Mathématiques spéciales — le 14 Mars 2018

Correction du Concours Blanc
Mathématiques II // Informatique

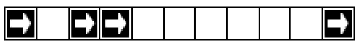
CCP/MINES

1. Informatique (environ 1H - ou moins)

Problème. Mines 2017

Ce sujet concerne la conception d'un logiciel d'étude de trafic routier. On modélise le déplacement d'un ensemble de voitures sur des files à sens unique (voir Figure 1). C'est un schéma simple qui peut permettre de comprendre l'apparition d'embouteillages et de concevoir des solutions pour fluidifier le trafic.
Le sujet comporte des questions de programmation. Le langage à utiliser est Python.
Notations : soit L une liste,

- on note $len(L)$ sa longueur ;
- pour i entier, $0 \leqslant i < len(L)$, l'élément de la liste d'indice i est noté L[i] ;
- pour i et j entiers, $0 \leqslant i < j \leqslant len(L)$, $L[i:j]$ est la sous-liste composée des éléments $L[i], ..., L[j-1]$;
- $p * L$, avec p entier, est la liste obtenue en concaténant p copies de L. Par exemple, $3*[0]$ est la liste $[0,0,0]$.



(a) Représentation d'une file de longueur onze comprenant quatre voitures, situées respectivement sur les cases d'indices 0, 2, 3 et 10.

FIGURE 1 – File de circulation

1 - Préliminaires

On considère le cas d'une seule file, illustré par la Figure 1. Une file de longueur n est représentée par n cases. Une case peut contenir au plus une voiture. Les voitures présentes dans une file circulent toutes dans la même direction (sens des indices croissants, désigné par les flèches sur la Figure 1) et sont indifférenciées.

1. Expliquer comment représenter une file de voitures à l'aide d'une liste de booléens.

   On rappelle qu'un booléen est un objet Python admettant deux valeurs possibles : soit `True` *soit* `False`*, où* `True` *correspond à "Vrai" et* `False` *correspond à "Faux".*
2. Donner une ou plusieurs instructions `Python` permettant de définir une liste A représentant la file de voitures illustrée par la Figure 1.
3. Soit L une liste représentant une file de longueur n et i un entier tel que $0 \leqslant i < n$. Définir en Python la fonction `occupe(L, i)` qui renvoie `True` lorsque la case d'indice i de la file est occupée par une voiture et `False` sinon.

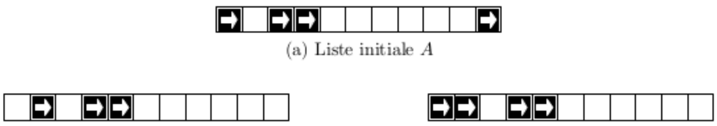
4. Combien existe-t-il de files différentes de longueur n ? Justifier votre réponse.
5. Écrire une fonction `egal(L1, L2)` retournant un booléen permettant de savoir si deux listes $L1$ et $L2$ sont égales.
6. Que peut-on dire de la complexité de cette fonction ?
7. Préciser le type de retour de cette fonction.

2 - Déplacement de voitures dans la file

On identifie désormais une file de voitures à une liste. On considère le schéma de la Figure 2 représentant un exemple de file. Une étape de simulation pour une file consiste à déplacer les voitures de la file, à tour de rôle, en commençant par la voiture la plus à droite, d'après les règles suivantes :

— une voiture se trouvant sur la case la plus à droite de la file sort de la file ;
— une voiture peut avancer d'une case vers la droite si elle arrive sur une case inoccupée ;
— une case libérée par une voiture devient inoccupée ;
— la case la plus à gauche peut devenir occupée ou non, selon le cas considéré.

On suppose avoir écrit en Python la fonction `avancer` prenant en paramètres une liste de départ, un booléen indiquant si la case la plus à gauche doit devenir occupée lors de l'étape de simulation, et renvoyant la liste obtenue par une étape de simulation.
Par exemple, l'application de cette fonction à la liste illustrée par la Figure 2(a) permet d'obtenir soit la liste illustrée par la Figure 2(b) lorsque l'on considère qu'aucune voiture nouvelle n'est introduite, soit la liste illustrée par la Figure 2(c) lorsque l'on considère qu'une voiture nouvelle est introduite.


(a) Liste initiale A

(b) $B =$ `avancer`$(A,$ `False`$)$ (c) $C =$ `avancer`$(A,$ `True`$)$

FIGURE 2 – Étape de simulation

8. Étant donnée A la liste définie à la question 2, que renvoie l'instruction suivante :

```
>>>avancer(avancer(A, False),True)
```

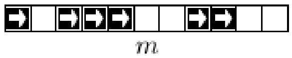
9. On considère L une liste et m l'indice d'une case de cette liste ($0 \leqslant m < len(L)$). On s'intéresse à une étape partielle où seules les voitures situées sur la case d'indice m ou à droite de cette case peuvent avancer normalement, les autres voitures ne se déplaçant pas.

   Par exemple, la file 

 devient 

 .

   Définir en Python la fonction `avancer_fin(L, m)` qui réalise cette étape partielle de déplacement et renvoie le résultat dans une nouvelle liste sans modifier L.
10. Soient L une liste, b un booléen et m l'indice d'une case inoccupée de cette liste. On considère une étape partielle où seules les voitures situées à gauche de la case d'indice m se déplacent, les autres voitures ne se déplacent pas. Le booléen b indique si une nouvelle voiture est introduite sur la case la plus à gauche.

Par exemple, la file 

devient 

lorsque aucune nouvelle voiture n'est introduite.

Définir en Python la fonction `avancer_debut(L, b, m)` qui réalise cette étape partielle de déplacement et renvoie le résultat dans une nouvelle liste sans modifier L.

