$\begin{aligned}\Delta_n &= P_n P'_{n+1} - P'_n P_{n+1}\\ &= P_n(P_n + (X-a_{n+1})P'_n - b_n^2 P'_{n+1}) - P'_n((X-a_{n+1})P_n - b_n^2 P_{n-1})\\ &= P_n^2 + b_n^2 \Delta_{n-1}\end{aligned}$$

3.2

$\Delta_1 = (X-a_1)^2 + b_1^2$. Donc $\forall x \in \mathbb{R}, \Delta_1(x) > 0$. Par une récurrence immédiate à partir de 3a, $\forall n \geq 2, \forall x \in \mathbb{R}, \Delta_n(x) > 0$.

4

Soit α et β deux zéros consécutifs de P_n. P_{n+1} ne s'annule pas en α et β car Δ_n ne s'annule pas. Soit $F_n = \frac{P_{n+1}}{P_n}$. F_n est strictement croissante sur $]\alpha, \beta[$ car sa dérivée est du signe de Δ_n. Or $|F_n|$ tend vers l'infini en α et β. Par le théorème des valeurs intermédiaires P_{n+1} s'annule entre α et β.

Problème 1. *CCP 2013*

Problème : matrices «toutes-puissantes»

Notations et objectifs

Dans tout le texte, $\mathbb{K}$ désigne le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et p un entier naturel non nul.

On note $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ le $\mathbb{K}$-espace vectoriel des matrices carrées de taille p à coefficients dans $\mathbb{K}$ et I_p la matrice unité de $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$.

On pourra confondre $\mathcal{M}_1(\mathbb{K})$ et $\mathbb{K}$.

Une matrice N de $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ est dite nilpotente s'il existe un entier naturel r tel que $N^r = 0$.

Si $M_1, \ldots, M_k$ sont des matrices carrées, la matrice $\operatorname{diag}(M_1, \ldots, M_k)$ désigne la matrice diagonale par blocs dont les blocs diagonaux sont $M_1, \ldots, M_k$.

Si E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, on note id_E l'application identité sur E.

Enfin, on note $\mathbb{K}[X]$ la $\mathbb{K}$-algèbre des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$.

On dit qu'une matrice A de $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ est «**toute-puissante** sur $\mathbb{K}$» et on notera en abrégé TP$\mathbb{K}$ si, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe une matrice B de $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ telle que $A = B^n$.

On note $T_p(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ toutes-puissantes sur $\mathbb{K}$:

$$T_p(\mathbb{K}) = \{A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K}) \mid \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \ \exists B \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K}) \ A = B^n\}.$$

L'objectif principal du sujet est d'établir le résultat suivant :
toute matrice inversible de $\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ est TP$\mathbb{C}$.

Dans la partie **I**, on traite quelques exemples et contre-exemples.

Dans la partie **II**, on montre que, dans le cas où le polynôme caractéristique de la matrice A est scindé, on peut ramener l'étude au cas des matrices de la forme $\lambda I_p + N$ avec N nilpotente.

Dans la partie **III**, on traite le cas des matrices unipotentes c'est-à-dire de la forme $I_p + N$ avec N nilpotente et on en déduit le théorème principal.

Les parties **I** et **II** sont dans une large mesure indépendantes. La partie **III** utilise les résultats des parties précédentes.

Partie I : quelques exemples

1. Le cas de la taille 1

(a) Démontrer que $T_1(\mathbb{R}) = [0, +\infty[$.

(b) Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $b = re^{i\theta}$ avec $r > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$. Donner les racines n-ièmes du nombre complexe b, c'est-à-dire les solutions de l'équation $z^n = b$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.

(c) En déduire $T_1(\mathbb{C})$.

2. Une condition nécessaire...

(a) Démontrer que si $A \in T_p(\mathbb{K})$, alors $\det A \in T_1(\mathbb{K})$.

(b) En déduire un exemple de matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ qui n'est pas TP$\mathbb{R}$.

3. ...mais pas suffisante

Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$. Démontrer qu'il n'existe aucune matrice $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $A = B^2$. En déduire que la condition nécessaire de la question précédente n'est pas suffisante.

4. Un cas où A est diagonalisable

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ -2 & 5 & 2 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$.

(a) Démontrer que A est diagonalisable sur $\mathbb{R}$ (le détail des calculs n'est pas demandé).

(b) Démontrer que la matrice A est TP$\mathbb{R}$.

(c) Pour chacun des cas $n = 2$ et $n = 3$, expliciter une matrice B de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ vérifiant $B^n = A$ (on pourra utiliser la calculatrice).

