Mathématiques spéciales — le 14 Mars 2018

Correction du Concours Blanc
Mathématiques II // Informatique

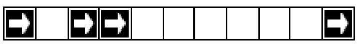
E3A/CCP

1. Informatique (environ 1H - ou moins)

Problème. Mines 2017

Ce sujet concerne la conception d'un logiciel d'étude de trafic routier. On modélise le déplacement d'un ensemble de voitures sur des files à sens unique (voir Figure 1). C'est un schéma simple qui peut permettre de comprendre l'apparition d'embouteillages et de concevoir des solutions pour fluidifier le trafic.
Le sujet comporte des questions de programmation. Le langage à utiliser est Python.
Notations : soit L une liste,

- on note $len(L)$ sa longueur ;
- pour i entier, $0 \leqslant i < len(L)$, l'élément de la liste d'indice i est noté L[i] ;
- pour i et j entiers, $0 \leqslant i < j \leqslant len(L)$, $L[i:j]$ est la sous-liste composée des éléments $L[i], ..., L[j-1]$;
- $p * L$, avec p entier, est la liste obtenue en concaténant p copies de L. Par exemple, $3 * [0]$ est la liste $[0, 0, 0]$.



(a) Représentation d'une file de longueur onze comprenant quatre voitures, situées respectivement sur les cases d'indices 0, 2, 3 et 10.

FIGURE 1 – File de circulation

1 - Préliminaires

On considère le cas d'une seule file, illustré par la Figure 1. Une file de longueur n est représentée par n cases. Une case peut contenir au plus une voiture. Les voitures présentes dans une file circulent toutes dans la même direction (sens des indices croissants, désigné par les flèches sur la Figure 1) et sont indifférenciées.

1. Expliquer comment représenter une file de voitures à l'aide d'une liste de booléens.

   On rappelle qu'un booléen est un objet Python admettant deux valeurs possibles : soit `True` soit `False`, où `True` correspond à "Vrai" et `False` correspond à "Faux".

2. Donner une ou plusieurs instructions `Python` permettant de définir une liste A représentant la file de voitures illustrée par la Figure 1.

3. Soit L une liste représentant une file de longueur n et i un entier tel que $0 \leqslant i < n$. Définir en Python la fonction `occupe(L, i)` qui renvoie `True` lorsque la case d'indice i de la file est occupée par une voiture et `False` sinon.

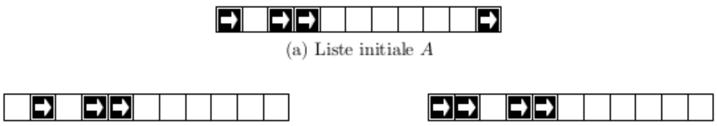
4. Combien existe-t-il de files différentes de longueur n ? Justifier votre réponse.
5. Écrire une fonction `egal(L1, L2)` retournant un booléen permettant de savoir si deux listes $L1$ et $L2$ sont égales.
6. Que peut-on dire de la complexité de cette fonction ?
7. Préciser le type de retour de cette fonction.

2 - Déplacement de voitures dans la file

On identifie désormais une file de voitures à une liste. On considère le schéma de la Figure 2 représentant un exemple de file. Une étape de simulation pour une file consiste à déplacer les voitures de la file, à tour de rôle, en commençant par la voiture la plus à droite, d'après les règles suivantes :

- — une voiture se trouvant sur la case la plus à droite de la file sort de la file ;
- — une voiture peut avancer d'une case vers la droite si elle arrive sur une case inoccupée ;
- — une case libérée par une voiture devient inoccupée ;
- — la case la plus à gauche peut devenir occupée ou non, selon le cas considéré.

