Corrigé du devoir surveillé n°7

1. Exercices

Exercice 1.

Discuter, suivant la valeur du paramètre $\alpha \in \mathbb{R}$, la convergence des intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha} dt$ **2.** $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}-1}{t^\alpha} dt$

3. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t-\sin t}{t^\alpha} dt$

Correction.

1. Attention, ici il y a un problème à la fois en 0 et en $+\infty$. Comme l'intégrale converge en 0 si et seulement si $\alpha < 1$ et qu'elle converge en $+\infty$ si et seulement si $\alpha > 1$, on en déduit que l'intégrale n'est jamais convergente.
2. En 0, on a $e^{-t} - 1 \sim_0 -t$ et donc la fonction est équivalente à $\frac{-1}{t^{\alpha-1}}$. L'intégrale converge donc en 0 si et seulement si $\alpha - 1 < 1$, c'est-à-dire si $\alpha < 2$. Au voisinage de l'infini, le numérateur est équivalent à -1 (car il tend vers -1, attention à ne pas être perturbé par la fonction exponentielle qui n'intervient pas ici au voisinage de l'infini !). On en déduit que la fonction est équivalente en $+\infty$ à $\frac{-1}{t^\alpha}$ et donc l'intégrale converge au voisinage de $+\infty$ si et seulement si $\alpha > 1$. En résumé, $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}-1}{t^\alpha} dt$ converge si et seulement si $1 < \alpha < 2$.
3. La fonction $t \mapsto \frac{t-\sin t}{t^\alpha}$ est continue sur $]0, +\infty[$. En $+\infty$, elle est équivalente à $\frac{1}{t^{\alpha-1}}$. Ainsi, l'intégrale est convergente au voisinage de $+\infty$ si et seulement si $\alpha > 2$. Au voisinage de 0, il faut faire un développement limité du sinus pour trouver un équivalent du numérateur. On a
$$t - \sin t = t - t + \frac{t^3}{6} + o(t^3)$$
et donc la fonction est équivalente à $\frac{1}{6t^{\alpha-3}}$. L'intégrale est convergente en 0 si et seulement si $\alpha - 3 < 1$, donc si et seulement si $\alpha < 4$. On en déduit que l'intégrale entre 0 et $+\infty$ est convergente si et seulement si $\alpha \in]2, 4[$.

Exercice 2. *CCP 2015*

On note $I =]0, +\infty[$ et on définit pour n entier naturel non nul et pour $x \in I$, $f_n(x) = e^{-nx} - 2e^{-2nx}$.

II.1. Justifier que pour tout entier naturel non nul n, les fonctions f_n sont intégrables sur I et calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_n(x)\mathrm{d}x$. Que vaut alors la somme $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\int_0^{+\infty} f_n(x)\mathrm{d}x\right)$?

II.2. Démontrer que la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} f_n$ converge simplement sur I. Déterminer sa fonction somme S et démontrer que S est intégrable sur I. Que vaut alors $\int_0^{+\infty}\left(\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)\right)\mathrm{d}x$?

II.3. Donner, sans aucun calcul, la nature de la série $\sum_{n\geq 1}\left(\int_0^{+\infty}|f_n(x)|\mathrm{d}x\right)$.

Correction.

II.1. Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, la fonction $f_n : x\mapsto e^{-nx}-2e^{-2nx}$ est continue sur $I=]0;+\infty[$ et se prolonge continûment en 0, donc elle est intégrable sur tout segment $[0,X]$ avec $X>0$.
En outre, pour tout réel $p>0$, la fonction positive $x\mapsto e^{-px}$ est intégrable sur $[0;+\infty[$ car elle est continue et

$$\forall X>0,\qquad \int_0^X e^{-px}dx=\frac{1-e^{-pX}}{p}\underset{X\to+\infty}{\longrightarrow}\frac{1}{p}.$$