5. Un exemple de nature géométrique

Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

(a) Justifier que A est la matrice d'une rotation vectorielle dont on précisera une mesure de l'angle.

(b) En déduire que A est TP$\mathbb{R}$.

6. Le cas des matrices nilpotentes

Soit N une matrice nilpotente de $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$.

(a) Déterminer le polynôme caractéristique de N, en déduire que $N^p = 0$.

(b) Démontrer que si N est TP$\mathbb{K}$, alors N est la matrice nulle.

Partie II : le cas où le polynôme caractéristique est scindé

Dans toute cette partie, A désigne une matrice de $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ dont le polynôme caractéristique noté χ_A est scindé sur $\mathbb{K}$, c'est-à-dire de la forme :

$$\chi_A = (-1)^p \prod_{i=1}^{k} (X - \lambda_i)^{r_i},$$

avec $k, r_1, \ldots, r_k$ des entiers de $\mathbb{N}^*$ et $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ les valeurs propres de A, éléments de $\mathbb{K}$.

On note $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{K}^p$ et u l'endomorphisme de $\mathbb{K}^p$ dont A est la matrice dans la base $\mathcal{B}$.

Enfin, pour $i \in \{1, \ldots, k\}$, on note $C_i = \operatorname{Ker}(u - \lambda_i \operatorname{id}_{\mathbb{K}^p})^{r_i}$ que l'on appelle sous-espace caractéristique de u associé à la valeur propre λ_i.

7. Démontrer que $\mathbb{K}^p = C_1 \oplus \cdots \oplus C_k$.

8. **(a)** Soit v un endomorphisme de $\mathbb{K}^p$ qui commute avec u et Q un polynôme à coefficients dans $\mathbb{K}$. Démontrer que $\operatorname{Ker} Q(u)$ est stable par v.

(b) En déduire que pour tout $i \in \{1, \ldots, k\}$, le sous-espace caractéristique C_i est stable par u.

On note ainsi u_{C_i} l'endomorphisme induit par u sur C_i.

9. Soit $i \in \{1, \ldots, k\}$. Justifier que l'application $u_{C_i} - \lambda_i \operatorname{id}_{C_i}$ est un endomorphisme de C_i nilpotent.

10. En déduire que la matrice A peut s'écrire sous la forme :

$$A = P\,\mathrm{diag}(\lambda_1 I_{p_1} + N_1, \ldots, \lambda_k I_{p_k} + N_k) P^{-1}\ ,$$

avec P une matrice inversible de $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ et pour tout $i \in \{1, \ldots, k\}$, $p_i = \dim C_i$ et N_i est une matrice nilpotente de $\mathcal{M}_{p_i}(\mathbb{K})$.

On rappelle que $\mathrm{diag}(\lambda_1 I_{p_1} + N_1, \ldots, \lambda_k I_{p_k} + N_k)$ désigne la matrice diagonale par blocs de premier bloc $\lambda_1 I_{p_1} + N_1$, de deuxième bloc $\lambda_2 I_{p_2} + N_2$ et de dernier bloc $\lambda_k I_{p_k} + N_k$.

11. Démontrer que, si pour tout $i \in \{1, \ldots, k\}$ la matrice $\lambda_i I_{p_i} + N_i$ est TP$\mathbb{K}$, alors A est elle-même TP$\mathbb{K}$.

Partie III : le cas des matrices unipotentes

Soit N une matrice nilpotente de $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$. Nous allons montrer que la matrice unipotente $I_p + N$ est TP$\mathbb{K}$.

On pourra confondre polynôme et fonction polynôme.

On rappelle que si f est une fonction, la notation $f(x) = o(x^p)$ signifie qu'il existe une fonction ε tendant vers 0 en 0 telle que $f(x) = x^p \varepsilon(x)$ au voisinage de 0.

12. Une application des développements limités

(a) Soit V un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ tel que $V(x) = o(x^p)$ au voisinage de 0.
Démontrer, à l'aide d'une division euclidienne, qu'il existe un polynôme Q de $\mathbb{R}[X]$ tel que $V = X^p \times Q$.

(b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Démontrer l'existence d'un polynôme U de $\mathbb{R}[X]$ tel que l'on ait, au voisinage de 0 :

$$1 + x = (U(x))^n + o(x^p)$$

(on pourra utiliser un développement limité de $(1+x)^\alpha$).

(c) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un polynôme Q de $\mathbb{R}[X]$ tel que :

$$1 + X = U^n + X^p \times Q.$$

13. Applications

(a) Démontrer que la matrice unipotente $I_p + N$ est TP$\mathbb{K}$.