On suppose avoir écrit en Python la fonction `avancer` prenant en paramètres une liste de départ, un booléen indiquant si la case la plus à gauche doit devenir occupée lors de l'étape de simulation, et renvoyant la liste obtenue par une étape de simulation.
Par exemple, l'application de cette fonction à la liste illustrée par la Figure 2(a) permet d'obtenir soit la liste illustrée par la Figure 2(b) lorsque l'on considère qu'aucune voiture nouvelle n'est introduite, soit la liste illustrée par la Figure 2(c) lorsque l'on considère qu'une voiture nouvelle est introduite.



(a) Liste initiale A

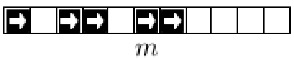
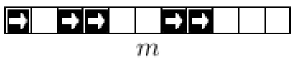
(b) $B =$ `avancer`$(A,$ `False`$)$ (c) $C =$ `avancer`$(A,$ `True`$)$

FIGURE 2 – Étape de simulation

8. Étant donnée A la liste définie à la question 2, que renvoie l'instruction suivante :

```
>>>avancer(avancer(A, False),True)
```

9. On considère L une liste et m l'indice d'une case de cette liste ($0 \leqslant m < len(L)$). On s'intéresse à une étape partielle où seules les voitures situées sur la case d'indice m ou à droite de cette case peuvent avancer normalement, les autres voitures ne se déplaçant pas.

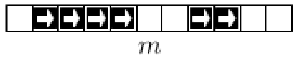
   Par exemple, la file  devient  .

   Définir en Python la fonction `avancer_fin(L, m)` qui réalise cette étape partielle de déplacement et renvoie le résultat dans une nouvelle liste sans modifier L.
10. Soient L une liste, b un booléen et m l'indice d'une case inoccupée de cette liste. On considère une étape partielle où seules les voitures situées à gauche de la case d'indice m se déplacent, les autres voitures ne se déplacent pas. Le booléen b indique si une nouvelle voiture est introduite sur la case la plus à gauche.

Par exemple, la file  devient  lorsque aucune nouvelle voiture n'est introduite.

Définir en Python la fonction `avancer_debut(L, b, m)` qui réalise cette étape partielle de déplacement et renvoie le résultat dans une nouvelle liste sans modifier L.

11. On considère une liste L dont la case d'indice $m > 0$ est temporairement inaccessible et bloque l'avancée des voitures. Une voiture située immédiatement à gauche de la case d'indice m ne peut pas avancer. Les voitures situées sur les cases plus à gauche peuvent avancer, à moins d'être bloquées par une case occupée, les autres voitures ne se déplacent pas. Un booléen b indique si une nouvelle voiture est introduite lorsque cela est possible.

    Par exemple, la file  devient  ,lorsque aucune nouvelle voiture n'est introduite.

    Définir en Python la fonction `avancer_debut_bloque(L, b, m)` qui réalise cette étape partielle de déplacement et renvoie le résultat dans une nouvelle liste.

Correction.

Q1. On peut représenter une file de longueur n par une liste L de même longueur. Pour chaque indice i valide, $L[i]$ vaut `True` si la $i^{\text{ème}}$ case de la file est occupée et `False` sinon.

Q2. `A = [True, False, True, True] + 6 * [False] + [True]`

Q3.
```python
def occupe(L, i):
    return L[i]
```

Q4. Pour chaque case de la file de longueur n, il y a deux possibilités : elle est libre ou occupée par une voiture. Il y a donc au total 2^n files possibles.

Q5.
```python
def egal(L1, L2):
    return L1 == L2
```

Q6. Le test d'égalité `L1 == L2` demande de comparer chaque élément de `L1` à l'élément correspondant de `L2`. La complexité est donc linéaire en la taille des listes.

Q7. Cette fonction renvoie un booléen.