11. On considère une liste L dont la case d'indice $m > 0$ est temporairement inaccessible et bloque l'avancée des voitures. Une voiture située immédiatement à gauche de la case d'indice m ne peut pas avancer. Les voitures situées sur les cases plus à gauche peuvent avancer, à moins d'être bloquées par une case occupée, les autres voitures ne se déplacent pas. Un booléen b indique si une nouvelle voiture est introduite lorsque cela est possible.

    Par exemple, la file 

devient 

,lorsque aucune nouvelle voiture n'est introduite.

    Définir en Python la fonction `avancer_debut_bloque(L, b, m)` qui réalise cette étape partielle de déplacement et renvoie le résultat dans une nouvelle liste.

Correction.

Q1. On peut représenter une file de longueur n par une liste L de même longueur. Pour chaque indice i valide, $L[i]$ vaut `True` si la $i^{\text{ème}}$ case de la file est occupée et `False` sinon.

Q2. `A = [True, False, True, True] + 6 * [False] + [True]`

Q3.
```python
def occupe(L, i):
    return L[i]
```

Q4. Pour chaque case de la file de longueur n, il y a deux possibilités : elle est libre ou occupée par une voiture. Il y a donc au total 2^n files possibles.

Q5.
```python
def egal(L1, L2):
    return L1 == L2
```

Q6. Le test d'égalité `L1 == L2` demande de comparer chaque élément de `L1` à l'élément correspondant de `L2`. La complexité est donc linéaire en la taille des listes.

Q7. Cette fonction renvoie un booléen.

8. Cette fonction renvoie :
`[True, False, True, False, True, True, False, False, False, False, False]`
Ceci correspond à la file suivante :


9.
```python
def avancer_fin(L, m):
    return L[:m] + avancer(L[m:],False)
```

10.
```python
def avancer_debut(L, b, m):
    return avancer(L[:m+1], b) + L[m+1:]
```

11.
```python
def avancer_debut_bloque(L, b, m):
    L2 = L[:]  # Copier L
    for k in range(m-2, -1, -1):
        if occupe(L2, k+1) == False:
            L2[k+1] = L2[k]
            L2[k] = False
    L2[0] = b or L2[0]
    return L2
```

2. Mathématiques (environ 3H)

Exercice 1. *CCP 2017*

On admet que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ et on pose $A = \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$.

Q3. Démontrer que la famille $\left(\dfrac{1}{p^2\, q^2}\right)_{(p,q)\in A}$ est sommable et calculer sa somme.

Q4. Démontrer que la famille $\left(\dfrac{1}{p^2 + q^2}\right)_{(p,q)\in A}$ n'est pas sommable.

Correction.

Comme les familles proposées sont à valeurs positives, le caractère sommable équivaut au caractère borné des sommes finies. Et dans ce cas, on sait que l'on peut obtenir la somme en sommant dans l'ordre que l'on veut.

Q3. A q fixé, $\sum(\frac{1}{p^2q^2})_{p\geq 1}$ est une série convergente et sa somme est $S_q = \frac{\pi^2}{6q^2}$. $\sum(S_q)_{q\geq 1}$ converge et la famille proposée est ainsi sommable et

$$\sum_{p,q\geq 1} \frac{1}{p^2q^2} = \left(\frac{\pi^2}{6}\right)^2$$

Q4. Il suffit de montrer qu'il existe des sous-familles finies de somme arbitrairement grande. Remarquons que $p^2 + q^2 \leq (p+q)^2$. On considère la sous-famille constituée des éléments d'indice (p,q) avec $p+q \leq r$. La somme associée est

$$\sum_{k=2}^{r} \sum_{p+q=k} \frac{1}{p^2+q^2} \geq \sum_{k=2}^{r} \sum_{p+q=k} \frac{1}{(p+q)^2} = \sum_{k=2}^{r} \frac{k+1}{k^2}$$

Comme $\frac{k+1}{k^2} \sim \frac{1}{k}$ est le terme général d'une série positive divergente, les sommes précédentes peuvent effectivement être arbitrairement grandes et la famille est non sommable.

Problème 1. *Mines 2016*

Dans tout le problème, I désigne l'intervalle $]0,+\infty[$.

A Une intégrale

1. *(Question facultative)* Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}} du$ converge.

Dans la suite, on admettra que

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}} du = \sqrt{\pi}.$$

B Étude de deux séries de fonctions

Dans toute cette partie, on pose $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{-nx}}{\sqrt{n}}$ et $g(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \sqrt{n} e^{-nx}$.

2. Montrer que f et g sont définies et continues sur I.
3. Montrer que pour tout $x \in I$, $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^{-ux}}{\sqrt{u}} du \leq f(x) \leq \int_0^{+\infty} \frac{e^{-ux}}{\sqrt{u}} du$.

   En déduire un équivalent de $f(x)$ lorsque $x \to 0$. *On pourra penser à faire un changement de variable dans les intégrales de l'inégalité précédente.*
4. Montrer que la suite $\displaystyle\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n}\right)_{n\geq 1}$ converge.
5. Démontrer que pour tout $x > 0$, la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}\right) e^{-nx}$ converge et exprimer sa somme $h(x)$ en fonction de $f(x)$ pour tout $x \in I$.
6. En déduire un équivalent de $h(x)$ lorsque $x \to 0$. Montrer alors que $g(x)$ est équivalent à $\dfrac{\sqrt{\pi}}{2x^{3/2}}$ lorsque $x \to 0$.