Par combinaison linéaire, la fonction f_n est donc intégrable sur I pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, et

$$\int_0^{+\infty} f_n(x)dx=\int_0^{+\infty} e^{-nx}dx-2\int_0^{+\infty} e^{-2nx}dx=\frac{1}{n}-\frac{2}{2n}=0.$$

La série $\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\int_0^{+\infty} f_n(x)dx\right)$ est donc convergente (puisque son terme général est nul), et on a

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\int_0^{+\infty} f_n(x)dx\right)=0.$$

II.2. Pour tout $x>0$, les séries géométriques $\sum_{n\geq 1} e^{-nx}$ et $\sum_{n\geq 1} e^{-2nx}$ sont convergentes car leurs raisons e^{-x} et e^{-2x} appartiennent à $]0;1[$. Par combinaison linéaire, on en déduit que la série $\sum_{n\geq 1} f_n(x)$ converge, et

$$\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}(e^{-x})^n-2\sum_{n=1}^{+\infty}(e^{-2x})^n=\frac{e^{-x}}{1-e^{-x}}-\frac{2e^{-2x}}{1-e^{-2x}}.$$

Ceci montre que la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} f_n$ converge simplement sur l'intervalle I vers la fonction

$$S : x\longmapsto \frac{e^{-x}}{1-e^{-x}}-\frac{2e^{-2x}}{1-e^{-2x}}=\frac{e^{-x}}{1-e^{-x}}-\frac{2e^{-2x}}{(1-e^{-x})(1+e^{-x})}=\frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}.$$

Etudions l'intégrabilité de S sur I. Tout d'abord, S est continue sur I, et se prolonge continûment en 0, donc S est intégrable sur tout segment $[0, X]$ avec $X > 0$. Ensuite :

$$S(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} e^{-x},$$

et la fonction positive $x \mapsto e^{-x}$ est intégrable au voisinage de $+\infty$, donc S aussi. Ceci montre que S est intégrable sur I. Enfin, on a

$$\int_0^{+\infty}\left(\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)\right)dx = \int_0^{+\infty} S(x)dx = \lim_{X\to+\infty}\int_0^X \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}dx = \lim_{X\to+\infty}\left[-\ln(1+e^{-x})\right]_0^X = \ln(2).$$

II.3. La série $\sum\limits_{n\geq 1}\left(\int_0^{+\infty}|f_n(x)|dx\right)$ est divergente. En effet, si elle était convergente, alors on pourrait appliquer le théorème d'intégration terme à terme (car la série $\sum\limits_{n\geq 1} f_n$ converge simplement vers une fonction S continue par morceaux sur I), et on aurait alors

$$\int_0^{+\infty} S(x)dx = \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\int_0^{+\infty} f_n(x)dx\right) = 0,$$

ce qui n'est pas le cas d'après la question précédente.

Exercice 3. *Mines 2016 (début)*

Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on pose, sous réserve d'existence,

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}(u+x)}du \quad \text{et} \quad K = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}}du$$

1. Démontrer que $\psi : u \mapsto \dfrac{e^{-u}}{\sqrt{u}}$ est intégrale sur I.
2. Déterminer les valeurs de x pour lesquelles $F(x)$ est définie.
3. Montrer que la fonction F est de classe C^1 sur I et exprimer $F'(x)$ sous forme intégrale.

Exercice suivant = suite de l'exercice précédent : à ne faire que s'il vous reste du temps (ou rien d'autre à faire)

Exercice 4. *Mines 2016 (suite) – FACULTATIF*

4. En déduire que pour tout $x \in I$, $xF'(x) - (x - \frac{1}{2})F(x) = -K$.
5. Pour tout $x \in I$, on pose $G(x) = \sqrt{x}e^{-x}F(x)$. Montrer qu'il existe une constante réelle C telle que pour tout $x \in I$, $G(x) = C - K \cdot \displaystyle\int_0^x \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}dt$.
6. Déterminer les limites de G en 0 et $+\infty$, et en déduire la valeur de K.

Correction.