8. Cette fonction renvoie :
`[True, False, True, False, True, True, False, False, False, False, False]`
Ceci correspond à la file suivante :

9.
```
def avancer_fin(L, m):
    return L[:m] + avancer(L[m:],False)
```

10.
```
def avancer_debut(L, b, m):
    return avancer(L[:m+1], b) + L[m+1:]
```

11.
```
def avancer_debut_bloque(L, b, m):
    L2 = L[:]  # Copier L
    for k in range(m-2, -1, -1):
        if occupe(L2, k+1) == False:
            L2[k+1] = L2[k]
            L2[k] = False
    L2[0] = b or L2[0]
    return L2
```

2. Mathématiques (environ 3H)

Exercice 1. *E3A*

Soit un réel $a \in]0, 29[$, on considère la fonction H définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall t \in \mathbb{R}, H(t) = 10\ t^3 + 31\ t^2 + 71\ t - a.$$

1. Montrer qu'il existe un unique réel noté $\ell \in \left]0, \frac{1}{2}\right[$ tel que : $H(\ell) = 0$.

2. On considère la suite (u_n) définie par : $u_0 = \frac{1}{2}$.
Pour tout entier n, u_{n+1} est l'abscisse du point d'intersection de l'axe des abscisses et de la tangente à la courbe d'équation $y = H(x)$, au point de coordonnées $(u_n, H(u_n))$.
   (a) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et que :
   $$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n - \frac{H(u_n)}{H'(u_n)}.$$
   (b) Déterminer le sens de variation de l'application $f : \left| \begin{array}{ccc} [0,1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & t - \dfrac{H(t)}{H'(t)} \end{array} \right.$.
   En déduire que :
   $$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in \left[\ell, \frac{1}{2}\right].$$
   (c) Montrer que :
   $$\forall n \in \mathbb{N}, |H(\ell) - H(u_n) - (\ell - u_n)H'(u_n)| \leqslant 46|u_n - \ell|^2.$$
   (d) En déduire :
   $$\forall n \in \mathbb{N}, |u_{n+1} - \ell| \leqslant \frac{46\ |u_n - \ell|^2}{71}$$

puis que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, |u_{n+1} - \ell| \leqslant \frac{7\,|u_n - \ell|^2}{10}$$

(e) Pour tout réel $a \in]0, 29[$, vérifier que u_2 est une valeur approchée de ℓ à 0.03 près.

3. Application informatique. On utilisera le langage Python sans aucune bibliothèque supplémentaire.
Écrire une fonction `suite(a,n)` en langage Python qui prend en entrée le paramètre a et un entier n et qui renvoie la liste $[u_0, u_1, \ldots, u_n]$ des $n+1$ premiers termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de la question 2) en fonction de a.

Correction.

Problème 1. *CCP 2012*

Dans tout le problème, $\sum f_n$ est une série de fonctions définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et à valeurs réelles.

Partie I

Une série de fonctions $\sum f_n$ converge absolument sur I lorsque, pour tout $x \in I$, la série $\sum |f_n(x)|$ converge. Dans les deux premières questions on supposera, pour simplifier les démonstrations, que toutes les fonctions f_n sont bornées sur I.

1. **(a)** Rappeler la définition de la convergence normale de la série de fonctions $\sum f_n$ sur I.

(b) On suppose que la série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement sur I, démontrer que $\sum f_n$ converge absolument sur I.

2. On suppose que la série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement sur I, démontrer que $\sum f_n$ converge uniformément sur I.
On pourra démontrer que la suite des restes converge uniformément sur I vers la fonction nulle ou utiliser toute autre méthode.

3. On pose pour $x \in [0;1]$, $f_n(x) = (-1)^n \left(\dfrac{x^2+n}{n^2}\right)$.
Démontrer que la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement puis converge uniformément sur $[0;1]$ mais ne converge absolument en aucune valeur de $[0;1]$.

4. Si la série de fonctions $\sum f_n$ converge absolument sur I, a-t-on nécessairement $\sum f_n$ qui converge uniformément sur I ?
On attend une réponse détaillée et on pourra utiliser une série entière.

Partie II

Dans toute cette partie, $(\alpha_n)_{n\geq 1}$ est une suite décroissante de réels positifs, $I = [0;1[$ et pour tout $x \in I$, $f_n(x) = \alpha_n x^n(1-x)$.