C Séries de fonctions associées à des ensembles d'entiers

À tout ensemble $A \subseteq \mathbb{N}$ on associe la suite (a_n) définie par

$$a_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n \in A, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Soit I_A l'ensemble des réels $x \geq 0$ pour lesquels la série $\sum_{n\geq 0} a_n e^{-nx}$ converge.

On pose $f_A(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n e^{-nx}$ pour tout $x \in I_A$.
Enfin, sous réserve d'existence, on pose $\Phi(A) = \lim_{x\to 0} x f_A(x)$ et on note S l'ensemble des parties $A \subseteq \mathbb{N}$ pour lesquelles $\Phi(A)$ existe.

7. Quel est l'ensemble I_A si A est fini ? Si A est infini, montrer que l'on peut extraire une suite (b_n) de la suite (a_n) telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $b_n = 1$. Déterminer I_A dans ce cas.
8. Soit $A \in S$ et (a_n) la suite associée. Pour tout entier naturel n, on note $A(n)$ l'ensemble des éléments de A qui sont $\leq n$. Vérifier que pour tout $x > 0$ la série $\sum_{n\geq 0} \mathrm{Card}(A(n))e^{-nx}$ converge et que
$$\sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{Card}(A(n))e^{-nx} = \frac{f_A(x)}{1-e^{-x}}$$

Dans la question suivante, $A = A_1$ désigne l'ensemble des carrés d'entiers naturels non nuls.

9. Montrer que si $x > 0$, $\dfrac{f_{A_1}(x)}{1-e^{-x}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \lfloor \sqrt{n} \rfloor e^{-nx}$ où $\lfloor \cdot \rfloor$ désigne la partie entière.
   En déduire un encadrement de $\sum_{n=0}^{+\infty} \sqrt{n}e^{-nx} - \dfrac{f_{A_1}(x)}{1-e^{-x}}$, puis un équivalent de f_{A_1} en 0.
   Prouver alors que $A_1 \in S$ et donner $\Phi(A_1)$.

Dans la question suivante, $A = A_2$ désigne l'ensemble constitués des entiers qui sont la sommes des carrés de deux entiers naturels non nuls. On admet que A_2 appartient à S, et on désire majorer $\Phi(A_2)$.
Soit $v(n)$ le nombre de couple d'entiers naturels non nuls (p, q) pour lesquels $n = p^2 + q^2$.

10. Montrer que pour tout réel $x > 0$, la série $\sum_{n\geq 0} v(n)e^{-nx}$ converge et établir que
$$\sum_{n=0}^{+\infty} v(n)e^{-nx} = (f_{A_1}(x))^2.$$
    Montrer alors que pour tout $x > 0$, $f_{A_2}(x) \leq (f_{A_1}(x))^2$. En déduire un majorant de $\Phi(A_2)$.

D Étude de deux séries de fonctions

Soit $(\alpha_n)_{n\geq 0}$ une suite de nombres réels positifs tels que pour tout réel $x \geq 0$, la série $\sum_{n\geq 0} \alpha_n e^{-nx}$ converge. On suppose que
$$\lim_{x\to 0}\left(x \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n e^{-nx} \right) = \ell \in [0, +\infty[.$$

On note F l'espace vectoriel des fonctions de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$, E le sous-espace de F des fonctions continues par morceaux et E_0 le sous-espace de E des fonctions continues sur $[0, 1]$. On munit E de la norme $\| \ \|_\infty$ définie par la formule $\|\psi\|_\infty = \sup_{t\in[0,1]} |\psi(t)|$.

Si $\psi \in E$, on note $L(\psi)$ l'application qui à $x > 0$ associe

$$(L(\psi))(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n e^{-nx} \psi(e^{-nx}).$$

11. Montrer que $L(\psi)$ est bien définie pour tout $\psi \in E$ et que l'application L est une application linéaire de E dans l'espace vectoriel des fonctions de I dans $\mathbb{R}$. Vérifier que pour tous ψ_1, ψ_2 dans E_1, $\psi_1 \leq \psi_2$ entraîne $L(\psi_1) \leq L(\psi_2)$.

On note E_1 l'ensemble des $\psi \in E$ pour lesquels $\lim_{x\to 0} x(L(\psi))(x)$ existe et si $\psi \in E_1$, on pose

$$\Delta(\psi) = \lim_{x\to 0} x(L(\psi))(x)$$

12. Vérifier que E_1 est un sous espace vectoriel de E et que l'application Δ est une forme linéaire continue de $(E_1, \| \|_\infty)$.
13. Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}$, $e_p : t \in [0,1] \mapsto t^p$ appartient à E_1 et calculer $\Delta(e_p)$. En déduire que $E_0 \subseteq E_1$ et calculer $\Delta(\psi)$ pour tout $\psi \in E_0$.

Pour tous $a, b \in [0,1]$ tel que $a < b$, on note $1_{[a,b]} : [0,1] \to \{0,1\}$ la fonction définie par

$$1_{[a,b]}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [a,b] \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Soit $a \in]0,1[$ et $\varepsilon \in]0, \min(a, 1-a)[$. On note

$$g_-(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [0, a-\varepsilon] \\ \dfrac{a-x}{\varepsilon} & \text{si } x \in]a-\varepsilon, a[\\ 0 & \text{si } x \in [a,1] \end{cases}$$

et

$$g_+(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [0, a] \\ \dfrac{a+\varepsilon-x}{\varepsilon} & \text{si } x \in]a, a+\varepsilon[\\ 0 & \text{si } x \in [a+\varepsilon, 1]. \end{cases}$$

14. Vérifier que g_- et g_+ appartiennent à E_0 et calculer $\Delta(g_-)$ et $\Delta(g_+)$. Montrer alors que $1_{[0,a]} \in E_1$ et calculer $\Delta(1_{[0,a]})$. En déduire que $E_1 = E$ et donner $\Delta(\psi)$ pour tout $\psi \in E$.