1. La fonction $\psi : u \mapsto \dfrac{e^{-u}}{\sqrt{u}}$ est continue sur I par théorèmes généraux.

   On a $\psi(u) \underset{u\to 0}{\sim} \dfrac{1}{u^{1/2}}$ or la fonction $u \mapsto \dfrac{1}{u^{1/2}}$ est intégrable sur $]0,1]$ car $\frac{1}{2} < 1$
   Donc par comparaison à une fonction positive, ψ est intégrable sur $]0,1]$
   De plus par croissance comparée $u^2\psi(u) \underset{u\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ donc $\psi(u) \underset{u\to+\infty}{=} \omega\left(\dfrac{1}{u^2}\right)$
   or la fonction $u \mapsto \dfrac{1}{u^2}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$ car $2 > 1$
   Donc par comparaison à une fonction positive, ψ est intégrable sur $[1,+\infty[$
   Ainsi $\boxed{\psi : u \mapsto \dfrac{e^{-u}}{\sqrt{u}} \text{ est intégrale sur } I}$ En particulier, on en déduit l'existence de K.

2. Analyse : Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $F(x)$ existe.

   Par les limitations du programme, la fonction $u \mapsto \dfrac{e^{-u}}{\sqrt{u}(u+x)}$ est définie (et continue par morceaux) sur I
   donc $x \geq 0$
   De plus a fonction $u \mapsto \dfrac{e^{-u}}{\sqrt{u}(u+x)}$ étant positive sur I, elle y est intégrable.
   Si on avait $x = 0$, on aurait $\frac{e^{-u}}{\sqrt{u}(u+x)} \underset{u\to 0}{\sim} \frac{1}{u^{3/2}}$ et par équivalence entre fonctions positives $u \mapsto \frac{1}{u^{3/2}}$ serait intégrable sur $]0,1]$ et donc on aurait $3/2 < 1$ Absurde
   donc $x > 0$
   Synthèse : Soit $x > 0$.
   La fonction $u \mapsto \dfrac{e^{-u}}{\sqrt{u}(u+x)}$ est continue sur I
   De plus $\dfrac{e^{-u}}{\sqrt{u}(u+x)} \underset{u\to 0}{\sim} \dfrac{1}{xu^{1/2}}$ et $\dfrac{e^{-u}}{\sqrt{u}(u+x)} \underset{u\to+\infty}{=} \omega\left(\dfrac{1}{u^2}\right)$
   On peut conclure comme en **1** que $u \mapsto \dfrac{e^{-u}}{\sqrt{u}(u+x)}$ est intégrable sur I
   Conclusion : $\boxed{\text{l'ensemble les valeurs de } x \text{ pour lesquelles } F(x) \text{ est définie est } I =]0,+\infty[}$

3. On pose $f : (x,u) \in I^2 \longmapsto \dfrac{e^{-u}}{\sqrt{u}(u+x)}$

   (i) Soit $u \in I$.
   La fonction $x \longmapsto \dfrac{e^{-u}}{\sqrt{u}(u+x)}$ est de classe C^1 sur I et admet comme dérivée $x \longmapsto \dfrac{(}{x}, u) = \dfrac{-e^{-u}}{\sqrt{u}(u+x)^2}$

   (ii) Soit $x \in I$. La fonction $u \longmapsto f(x,u) = \dfrac{e^{-u}}{\sqrt{u}(u+x)}$ est continue et intégrable sur I d'après la question précédente.

   (iii) Soit $x \in I$. La fonction $u \longmapsto \dfrac{\partial}{\partial x}(x,u) = \dfrac{-e^{-u}}{\sqrt{u}(u+x)^2}$ est continue sur I

   (iv) Soit $a < b$ dans I. On a l'hypothèse de domination :

$$\forall x \in [a,b],\ \forall t \in I,\ \left|\frac{\partial}{\partial x}(x,u)\right| \leq \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}(u+a)^2}$$

et la fonction $u \mapsto \dfrac{e^{-u}}{\sqrt{u}(u+a)^2}$ est continue et intégrable sur $]0,+\infty[$ (l'intégrabilité étant analogue aux précédentes)