5. Justifier que la suite $(\alpha_n)_{n\geq 1}$ est bornée et que la série de fonctions $\sum\limits_{n\geq 1} f_n$ converge simplement sur I.

6. **(a)** Calculer pour $n \geqslant 1$, $\|f_n\|_\infty = \sup\limits_{x\in I} |f_n(x)|$.

(b) Démontrer que la série de fonctions $\sum\limits_{n\geq 1} f_n$ converge normalement sur I si et seulement si la série de réels positifs $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{\alpha_n}{n}$ converge.

7. **(a)** Calculer pour tout $x \in I$, $\sum\limits_{k=n+1}^{\infty} x^k$.

(b) Si on suppose que la suite $(\alpha_n)_{n\geq 1}$ converge vers 0, démontrer que la série de fonctions $\sum\limits_{n\geq 1} f_n$ converge uniformément sur I.
On pourra observer que pour $k \geq n+1$, $\alpha_k \leq \alpha_{n+1}$.

(c) Réciproquement, démontrer que si la série de fonctions $\sum\limits_{n\geq 1} f_n$ converge uniformément sur I, alors la suite $(\alpha_n)_{n\geq 1}$ converge vers 0.

8. Dans chacun des cas suivants, donner, en détaillant, un exemple de suite décroissante de réels positifs $(\alpha_n)_{n\geq 1}$ telle que :

(a) La série de fonctions $\sum\limits_{n\geq 1} f_n$ converge normalement sur I.

(b) La série de fonctions $\sum\limits_{n\geq 1} f_n$ ne converge pas uniformément sur I.

(c) La série de fonctions $\sum\limits_{n\geq 1} f_n$ converge uniformément sur I mais ne converge pas normalement sur I.

9. Résumer à l'aide d'un schéma toutes les implications possibles, pour une série de fonctions quelconque, entre les convergences : normale, uniforme, absolue et simple sur I.

Correction.

Partie I

1. (a.)La série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement sur I si et seulement si la série numérique $\sum \|f_n\|_\infty$ converge, où $\|f\|_\infty = \text{Sup}\{|f(x)|/x \in I\}$, appelée norme de la convergence uniforme.
(pour que cette définition ait un sens, il faut que les fonctions soient bornées sur I, de manière à pouvoir parler de la norme infinie)

   (b.) $\forall x \in I,\ 0 \leqslant |f_n(x)| \leqslant \|f_n\|_\infty$ et par comparaison de séries à termes positifs, on en déduit que si $\sum f_n$ converge normalement, alors pour tout x de I, la série $\sum |f_n(x)|$ converge, i.e. la série $\sum f_n$ converge absolument

2. Pour x dans I notons $R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x)$. Alors $|R_n(x)| \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} \|f_k\|_\infty$. La série $\sum f_n$ convergeant normalement, la suite $\left(\sum_{k=n+1}^{+\infty} \|f_k\|_\infty\right)_n$ converge vers 0 indépendamment de x, ce qui prouve que la suite des restes $(R_n(x))_n$ converge uniformément vers 0 sur I, i.e. la série $\sum f_n$ converge uniformément sur I.

3. Pour x fixé dans $I = [0,1]$, $|f_n(x)| = \frac{x^2}{n} + \frac{1}{n}$ et donc la suite $(|f_n(x)|)_n$ décroît et converge vers 0. Le critère des séries alternées est applicable, ce qui prouve que la série $\sum f_n$ converge simplement sur $I = [0,1]$.
Le critère des séries alternées nous dit également que, pour tout x de I, $|R_n(x)| \leqslant |f_{n+1}(x)| = \frac{x^2}{(n+1)^2} + \frac{1}{n} \leqslant \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{n}$.
$\lim \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{n} = 0$ donc la suite $(R_n(x))_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément vers 0, c'est à dire la série $\sum f_n$ converge uniformément sur $I = [0,1]$.