On considère maintenant la fonction ψ définie sur $[0,1]$ par la formule :

$$\psi(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0, \frac{1}{e}[\\ \dfrac{1}{x} & \text{si } x \in [\frac{1}{e}, 1]. \end{cases}$$

15. Calculer $(L(\psi))(\frac{1}{N})$ pour tout entier $N > 0$ et en déduire la limite

$$\lim_{N\to+\infty} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N} \alpha_k$$

(théorème taubérien).

On rappelle que $v(n)$ est le nombre de couples d'entiers naturels non nuls (p,q) tels que $n = p^2 + q^2$.

16. Si $A \in S$, que vaut $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} \mathrm{Card}\,(A(n))$? Déterminer alors $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} v(k)$.

Correction.

A Une intégrale

1. La fonction $\psi : u \mapsto \dfrac{e^{-u}}{\sqrt{u}}$ est continue sur I par théorèmes généraux.

   On a $\psi(u) \underset{u\to 0}{\sim} \dfrac{1}{u^{1/2}}$ or la fonction $u \mapsto \dfrac{1}{u^{1/2}}$ est intégrable sur $]0,1]$ car $\frac{1}{2} < 1$
   Donc par comparaison à une fonction positive, ψ est intégrable sur $]0,1]$
   De plus par croissance comparée $u^2\psi(u) \underset{u\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ donc $\psi(u) = \underset{u\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{u^2}\right)$
   or la fonction $u \mapsto \dfrac{1}{u^2}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$ car $2 > 1$
   Donc par comparaison à une fonction positive, ψ est intégrable sur $[1,+\infty[$
   Ainsi $\boxed{\psi : u \mapsto \dfrac{e^{-u}}{\sqrt{u}} \text{ est intégrable sur } I}$ En particulier, on en déduit la convergence de l'intégrale.

B Étude de deux séries de fonctions

2. (i) Pour $n \geq 1$, la fonction $x \mapsto \sqrt{n}e^{-nx}$ est continue sur I
   (ii) Soit $a < b$ dans I. On a : $\forall x \in I,\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ |\sqrt{n}e^{-nx}| \leq \sqrt{n}e^{-na}$
   or $n^2\sqrt{n}e^{-na} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ par croissance comparée donc $\sqrt{n}e^{-na} = \underset{n\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ et $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2}$ converge
   donc par comparaison à une série à termes positifs la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\sqrt{n}e^{-na}$ converge
   Ainsi la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geq 1}(x \mapsto \sqrt{n}e^{-nx})$ converge normalement sur tout segment de I
   (iii) Ainsi $\displaystyle\sum_{n\geq 1}(x \mapsto \sqrt{n}e^{-nx})$ converge simplement vers g sur I

   Avec $(i), (ii)$ et (iii), on vient de montrer que $\boxed{g \text{ est définie et continue sur } I}$
   de manière analogue $\boxed{f \text{ est définie et continue sur } I}$

3. Soit $x \in I$. On pose $l : u \mapsto \dfrac{e^{-ux}}{\sqrt{u}}$.

   Cette fonction est le produit des deux fonctions positives et décroissantes sur I : $u \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{u}}$ et $u \mapsto e^{-ux}$
   donc la fonction l est décroissante sur I, et comme en 1., la fonction l est continue et intégrable sur I
   donc pour $n \geq 1$, on a $\displaystyle\int_n^{n+1} l(u)du \leq l(n) \leq \int_{n-1}^{n} l(u)du$
   En sommant on obtient pour $N \geq 1$, $\displaystyle\int_1^{N+1}\frac{e^{-ux}}{\sqrt{u}}du \leq \sum_{n=1}^{N}\frac{e^{-nx}}{\sqrt{n}} \leq \int_0^N \frac{e^{-ux}}{\sqrt{u}}du$
   Puis par passage à la limite quand $N \to +\infty$: $\boxed{\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{e^{-ux}}{\sqrt{u}}du \leq f(x) \leq \int_0^{+\infty}\frac{e^{-ux}}{\sqrt{u}}du}$

On effectue le changement de variable C^1 bijectif, strictement croissant : $ux = t$, $xdu = dt$

on obtient $\displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{xt}}dt \leq f(x) \leq \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{xt}}dt$

donc par théorème d'encadrement $\displaystyle\lim_{x\to 0} \sqrt{x}f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}dt = K = \sqrt{\pi}$

On en déduit l'équivalent $\boxed{f(x) \underset{x\to 0}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{x}}}$

4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a $\displaystyle\left(\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n+1}\right) - \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n}\right) = \frac{1}{\sqrt{n+1}} + 2(\sqrt{n} - \sqrt{n+1})$

   donc $\displaystyle\left(\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n+1}\right) - \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n}\right) = \frac{1}{\sqrt{n+1}} - \frac{2}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}} = \frac{\sqrt{n}-\sqrt{n+1}}{\sqrt{n(n+1)}+n+1} \leq 0$

   donc la suite $\displaystyle\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n}\right)_{n\geq 1}$ est décroissante

   En utilisant une comparaison série intégrale comme en 3. on a $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \geq \int_1^{n+1} \frac{1}{\sqrt{t}}dt = 2\sqrt{n+1} - 2\sqrt{1}$

   donc $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n} \geq 2\sqrt{n+1} - 2 - 2\sqrt{n} \geq -2$

   Ainsi la suite $\displaystyle\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n}\right)_{n\geq 1}$ et minorée par -2 (et décroissante)

   d'où $\boxed{\text{la suite } \displaystyle\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n}\right)_{n\geq 1} \text{ converge}}$