En conclusion avec (i), (ii), (iii) et (iv), le théorème de Leibniz s'applique :

$$\boxed{\text{la fonction } F \text{ est de classe } C^1 \text{ sur } I \text{ et } F' : x \longmapsto \int_0^{+\infty} \frac{-e^{-u}}{\sqrt{u}(u+x)^2} du}$$

4. Soit $x \in I$.

On a $xF'(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{-e^{-u}(x+u)}{\sqrt{u}(u+x)^2} du + \int_0^{+\infty} \frac{e^{-u}u}{\sqrt{u}(u+x)^2} du = \int_0^{+\infty} \frac{-e^{-u}}{\sqrt{u}(u+x)} du + \int_0^{+\infty} \frac{e^{-u}\sqrt{u}}{(u+x)^2} du$

donc $xF'(x) = -F(x) + \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-u}\sqrt{u}}{(u+x)^2} du$

On va effectuer une intégration par parties (sous réserve d'existence) avec des fonctions de classe C^1.

$\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-u}\sqrt{u}}{(u+x)^2} du = \left[\frac{-e^{-u}\sqrt{u}}{u+x}\right]_{u=0}^{u\to+\infty} + \int_0^{+\infty} \left(\frac{e^{-u}}{2\sqrt{u}(u+x)} - \frac{e^{-u}\sqrt{u}}{u+x}\right) du$

Le terme entre crochets est nul par croissance comparée, ce qui valide l'intégration par parties

ainsi $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-u}\sqrt{u}}{(u+x)^2} du = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-u}}{2\sqrt{u}(u+x)} du - \int_0^{+\infty} \frac{e^{-u}\sqrt{u}}{u+x} du = \frac{1}{2}F(x) - \int_0^{+\infty} \frac{e^{-u}\sqrt{u}}{u+x} du$

On a bien le droit de couper l'intégrale en 2 car on a reconnu $F(x)$

donc $xF'(x) = -\frac{1}{2}F(x) - \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-u}\sqrt{u}}{u+x} du$

donc $xF'(x) - (x - \frac{1}{2})F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{-xe^{-u}}{\sqrt{u}(u+x)} du - \int_0^{+\infty} \frac{e^{-u}\sqrt{u}}{u+x} du$

donc $xF'(x) - (x - \frac{1}{2})F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{-(x+u)e^{-u}}{\sqrt{u}(u+x)} du$ après mise au même dénominateur

On en déduit $\boxed{\text{pour tout } x \in I,\ xF'(x) - (x - \tfrac{1}{2})F(x) = -K.}$

5. La fonction G est de classe C^1 par produit

et on a $G'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}e^{-x}F(x) - \sqrt{x}e^{-x}F(x) + \sqrt{x}e^{-x}F'(x) = \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}\left(xF'(x) - (x - \frac{1}{2})F(x)\right)$

donc $G'(x) = -K\dfrac{e^{-x}}{\sqrt{x}}$

La fonction $x \mapsto K\dfrac{e^{-x}}{\sqrt{x}}$ étant continue sur $]0,+\infty[$ et intégrable au voisinage de 0

alors la fonction $x \mapsto K \cdot \displaystyle\int_0^x \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt$ est de classe C^1 et de dérivée $x \mapsto K\dfrac{e^{-x}}{\sqrt{x}}$

donc la fonction $x \mapsto G(x) + K \cdot \displaystyle\int_0^x \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt$ est constante sur l'intervalle I

Ainsi $\boxed{\text{il existe une constante réelle } C \text{ telle que pour tout } x \in I,\ G(x) = C - K \cdot \int_0^x \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt}$