   Enfin, pour x fixé, $|f_n(x)| = \frac{x^2}{n^2} + \frac{1}{n}$. La série $\sum \frac{x^2}{n^2}$ converge (série de Riemann) mais la série $\sum \frac{1}{n}$ diverge (série harmonique), et donc la série $\sum |f_n(x)|$ diverge, i.e. la série $\sum f_n$ ne converge pas absolument sur I.

4. Considérons la fonction f_n définie sur $I = [0,1[$ par $f_n(x) = x^n$. Pour x dans I, la série $\sum |f_n(x)| = \sum x^n$ converge vers $\frac{1}{1-x}$. Cette série $\sum f_n$ converge absolument sur $I = [0,1[$.
Alors $R_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} = \frac{x^{n+1}}{1-x}$. Montrons que cette suite de fonctions $(R_n(x))$ ne converge pas uniformément vers 0. En effet $R_n(1-\frac{1}{n}) = n\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n+1} = ne^{(n+1)\ln(1-\frac{1}{n})} \sim \frac{n}{e}$ qui tend vers $+\infty$ avec n. Donc la suite (R_n) ne converge pas uniformément vers 0, et ainsi la série $\sum f_n$ est une série qui converge absolument sur $I = [0,1[$ mais qui ne converge pas uniformément sur I.

Partie II

5. La suite (α_n) décroît et est positive, donc $\forall n,\ 0 \leqslant \alpha_n \leqslant \alpha_0$. La suite $(\alpha_n)_n$ est donc bornée. Soit $x \in I$. La série $\sum x^n$ converge (série géométrique de raison x avec $0 \leqslant x < 1$) et donc la série $\sum \alpha_0(1-x)x^n$ converge (linéarité).
$\forall n \geqslant 1, \forall x \in I,\ 0 \leqslant \alpha_n x^n(1-x) \leqslant \alpha_0(1-x)x^n$. Ainsi, par comparaison de séries à termes positifs, on conclut que la série $\sum f_n$ converge simplement sur I.

6. (a.) $\forall x \in I,\ f_n'(x) = \alpha_n(nx^{n-1} - (n+1)x^n) = \alpha_n x^{n-1}(n - x(n+1))$. En construisant le tableau de variations de f_n on établit que la fonction f_n positive admet sur I un maximum (absolu) au point $\dfrac{n}{n+1}$ qui vaut
$f_n(\dfrac{n}{n+1}) = \alpha_n \dfrac{n^n}{(n+1)^{n+1}}$. Donc $\|f_n\|_\infty = \alpha_n \dfrac{n^n}{(n+1)^{n+1}}$.
(b.) $\|f_n\|_\infty = \dfrac{\alpha_n}{n} \cdot \left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{n+1}$.
Or $\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{n+1} = \left(1 - \dfrac{1}{n+1}\right)^{n+1} = e^{(n+1)\ln(1-\frac{1}{n+1})}$, et $(n+1)\ln(1-\frac{1}{n+1}) \sim (n+1)(-\frac{1}{n+1}) \sim -1$. Donc $\lim \left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{n+1} = e^{-1}$.
Ainsi, $\|f_n\|_\infty \sim \dfrac{\alpha_n}{ne}$; de plus $\|f_n\| \geqslant 0$ et donc, par comparaison de séries positives,
$\boxed{\sum \|f_n\|_\infty \text{ converge} \iff \sum \frac{\alpha_n}{n} \text{ converge.}}$

7. (a.) $\boxed{\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} x^k = \frac{x^{n+1}}{1-x}.}$