5. Soit $x > 0$. On a pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle 0 \leq \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}\right) e^{-nx} \leq ne^{-nx}$

   or $n^3 e^{-nx} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ ce qui prouve que $\displaystyle\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}\right) e^{-nx} = \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)$

   On peut donc conclure comme en 2. que $\boxed{\text{la série } \displaystyle\sum_{n\geq 1}\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}\right) e^{-nx} \text{ converge}}$

   On considère les séries de termes généraux $a_k = \frac{e^{-kx}}{\sqrt{k}}$ et $b_k = e^{-kx}$ géométrique de raison $e^{-x} \in]0,1[$

   ces séries sont absolument convergentes de sommes $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} a_k = f(x)$ et $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} b_k = \frac{b_1}{1-e^{-x}} = \frac{1}{e^x - 1}$

On effectue le produit de Cauchy de ces séries absolument convergentes : $c_n = \sum_{k=1}^{n} a_k b_{n-k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{e^{-kx}}{\sqrt{k}} e^{-(n-k)x}$

donc $h(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} c_n = \left(\sum_{n=1}^{+\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=1}^{+\infty} b_n\right)$ Ainsi $\boxed{h(x) = \frac{f(x)}{e^x - 1} \text{ pour tout } x \in I}$

6. Quand $x \to 0$, on a $e^x - 1 \sim x$ donc avec 3., on a $\boxed{h(x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{\sqrt{\pi}}{x^{3/2}}}$

   On a $2g(x) + 0 + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n}\right) e^{-nx} = h(x)$ donc $g(x) = \frac{1}{2}\left(h(x) + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n}\right) e^{-nx}\right)$

   Toute suite convergente étant bornée, le 4. nous fournit $M > 0$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\left|\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n}\right| \leq M$

   Ainsi $\left|\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n}\right) e^{-nx}\right| \leq M \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-nx} = \frac{M}{e^x - 1} \sim \frac{M}{x}$

   donc $\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n}\right) e^{-nx} = \underset{x\to 0}{o}(h(x))$ donc $g(x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{1}{2}h(x)$

   Ainsi $\boxed{g(x) \text{ est équivalent à } \frac{\sqrt{\pi}}{2x^{3/2}} \text{ lorsque } x \to 0}$

C Séries de fonctions associées à des ensembles d'entiers

7. Si A est finie alors $f_A : x \mapsto \sum_{n\in A} e^{-nx}$ est bien définie sur $\mathbb{R}^+$ donc $\boxed{\text{si } A \text{ est fini, alors } I_A = [0, +\infty[}$

   On suppose désormais que A est infini.

   On définit φ par récurrence par $\varphi(0) = \min A$ et $\varphi(n+1) = \min\left(A \setminus \{\varphi(k) \mid 0 \leq k \leq n\}\right)$

   Par construction la suite φ est strictement croissante à valeurs dans A donc telle que $\forall n \in \mathbb{N},\ a_{\varphi(n)} = 1$

   $\boxed{\text{on peut extraire une suite } (b_n) = \left(a_{\varphi(n)}\right) \text{ de la suite } (a_n) \text{ telle que pour tout } n \in \mathbb{N},\ b_n = 1}$

   Soit $x = 0$, la suite $(a_n e^{-nx})$ ne converge pas vers 0 avec la suite extraite $\left(b_n e^{-\varphi(n)x}\right) = (1)_{n\geq 0}$

   donc la série $\sum_{n\geq 0} a_n e^{-nx}$ diverge grossièrement.

   Si $x > 0$, on a $|a_n e^{-nx}| \leq e^{-nx}$ ce qui donne la convergence de la série $\sum_{n\geq 0} a_n e^{-nx}$

   Ainsi $\boxed{\text{si } A \text{ est infini, alors } I_A =]0, +\infty[}$

8. Soit $x > 0$, on a : $f_A(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k e^{-kx}$ et $\frac{1}{1-e^{-x}} = \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-kx}$

On remarque que pour $n \in \mathbb{N}$,on a $\text{Card}(A(n)) = \sum_{k=0}^{n} a_k$, on peut donc faire le produit de Cauchy de ces deux séries absolument convergentes pour obtenir : $\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} \text{Card}(A(n))e^{-nx} = \frac{f_A(x)}{1-e^{-x}}}$

9. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a $A_1(n) = \{k^2 \mid k \in \mathbb{N}^* \text{ et } k^2 \leq n\} = \{k^2 k \in \mathbb{N}^* \text{ et } k \leq \sqrt{n}\}$
donc $A_1(n) = \{k^2 \mid 1 \leq k \leq \lfloor\sqrt{n}\rfloor\}$ de cardinal $\lfloor\sqrt{n}\rfloor$

Soit $x > 0$. À l'aide de la question précédente $\boxed{\frac{f_{A_1}(x)}{1-e^{-x}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \lfloor\sqrt{n}\rfloor e^{-nx}}$

Pour $n \in \mathbb{N}$, on a $\sqrt{n} - \lfloor\sqrt{n}\rfloor \in [0,1]$ donc $0 \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \sqrt{n}e^{-nx} - \frac{f_{A_1}(x)}{1-e^{-x}} \leq \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-nx} = \frac{1}{1-e^{-x}}$

donc $(1-e^{-x})g(x) - 1 \leq f_{A_1}(x) \leq (1-e^{-x})g(x)$ car $1 - e^{-x} > 0$

or d'après 11., $(1-e^{-x})g(x)$ équivaut à $\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{x}}$ quand $x \to 0$

donc $\frac{2\sqrt{x}f_{A_1}(x)}{\sqrt{\pi}}$ tend vers 1 par théorème d'encadrement