(b) Soit $\lambda \in \mathbb{K}$ non nul. En déduire que si λ est TP$\mathbb{K}$, alors la matrice $\lambda I_p + N$ est TP$\mathbb{K}$.

14. Le résultat annoncé

(a) Conclure que toute matrice inversible de $\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ est TP$\mathbb{C}$.

(b) Toute matrice de $\mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ est-elle TP$\mathbb{C}$?

15. Donner un exemple de matrice de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ non diagonalisable et non inversible qui est TP$\mathbb{R}$.

Correction.

1)

a) Si $a \in T_1(\mathbb{R})$ en particulier il existe $b \in \mathbb{R}$ tel que $b^2 = a$ donc $a \geqslant 0$. Réciproquement si $a \geqslant 0$ alors, pour tout entier $n \geqslant 2$, on a $b^n = a$ avec $b = \sqrt[n]{a}$. Donc $T_1(\mathbb{R}) = [0, +\infty[$. $\square$

b) $\left\{ \sqrt[n]{r} e^{i\theta_k} \right\}_{k=0..n-1}$ avec $\theta_k = \dfrac{\theta}{n} + k\dfrac{2\pi}{n}$. $\square$

c) 0 est évidemment TPC ainsi que tout complexe non nul par la question précédente. Donc $T_1(\mathbb{C}) = \mathbb{C}$. $\square$

2)

a) Si $A \in T_p(\mathbb{K})$, pour tout entier $n \geqslant 1$ il existe $B \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ telle que $B^n = A$.
Il en découle que $\det A = \left(\det B\right)^n$ donc que $\det A \in T_1(\mathbb{K})$ puisque $\det B \in \mathbb{K}$. $\square$

b) Il en résulte par exemple que $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \notin T_2(\mathbb{R})$, d'après la question 1)a), puisque $\det A < 0$. $\square$

3) Cette condition nécessaire n'est pas suffisante car la matrice A proposée est bien à déterminant positif mais n'est pas toute puissante.
En effet s'il existait une matrice $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $B^2 = A$, on aurait (avec les notations de l'énoncé) :

$$\begin{cases} a^2 + bc = -1 & (1) \\ d^2 + bc = -2 & (2) \\ b(a+d) = 0 & (3) \\ c(a+d) = 0 & (4) \end{cases}$$

(1) implique que b et c sont non nuls.
(3) et (4) impliquent alors que $a + d = 0$ donc $a^2 = d^2$.
Les équations (1) et (2) sont alors incompatibles. $\square$

4)

a) En remplaçant la première colonne $C1$ du determinant caractéristique par $C1 + C3$ on peut factoriser par $\lambda - 2$.
Puis en remplaçant la troisième ligne $L3$ par $L3 - L1$ on se ramène à un déterminant d'ordre 2.
Il vient ainsi que $\chi_A(\lambda) = -(\lambda-2)(\lambda^2 - 3\lambda + 2) = -(\lambda-2)^2(\lambda-1)$.
Il en découle que A est diagonalisable si et seulement si $\dim E_2 = 2$.
Or le système $AX = 2X$ se réduit à $2x - 3y - 2z = 0$ donc E_2 est le plan engendré par exemple par $\overrightarrow{\varepsilon_1} = (1,0,1)$ et $\overrightarrow{\varepsilon_2} = (0,2,-3)$ et A est bien diagonalisable. $\square$

b) Un calcul immédiat prouve que la droite E_1 est engendrée par $\overrightarrow{\varepsilon_3} = (1,1,-1)$.
Notons P la matrice de passage de la base canonique à la base diagonalisante $(\overrightarrow{\varepsilon_1}, \overrightarrow{\varepsilon_2}, \overrightarrow{\varepsilon_3})$ et $D = \mathrm{diag}(2,2,1)$ de sorte que $A = PDP^{-1}$.
Pour $n \geqslant 1$ soit $B_n = PD_nP^{-1}$ avec $D_n = \mathrm{diag}(\sqrt[n]{2}, \sqrt[n]{2}, 1)$. Alors $B_n^n = A$ donc A est TP$\mathbb{R}$. $\square$

c) $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & -1 \end{pmatrix}$. La calculatrice fournit $P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & -2 \end{pmatrix}$ ainsi que