6. Soit $x > 0$. La fonction $u \mapsto \frac{u}{x}$ est C^1, strictement croissante et bijective de I vers I
On effectue dans $G(x)$ sous forme intégrale le changement de variable $t = \frac{u}{x}$; $u = tx$; $du = xdt$
donc $G(x) = e^{-x} \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{xe^{-tx}}{\sqrt{t}(tx+x)} dt = e^{-x} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-tx}}{\sqrt{t}(t+1)} dt$
On considère une suite (x_n) à valeurs dans I qui converge vers 0
On pose $f_n : t \mapsto \dfrac{e^{-tx_n}}{\sqrt{t}(t+1)}$ et $f : t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{t}(t+1)}$
(i) Les fonctions f_n sont continues sur I
(ii) La suite $(f_n)_n$ converge simplement vers f sur I
(iii) La fonction f est continue sur I
(iv) De plus $f(t) \underset{t \to 0}{\sim} \dfrac{1}{t^{1/2}}$ et $f(t) \underset{t \to +\infty}{\sim} \dfrac{1}{t^{3/2}}$ ainsi comme en **1.**, f est intégrable sur I et on a l'hypothèse de domination :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall t \in I,\ |f_n(t)| \leq f(t)$$

Avec $(i), (ii), (iii)$ et (iv), le théorème de convergence dominée s'applique et on a $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \int_I f_n = \int_I f$
Donc par caractérisation séquentielle de la limite $\displaystyle\lim_{x \to 0} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-tx}}{\sqrt{t}(t+1)} dt = \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t}(t+1)} dt$
Remarque : On aurait pu utiliser directement l'extension du théorème de convergence dominé
donc par produit $\displaystyle\lim_{x \to 0} G(x) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t}(t+1)} dt$
On la fonction $t \mapsto \sqrt{t}$ est de classe C^1, strictement croissante et bijective de I vers I
on effectue le changement de variables $v = \sqrt{t}$; $t = v^2$; $dt = 2vdv$
et donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t}(t+1)} dt = 2 \int_0^{+\infty} \frac{1}{v^2+1} dv = 2 \left[\arctan(v)\right]_{v=0}^{v \to +\infty} = \pi$
donc $\boxed{\lim_{x \to 0} G(x) = \pi}$
de plus pour $x > 0$, on a $0 \leq G(x) = e^{-x} \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-tx}}{\sqrt{t}(t+1)} dt \leq e^{-x} \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t}(t+1)} dt$
donc par théorème d'encadrement $\boxed{\lim_{x \to +\infty} G(x) = 0}$
La fonction $t \mapsto \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}$ étant continue et intégrable sur I, on a $\displaystyle\lim_{x \to 0} \int_0^x \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt = 0$
comme $G : x \mapsto C - K \cdot \displaystyle\int_0^x \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt$ on a donc $C = \pi$
or $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \int_0^x \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt = K$
donc $0 = \displaystyle\lim_{x \to +\infty} G(x) = \pi - K^2$ de plus on a $K \geq 0$ par positivité de l'intégrale donc $\boxed{K = \sqrt{\pi}}$

2. Un Problème au choix

a. E3A

Problème 1. *E3A 2016*

On considère les fonctions F et G définies par :

$$F(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1+4n^2x^2} \quad et \quad G(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{e^{2xt}-1}\,dt$$

1. Pour un réel $x > 0$, justifier la convergence de l'intégrale :

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+4t^2x^2}\,dt$$

puis calculer la valeur de cette intégrale (on pourra utiliser le changement de variable $u = 2xt$).

2. Démontrer que F est définie sur $\mathbb{R}^*$ et étudier la parité de F.

3. Soient a et b des réels avec $b > a > 0$. Démontrer que F est de classe C^1 sur $]a, b[$. Que peut-on en déduire ?

4. Pour $x > 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$, justifier l'inégalité :

$$\frac{1}{1+4n^2x^2} \leq \int_{n-1}^{n} \frac{1}{1+4t^2x^2}\,dt$$

puis établir que $F(x) \leq \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+4t^2x^2}\,dt$.

5. Pour $x > 0$, démontrer de même l'inégalité : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+4t^2x^2}\,dt - 1 \leq F(x)$.