Ainsi $\boxed{f_{A_1}(x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{x}}}$ donc $xf_{A_1}(x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{\sqrt{x}\pi}{2}$ donc $\boxed{A_1 \in S \text{ et } \Phi(A_1) = 0}$

10. Soit $x > 0$. On note la suite (a_n) associée à l'ensemble $A = A_1$
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a $v(n) = \text{Card}\left(\{(\alpha,\beta) \in A_1^2 \mid \alpha + \beta = n\}\right) = \text{Card}\left(\{(k, n-k) \mid k \in A_1 \text{ et } n-k \in A_1\}\right)$

donc $v(n) = \sum_{k=1}^{n-1} a_k a_{n-k} = \sum_{k=0}^{n} a_k a_{n-k}$ car $a_0 = 0$ et aussi $v(0) = 0 = \sum_{k=0}^{0} a_k a_{0-k}$

On effectue ensuite le produit de Cauchy de la série $\sum_{k\geq 0} a_k e^{-kx}$ absolument convergente par elle-même

pour obtenir : $\boxed{\text{la série } \sum_{n\geq 0} v(n)e^{-nx} \text{ converge et } \sum_{n=0}^{+\infty} v(n)e^{-nx} = (f_{A_1}(x))^2}$

Pour $n \in \mathbb{N}$. On note $a^{(2)}(n)$ le terme de la suite (a_n) associée à l'ensemble A_2

On a $a^{(2)}(n) \leq v(n)$ ainsi $\boxed{\text{pour tout } x > 0,\ f_{A_2}(x) \leq (f_{A_1}(x))^2}$

donc $xf_{A_2}(x) \leq (\sqrt{x}f_{A_1}(x))^2$ d'où $\boxed{\Phi(A_2) \leq \frac{\pi}{4}}$

D Étude de deux séries de fonctions

11. Soit $\psi_1, \psi_2 \in E$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.
Soit $x > 0$.
On a $|\alpha_n e^{-nx}\psi_1(e^{-nx})| \leq \|\psi_1\|_\infty \alpha_n e^{-nx}$

donc la série $\sum_{n\geq 0} \alpha_n e^{-nx}\psi_1(e^{-nx})$ converge par comparaison entre séries à termes positifs

donc $L(\psi_1)(x)$ existe dans $\mathbb{R}$

On a $L(\lambda\psi_1+\psi_2)(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\alpha_n e^{-nx}\left(\lambda\psi_1(e^{-nx})+\psi_2(e^{-nx})\right)\right) = \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n e^{-nx}\psi_1(e^{-nx}) + \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n e^{-nx}\psi_2(e^{-nx})$

donc $L(\lambda\psi_1+\psi_2)(x) = \lambda L(\psi_1)(x) + L(\psi_2)(x)$

ainsi $L(\lambda\psi_1+\psi_2) = \lambda L(\psi_1) + L(\psi_2)$

donc $\boxed{L \text{ est bien définie sur } E \text{ et l'application } L \text{ est une application linéaire de } E \text{ vers } \mathbb{R}^I = \Phi(]0,+\infty[,\mathbb{R})}$

Erreur d'énoncé ? Selon lequel, l'espace d'arrivée serait $\mathbb{R}^{[0,1]} = \Phi([0,1],\mathbb{R})$*) !*

On suppose que $\psi_1 \leq \psi_2$

On a pour tout $x > 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\alpha_n e^{-nx}\psi_1(e^{-nx}) \leq \alpha_n e^{-nx}\psi_2(e^{-nx})$ car $\alpha_n e^{-nx} \geq 0$

donc $L(\psi_1)(x) \leq L(\psi_2)(x)$ par comparaison de séries

donc $\boxed{\text{pour tous } \psi_1,\psi_2 \text{ dans } E,\ \psi_1 \leq \psi_2 \text{ entraîne } L(\psi_1) \leq L(\psi_2)}$

12. On a bien $\underline{E_1 \subset E \text{ (i)}}$ et $\underline{E_1 \neq \emptyset \text{ (ii)}}$ car $\Theta : x \in [0,1] \mapsto 0$ vérifie $\Theta \in E$ et $\lim_{x\to 0} x(L(\Theta))(x) = 0$

    Soit $\psi_1, \psi_2 \in E_1$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

    Pour $x > 0$, on a $x(L(\lambda\psi_1+\psi_2))(x) = \lambda x(L(\psi_1))(x) + x(L(\psi_2))(x)$

    donc par combinaison linéaire de limites on a $\lim_{x\to 0} x(L(\lambda\psi_1+\psi_2))(x) = \lambda \lim_{x\to 0} x(L(\psi_1))(x) + \lim_{x\to 0} x(L(\psi_2))(x)$

    ceci prouve que $\lambda\psi_1+\psi_2 \in E_1$ donc $\underline{E_1 \text{ est stable par combinaison linéaire (iii)}}$

    Avec (i), (ii) et (iii), $\boxed{E_1 \text{ est un sous espace vectoriel de } E}$

    De plus $\Delta(\lambda\psi_1+\psi_2) = \lambda\Delta(\psi_1)+\Delta(\psi_2)$ et $\Delta : E_1 \longrightarrow \mathbb{R}$ donc Δ est une forme linéaire de E_1.