$B_2 = \begin{pmatrix} 2-\sqrt{2} & -3+3\sqrt{2} & -2+2\sqrt{2} \\ 2-2\sqrt{2} & -3+4\sqrt{2} & -2+2\sqrt{2} \\ -2+2\sqrt{2} & 3-3\sqrt{2} & 2-\sqrt{2} \end{pmatrix}$ et $B_3 = \begin{pmatrix} 2-\sqrt[3]{2} & -3+3\sqrt[3]{2} & -2+2\sqrt[3]{2} \\ 2-2\sqrt[3]{2} & -3+4\sqrt[3]{2} & -2+2\sqrt[3]{2} \\ -2+2\sqrt[3]{2} & 3-3\sqrt[3]{2} & 2-\sqrt[3]{2} \end{pmatrix}$

5) A est est la matrice de l'homothétie de rapport -1 donc de la rotation d'angle π. De sorte que, pour tout entier $n \geqslant 1$, on a $B_n^n = A$ avec $B_n = \begin{pmatrix} \cos\dfrac{\pi}{n} & -\sin\dfrac{\pi}{n} \\ \sin\dfrac{\pi}{n} & \cos\dfrac{\pi}{n} \end{pmatrix}$ et A est TP$\mathbb{R}$. $\square$

6) Soit $N \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ nilpotente.

a) Il existe $r \geqslant 1$ tel que $N^r = 0$ donc X^r annule N de sorte que 0 est la seule valeur propre de N. Ainsi $\chi_N = (-1)^p X^p$ et $N^p = 0$ par le théorème de Cayley-Hamilton. $\square$

b) Si N est TP$\mathbb{K}$, en particulier il existe B telle que $B^p = N$ donc $B^{p^2} = N^p = 0$ de sorte que B est nipotente et donc $B^p = 0$ i.e. $N = 0$. $\square$

7) Comme les λ_i pour i de 1 à k sont deux à deux distincts, les polynômes $(X - \lambda_i)^{r_i}$ sont premiers entre eux deux à deux et le théorème de décomposition des noyaux joint au théorème de Cayley-Hamilton fournit la décomposition cherchée. $\square$

8)

a) Si v commute avec u alors v commute avec $Q(u)$ donc $\operatorname{Ker} Q(u)$ est stable par v. $\square$

b) u commute avec $u - \lambda_i\mathrm{id}$ et en appliquant la question précédente (avec $v = u$, $u = u - \lambda_i\mathrm{id}$ et $Q = X^{r_i}$), il vient que C_i est stable par u. $\square$

9) Comme C_i est stable par u donc par $u - \lambda_i\mathrm{id}$, il vient pour tout $\overrightarrow{x} \in C_i$:
$(u_{C_i} - \lambda_i\mathrm{id}_{C_i})^{r_i}(\overrightarrow{x}) = (u - \lambda_i\mathrm{id})^{r_i}(\overrightarrow{x}) = \overrightarrow{0}$. $\square$

10) Ainsi $u_{C_i} = \lambda_i\mathrm{id}_{C_i} + v_i$ où v_i est un endomorphisme nilpotent de C_i.
Dans toute base de C_i la matrice de u_i est donc de la forme $A'_i = \lambda_i\mathrm{Id}_{p_i} + N_i$ avec N_i nilpotente.
La matrice de u dans toute base adaptée à la décomposition $\mathbb{K}^p = C_1 \oplus C_2 \oplus \ldots \oplus C_k$ est donc $A' = \mathrm{diag}(A'_1, A'_2, \ldots, A'_k)$ qui est bien de la forme demandée. $\square$

11) Supposons A'_i TP$\mathbb{K}$ pour tout i de 1 à k et soit $n \geqslant 1$ un entier quelconque.
Pour tout i, il existe $B'_i \in \mathcal{M}_{p_i}(\mathbb{K})$ telle que $(B'_i)^n = A'_i$.
Alors $(B')^n = A'$ par calcul par blocs avec $B' = \mathrm{diag}(B'_1, B'_2, \ldots, B'_n)$ donc $B^n = A$ avec $B = PB'P^{-1}$.
Ainsi A est bien TP$\mathbb{K}$. $\square$