6. En déduire un équivalent de $F(x)$ lorsque $x \to 0^+$ et la limite de $F(x)$ lorsque $x \to +\infty$.

7. Étudier les variations de F puis représenter graphiquement la fonction F sur $\mathbb{R}^*$.

8. Démontrer que G est définie sur $\mathbb{R}^{+*}$.

9. Démontrer que G est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$.

10. Pour $\alpha \in \mathbb{R}^{+*}$, établir la convergence l'intégrale :

$$I_\alpha = \int_0^{+\infty} \sin(t)e^{-\alpha t}\,dt$$

et calculer sa valeur.

11. Démontrer que quels que soient $t > 0$ et $x > 0$:

$$\frac{\sin t}{e^{2xt} - 1} = \sum_{n=1}^{+\infty} \sin(t) e^{-2nxt}$$

12. En déduire une relation entre F et G (on justifiera la réponse).

Correction.

1. • En notant $m(x,t)=\frac{1}{1+4\,t^2\,x^2}$ pour tout (x,t) dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+$, pour tout $x>0$, l'application partielle $[m(x,\cdot):\ t\mapsto m(x,t)]$ est continue sur $\mathbb{R}_+$.
Avec $m(x,t)\underset{t\to+\infty}{=}\mathrm{O}(\frac{1}{t^2})$ et l'intégrabilité de $[t\mapsto\frac{1}{t^2}]$ sur tout $[a,+\infty[$ avec $a>0$ (intégrale de Riemann, $2>1$), $m(x,\cdot)$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ et l'intégrale $\int_0^{+\infty}\frac{dt}{1+4\,t^2\,x^2}$ est convergente.
• Pour $x>0$, et y dans $\mathbb{R}_+$, l'application linéaire non nulle $[t\mapsto 2\,x\,t]$ est de classe $\mathcal{C}^1$ de $[0,y]$ sur $[0,2\,x\,y]$, donc, en posant $u=2\,x\,t$ on a $du=2\,x\,t$ et le changement de variable donne $\int_0^y\frac{dt}{1+4\,t^2\,x^2}=\frac{1}{2\,x}\int_0^{2\,x\,y}\frac{du}{1+u^2}$.
Avec $\int_0^{2\,x\,y}\frac{du}{1+u^2}=[\arctan u]_0^{2\,x\,y}=\arctan(2\,x\,y)$ et $\lim\limits_{+\infty}\arctan=\frac{\pi}{2}$, on obtient
$$\boxed{\forall x>0,\ \int_0^{+\infty}\frac{dt}{1+4\,t^2\,x^2}=\frac{\pi}{4\,x}}\,.$$
(la deuxième partie de la question dispense de la première, puisqu'elle établie la convergence en même temps qu'elle donne la valeur de l'intégrale)

2. Pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, on a $m(0,n)=1$ donc la série $\sum m(0,n)$ est grossièrement divergente.
Pour tout x dans $\mathbb{R}^*$, on a $m(x,n)\underset{n\to\infty}{=}\mathrm{O}(\frac{1}{n^2})$, donc par comparaison aux séries de Riemann, la série $\sum m(x,n)$ est convergente.
Avec $m(-x,\cdot)=m(x,\cdot)$ pour tout x dans $\mathbb{R}$, on a donc :
$$\boxed{F\text{ est définie sur }\mathbb{R}^*\text{ et }F\text{ est paire}}\,.$$