    De plus $|x(L(\psi_1))(x)| \leq \|\psi_1\|_\infty x \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n e^{-nx}$

    Par passage à la limite en 0, on a $|\Delta(\psi_1)| \leq \ell\|\psi_1\|_\infty$

    d'où $\boxed{\text{l'application } \Delta \text{ est une forme linéaire continue de } (E_1, \|\ \|_\infty)}$

13. Soit $p \in \mathbb{N}$. On a $e_p \in E$ car continue par morceaux sur $[0,1]$.

    Soit $x > 0$. On a $L(e_p)(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n e^{-n(p+1)x}$

    donc $xL(e_p)(x) = \dfrac{[(p+1)x]\sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n e^{-n[(p+1)x]}}{p+1}$ et $(p+1)x > 0$

    par composition de limites, on a $\boxed{\Delta(e_p) = \dfrac{1}{p+1} \text{ et } e_p \in E_1}$. On remarque que $\Delta(e_p) = \ell\int_0^1 e_p$

    Donc par combinaison linéaire , pour toute fonction polynomiale P, on a $\Delta(P) = \ell\int_0^1 P$

Soit $\psi \in E_0$. Le théorème de Stone-Weierstrass nous fournit une suite de fonction polynomiale (P_k) qui converge uniformément vers ψ sur $[0,1]$

Soit $x>0$. Soit $k \in \mathbb{N}$. On a $|xL(\psi)(x) - xL(P_k)(x)| = x\,|L(\psi - P_k)(x)|$

comme $-\|\psi - P_k\|_\infty e_0 \leq \psi - P_k \leq \|\psi - P_k\|_\infty e_0$,

on a $-\|\psi - P_k\|_\infty L(e_0) \leq L(\psi - P_k) \leq \|\psi - P_k\|_\infty L(e_0)$ en utilisant 16.

Ainsi $|xL(\psi)(x) - xL(P_k)(x)| \leq \|\psi - P_k\|_\infty xL(e_0)(x)$

La fonction $x \mapsto xL(e_0)(x)$ est continue sur $]0,1]$ et admet comme limite ℓ en 0

donc $x \mapsto xL(e_0)(x)$ est prolongeable par continuité sur le segment $[0,1]$

donc le théorème des bornes atteintes nous fournit un majorant $M>0$

donc $\forall x \in]0,1]$, $|xL(\psi)(x) - xL(P_k)(x)| \leq \|\psi - P_k\|_\infty M$ or $\lim\limits_{k\to+\infty} \|\psi - P_k\|_\infty M = 0$

donc la suite de fonction $(x \mapsto xL(P_k)(x))_{k\geq 0}$ converge uniformément sur $]0,1]$ vers $x \mapsto xL(\psi)(x)$

En notant $\delta_k = \lim\limits_{x\to 0} xL(P_k)(x) = \Delta(P_k)$, le théorème de la double limite nous donne alors que la suite (δ_k) converge vers un certain $L \in \mathbb{R}$ et $L = \lim\limits_{x\to 0} xL(\psi)(x)$.

Ainsi $\psi \in E_1$. On en déduit que $\boxed{E_0 \subseteq E_1}$

La fonction : $\psi \in E_0 \mapsto \ell \int_0^1 \psi$ est une forme linéaire continue de $(E_0, \|\ \|_\infty)$ car $\forall \psi \in E_0$, $\left|\ell \int_0^1 \psi\right| \leq \ell \|\psi\|_\infty$

Les applications Δ et $\psi \mapsto \ell \int_0^1 \psi$ sont continues sur E et coïncident sur la partie des dense des fonctions polynomiales donc $\boxed{\text{pour tout } \psi \in E_0, \text{ on a } \Delta(\psi) = \ell \int_0^1 \psi}$

14. La fonction g_- est continue en tous points de $[0,1] \setminus \{a-\varepsilon, a\}$

De plus $\lim\limits_{x\to(a-\varepsilon)^-} g_(x) = \lim\limits_{x\to(a-\varepsilon)^-} g_(x) = g_(a-\varepsilon) = 1$ de même en a

donc g_- et g_+ (analogue) sont continues sur $[0,1]$ ainsi $\boxed{g_- \text{ et } g_+ \in E_0}$

On a $\Delta(g_-) = \ell \int_0^1 g_- = \ell \left(\int_0^{a-\varepsilon} g_- + \int_{a-\varepsilon}^a g_- + \int_a^1 g_- \right)$

on a $\int_0^{a-\varepsilon} g_- = a - \varepsilon$ et $\int_{a-\varepsilon}^a g_- = \dfrac{\varepsilon \cdot 1}{2}$ (aire d'un triangle) et $\int_a^1 g_- = 0$

et $\Delta(g_+) = \ell \left(\int_0^a g_+ + \int_a^{a+\varepsilon} g_+ + \int_{a+\varepsilon}^1 g_+ \right)$ et $\int_0^a g_+ = a$ et $\int_a^{a+\varepsilon} g_+ = \dfrac{\varepsilon \cdot 1}{2}$ et $\int_{a+\varepsilon}^1 g_+ = 0$

donc $\boxed{\Delta(g_-) = \ell\left(a - \frac{\varepsilon}{2}\right) \text{ et } \Delta(g_+) = \ell\left(a + \frac{\varepsilon}{2}\right)}$

On a $1_{[0,a]} \in E$ et $g_- \leq 1_{[0,a]} \leq g_+$

donc pour tout $x>0$, $xL(g_-)(x) \leq xL(1_{[0,a]})(x) \leq xL(g_+)(x)$

On a $\lim\limits_{x\to 0} xL(g_-)(x) = \ell\left(a - \dfrac{\varepsilon}{2}\right)$ ceci nous fournit $\alpha_1 > 0$ tel que $\forall x \in]0,\alpha_1],\ xL(g_-)(x) \geq \ell\left(a - \dfrac{\varepsilon}{2}\right) - \ell\dfrac{\varepsilon}{2}$

donc $\forall x \in]0,\alpha_1],\ xL(g_-)(x) \geq \ell\,(a-\varepsilon)$

de même on peut trouver $\alpha_2 > 0$, on a $\forall x \in]0,\alpha_2],\ xL(g_+)(x) \leq \ell\,(a+\varepsilon)$

donc en prenant $\alpha = \min(\alpha_1, \alpha_2)$ on a $\forall x \in]0,\alpha],\ \left|xL(1_{[0,a]})(x) - \ell a\right| \leq \ell\varepsilon$