12)

a) Si V est le polynôme nul on a bien $V = X^pQ$ avec Q le polynôme nul.
Sinon notons k la valuation de V : $V = a_kX^k + a_{k+1}X^{k+1} + \ldots + a_mX^m$ avec $a_k \neq 0$. Alors $V(x) \sim a_kx^k$ au voisinage de 0 de sorte que $x^k = o(x^p)$ ce qui entraîne $k > p$. Il en découle que X^p divise V. $\square$

b) Notons $U(x) = 1 + \dfrac{1}{n}x + \ldots + \dfrac{\frac{1}{n}(\frac{1}{n}-1)\ldots(\frac{1}{n}-p+1)}{p!}x^p$ de sorte que $(1+x)^{1/n} = U(x) + o(x^p)$.
Il vient alors $1 + x = \Big(U(x) + o(x^p)\Big)^n = U(x)^n + \sum\limits_{k=1}^{n} \mathrm{C}_n^k\, U(x)^{n-k}o(x^{kp})$
Or $U(x) \sim 1$ donc $U(x)^{n-k}o(x^{kp}) = o(x^{kp}) = o(x^p)$ pour k de 1 à n de sorte que $1 + x = U(x)^n + o(x^p)$ $\square$

c) Résulte immédiatement de a) et du fait que $1 + X - U(X)^n$ est un polynôme. $\square$

13)

a) Soit $n \geqslant 1$ un entier quelconque. Avec les notations de la question précédente : $(1+X)(N) = U(N)^n + N^p Q(N)$ par le classique morphisme d'algèbre de $\mathbb{K}[X]$ sur $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$. Or $N^p = 0$ par la question 6)a).
Ainsi $\mathrm{Id} + N = U(N)^n$ donc $\mathrm{Id} + N$ est TP$\mathbb{K}$. $\square$

b) Soit λ non nul. Il vient $\lambda \mathrm{Id}_p + N = \lambda\big(\mathrm{Id}_p + N'\big)$ avec $N' = \dfrac{1}{\lambda} N$ clairement nilpotente.
Par la question précédente, il existe $B' \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ telle que $(B')^n = \mathrm{Id}_p + N'$.
Si λ est en outre TP$\mathbb{K}$, il existe λ' tel que $(\lambda')^n = \lambda$ et $B^n = \lambda \mathrm{Id}_p + N$ avec $B = \lambda' B'$ et $\lambda \mathrm{Id}_p + N$ est TP$\mathbb{K}$. $\square$

14)

a) Si $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ alors, par la question 10), A est semblable à une matrice $B = \mathrm{diag}(A'_1, A'_2, \ldots, A'_k)$ avec $A'_i = \lambda_i \mathrm{Id}_{p_i} + N_i$ où les matrices N_i sont nilpotentes et $\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k\}$ est l'ensemble des valeurs propres de A.
Si $A \in GL_p(\mathbb{C})$, $\lambda_i \neq 0$ donc λ_i est TP$\mathbb{C}$ (question 1c) donc A'_i est TP$\mathbb{C}$ par la question précédente.
La question 11) prouve alors que A est TP$\mathbb{C}$ $\square$

b) La question 6)b) prouve qu'une matrice nilpotente non nulle n'est pas TP$\mathbb{C}$. $\square$

15) Exemple 1 :

Soit la matrice d'ordre 4 diagonale par bloc d'ordre 2 : $A = \mathrm{diag}\big(R, (0)\big)$ où $R = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ est la matrice de la rotation d'angle $\dfrac{\pi}{2}$. Le polynôme caractéristique de A est (matrice triangulaire) $X^2(X^2+1)$ donc A est non inversible (0 est valeur propre) et non diagonalisable sur $\mathbb{R}$ (polynôme caractéristique non scindé sur $\mathbb{R}$).
Cependant A est TP$\mathbb{R}$ car, pour tout entier $n \geqslant 1$, on a $B_n^n = A$ avec $B_n = \mathrm{diag}\big(R_n, (0)\big)$ où R_n est la matrice de la rotation d'angle $\dfrac{\pi}{2n}$: $\begin{pmatrix} \cos(\dfrac{\pi}{2n}) & -\sin(\dfrac{\pi}{2n}) \\ \sin(\dfrac{\pi}{2n}) & \cos(\dfrac{\pi}{2n}) \end{pmatrix}$ $\square$

Exemple 2 où A n'est même pas diagonalisable sur $\mathbb{C}$ (elle l'est dans l'exemple précédent) :

Remplaçons dans l'exemple précédent R par la matrice $S = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
Le spectre de A est $(1, 1, 0, 0)$ mais le sous-espace propre associé à la valeur propre 1 est la droite engendrée par $\overrightarrow{e_1}$ ce qui prouve que A est non inversible et non $\mathbb{C}$-diagonalisable.
Or $S = \mathrm{Id}_2 + N$ avec N nilpotente car $N^2 = 0$. Par la question 13)b), il existe $S_n \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $S_n^n = S$. Alors $B_n^n = A$ avec $B_n = \mathrm{diag}\big(S_n, (0)\big)$ $\square$