(b.) On sait que la suite (α_n) décroît. Donc pour $k \geqslant n+1,\ \alpha_k \leqslant \alpha_{n+1}$.
Alors $\forall k \geqslant n+1,\ \alpha_k x^k(1-x) \leqslant \alpha_{n+1}(1-x)x^k$, et donc par inégalités sur les séries convergentes,
$$0 \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} \alpha_k x^k(1-x) \leqslant \alpha_{n+1}(1-x)\sum_{k=n+1}^{+\infty} x^k = \alpha_{n+1}(1-x)\frac{x^{n+1}}{1-x} = \alpha_{n+1}x^{n+1} \leqslant \alpha_{n+1}.$$
La suite des restes $R_n(x) = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \alpha_k x^k(1-x)$ est donc positive et majorée par une suite qui ne dépend pas de x et qui converge vers 0 , ce qui prouve que la série $\sum f_n$ converge uniformément.

(c.) La suite (α_n) décroît et est minorée par 0, donc elle converge vers une limite positive ou nulle. Si cette limite ℓ est non nulle, alors pour tout n, $\alpha_n \geqslant \ell > 0$.
Dans ces conditions pour tout x dans I, $R_n(x) = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \alpha_k x^k(1-x) \geqslant \ell(1-x)\sum_{k=n+1}^{\infty} x^k = \ell x^{n+1}$.
Mais alors, $R_n(1+\frac{1}{n+1}) \geqslant \ell(1-\frac{1}{n+1})^{n+1}$ qui converge vers $\dfrac{\ell}{e}$ (voir question 6.a.)donc ne

converge pas vers 0, c'est à dire que la suite des restes ne converge pas uniformément vers la fonction nulle, ce qui contredit l'hypothèse.

Donc $\sum f_n$ converge uniformément sur I, si et seulement si la suite $(\alpha_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers 0.

8. (a.) Avec $\alpha_n = \dfrac{1}{n}$, la question 6.b. montre que la série $\sum f_n$ converge normalement (car $\dfrac{\alpha_n}{n} = \dfrac{1}{n^2}$ et la série $\sum \dfrac{1}{n^2}$ converge)

   (b.) Il suffit de prendre $\alpha_n = 1$: la suite est constante, donc elle décroît (au sens large), et elle ne converge pas vers 0. Si on veut absolument une suite strictement décroissante, il suffit de prendre $\alpha_n = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{n}$

   (c.) Il nous faut trouver une suite $(\alpha_n)_n$ positive décroissante, convergeant vers 0, mais telle que la série $\sum \dfrac{\alpha_n}{n}$ diverge .

   La suite définie par $\alpha_n = \dfrac{1}{\ln(n)}$ pour $n \geqslant 2$ et $\alpha_1 = \alpha_2$ convient (elle est bien définie pour $n \geqslant 1$). Cette suite est décroissante et converge vers 0. Il reste à montrer que la série $\sum \dfrac{\alpha_n}{n}$ diverge.

   La fonction $g : x \to \dfrac{2}{x\ln(x)}$ décroît sur $[2, +\infty[$ et est positive. La série $\sum\limits_{n\geqslant 2} g(n)$ est donc de même nature que l'intégrale $\displaystyle\int_2^{\infty} g(x)dx$. Or $\displaystyle\int_1^M g(x)dx = \int_1^M \frac{1}{x\ln(x)}dx = [\ln(\ln x)]_2^M =$ $\ln(\ln M) - \ln(\ln 2)$ qui a pour limite $+\infty$ quand M tend vers $+\infty$. L'intégrale diverge, donc la série $\sum \dfrac{\alpha_n}{n}$diverge, et donc $\sum\limits_{n\geqslant 1} f_n$ converge uniformément sur I mais ne converge pas normalement sur I.

9. CV Normale $\Rightarrow$ CV Absolue $\Rightarrow$ CV simple ($\mathbb{R}$ est complet)
   CV Normale $\Rightarrow$ CV Uniforme $\Rightarrow$ CV simple.
   Aucune des réciproques n'est vraie. Et de plus :
   CV absolue $\not\Rightarrow$ CV uniforme, et de même : CV uniforme $\not\Rightarrow$ CV absolue