On vient de montrer que $\lim\limits_{x\to 0} xL(1_{[0,a]})(x) = \ell a$ car $\ell\varepsilon$ est aussi petit que l'on veut

ainsi $\boxed{1_{[0,a]} \in E_1 \text{ et } \Delta(1_{[0,a]}) = \ell a = \ell \int_0^1 1_{[0,a]}}$

Pour $1_{[0,a[}$, les calcul sont identiques ce qui donne : $1_{[0,a[} \in E_1$ et $\Delta(1_{[0,a[}) = \ell a = \ell \int_0^1 1_{[0,a[}$

Pour $\alpha \in [0,1]$, on note $\delta_\alpha = 1_{\{\alpha\}}$.

On a donc $\delta_a = 1_{[0,a]} - 1_{[0,a[}$ ainsi par linéarité $\delta_a \in E_1$ et $\Delta(\delta_a) = 0 = \ell \int_0^1 \delta_a$

On remarque que $L(\delta_0) : x \mapsto 0$ donc on a encore : $\delta_0 \in E_1$ et $\Delta(\delta_0) = 0 = \ell \int_0^1 \delta_0$

En ce qui concerne $1_{[a,b]} = 1_{[0,b]} - 1_{[0,a[}$, on a $1_{[a,b]} \in E_1$ et $\Delta(1_{[a,b]}) = \ell(b-a) = \ell \int_0^1 1_{[a,b]}$

C'est analogue pour $1_{]a,b]}$, $1_{]a,b[}$ et $1_{[a,b[}$ et cela reste valable même si $a = 0$

On sait que $E_1 \subset E$. Soit maintenant $\psi \in E$.

On peut écrire $\psi = \varphi + \mathbb{E}$ où φ est continue sur $[0,1]$ et $\mathbb{E}$ est une fonction en escalier

On peut écrire $\mathbb{E} = \bigtriangleup i \in I\ \lambda_i 1_{J_i}$ où $(\lambda_i)_{i\in I}$ est une famille finie de réels

et $(J_i)_{i\in I}$ est une famille finie d'intervalles de $[0,1]$ (éventuellement singleton)

or $\varphi \in E_1$ d'après 18 et les $1_{J_i} \in E_1$ d'après ce qui précède

et on a $\Delta(\varphi) = \ell \int_0^1 \varphi$ et $\Delta(1_{J_i}) = \ell \int_0^1 1_{J_i}$

Comme Δ est linéaire sur le sous-espace vectoriel E_1,

on en déduit $\psi \in E_1$ et $\Delta(\psi) = \Delta(\varphi) + \bigtriangleup i \in I\ \lambda_i \Delta(1_{J_i}) = \ell \int_0^1 (\varphi + \mathbb{E})$

On en déduit que $\boxed{E_1 = E \text{ et } \Delta(\psi) = \ell \int_0^1 \psi \text{ pour tout } \psi \in E}$

15. On a $(L(\psi))(\frac{1}{N}) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n e^{-n/N} \psi(e^{-n/N}) = \sum_{n=0}^{N} \alpha_n e^{-n/N} \psi(e^{-n/N}) = \sum_{n=0}^{N} \alpha_n e^{-n/N} e^{n/N}$

    donc $\boxed{(L(\psi))(\frac{1}{N}) = \displaystyle\sum_{k=0}^{N} \alpha_k}$

    On a $\displaystyle\lim_{x\to 0} x(L(\psi))(x) = \Delta(\psi) = \ell \int_0^1 \psi = \ell \int_{1/\varepsilon}^1 \psi = \ell(\ln(1) - \ln(1/\varepsilon))$

    donc par composition de limites $\boxed{\displaystyle\lim_N^{+\infty} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N} \alpha_k = \ell = \lim_{x\to 0} \left(x \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n e^{-nx} \right)}$

16. En reprenant les notations de la partie **C**. On a $\operatorname{Card}(A(n)) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k$

    comme $A \in S$, $\displaystyle\lim_{x\to 0} \left(x \sum_{n=0}^{+\infty} a_n e^{-nx} \right) = \lim_{x\to 0} x f_A(x) = \Phi(A)$

    On peut appliquer donc le résultat précédent à la suite (a_n)

    donc $\displaystyle\lim n \to +\infty \frac{1}{n} \operatorname{Card}(A(n)) = \lim_{x\to 0} \left(x \sum_{n=0}^{+\infty} a_n e^{-nx} \right) = \lim_{x\to 0} x f_A(x)$

    $\boxed{\text{Si } A \in S, \text{ alors } \displaystyle\lim n \to +\infty \frac{1}{n} \operatorname{Card}(A(n)) = \Phi(A)}$

    Pour tout $x > 0$, la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0} v(n) e^{-nx}$ converge ayant pour somme $(f_{A_1}(x))^2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v(n) \geq 0$

    de plus $\displaystyle\lim_{x\to 0} x (f_{A_1}(x))^2 = \frac{\pi}{4}$ d'après 14 et 15

    On peut donc appliquer les résultats de cette partie et alors $\displaystyle\lim n \to +\infty \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} v(k) = \frac{\pi}{4}$