3. • On déroule le théorème de dérivation des sommes de séries de fonctions.
En notant $u_n(x)=\frac{1}{1+4\,n^2\,x^2}$ pour n dans $\mathbb{N}^*$ et x dans $\mathbb{R}$, on a
$$u_n\in\mathcal{C}^1(\mathbb{R})\text{ avec }u_n'(x)=-\frac{8\,n^2\,x}{(1+4\,n^2\,x^2)^2}\text{ pour tout }(n,x)\text{ dans }\mathbb{N}^*\times\mathbb{R}.$$
Pour $0<a<b$ et $x\in[a,b]$ on a $|u_n'(x)|\leqslant\frac{8\,n^2\,x}{(4\,n^2\,x^2)^2}=\frac{1}{2\,n^2\,x^3}$, donc $\|u_n'\|_{\infty,[a,b]}\leqslant\frac{1}{2\,n^2\,a^3}$ et, avec la convergence de la série numérique $\sum\frac{1}{n^2}$, la série de fonctions $\sum u_n'$ est normalement convergente sur le segment $[a,b]$. Ainsi, avec le théorème sus-nommé, F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur le segment $[a,b]$ avec $F'(x)=-\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{8\,n^2\,x}{(1+4\,n^2\,x^2)^2}$ pour tout x dans $[a,b]$.
• Avec $\mathbb{R}_+^*=\bigcup\limits_{x\in\mathbb{R}_+^*}[\frac{x}{2},x+1]$ et la parité de F, on en déduit
$$\boxed{F\in\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^*)\text{ et }F'(x)=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{8\,n^2\,x}{(1+4\,n^2\,x^2)^2}\text{ pour tout }x\neq 0}\,.$$

4. Pour $x>0$, la fonction $m(x,\cdot)$ étant continue et décroissante sur $\mathbb{R}_+$ on a, pour tout n dans $\mathbb{N}^*$,
$$\frac{1}{1+4\,n^2\,x^2}=m(x,n)\times 1=\int_{n-1}^n m(x,n)\,dt\leqslant\int_{n-1}^n m(x,t)\,dt,$$
c'est-à-dire $\boxed{\forall x>0,\ \forall n\in\mathbb{N}^*,\ \frac{1}{1+4\,n^2\,x^2}\leqslant\int_{n-1}^n\frac{dt}{1+4\,x^2\,t^2}}$.
Alors, pour tout N dans $\mathbb{N}^*$, avec la relation de Chasles pour les intégrales, on a
$$\sum_{n=1}^N\frac{1}{1+4\,n^2\,x^2}\leqslant\sum_{n=1}^N\int_{n-1}^n\frac{dt}{1+4\,x^2\,t^2}=\int_0^N\frac{dt}{1+4\,x^2\,t^2}.$$
Avec la convergence de l'intégrale $\int_0^{+\infty}\frac{dt}{1+4\,t^2\,x^2}$ et la convergence de la série dont F est la somme, on obtient $\boxed{\forall x>0,\ F(x)\leqslant\int_0^{+\infty}\frac{dt}{1+4\,t^2\,x^2}}$.

5. Avec $\frac{1}{1+4\,n^2\,x^2}\geqslant\int_n^{n+1}\frac{dt}{1+4\,x^2\,t^2}$ pour tout n dans $\mathbb{N}$, on obtient

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{1+4\,n^2\,x^2} \geqslant \sum_{n=1}^{N} \int_n^{n+1} \frac{dt}{1+4\,x^2\,t^2} = \int_1^{N+1} \frac{dt}{1+4\,x^2\,t^2}$$

puis, $F(x) \geqslant \int_1^{+\infty} \frac{dt}{1+4\,x^2\,t^2} = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+4\,x^2\,t^2} - \int_0^1 \frac{dt}{1+4\,x^2\,t^2}$

et, avec $\int_0^1 \frac{dt}{1+4x^2\,t^2} \leqslant \int_0^1 dt = 1$, on obtient finalement

$$\boxed{\forall x > 0,\ F(x) \geqslant \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+4\,x^2\,t^2} - 1}.$$

6. • Avec le résultat obtenu en question 1, on a donc

$$\forall x > 0,\ \tfrac{\pi}{4x} - 1 \leqslant F(x) \leqslant \tfrac{\pi}{4\,x},\ \text{i.e. } 1 - \tfrac{4\,x}{\pi} \leqslant \tfrac{F(x)}{\pi/4x} \leqslant 1,$$

ce qui donne par encadrement $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{F(x)}{\pi/4x} = 1$, c'est-à dire $\boxed{F(x) \underset{x\to 0^+}{\sim} \frac{\pi}{4\,x}}$.

• Avec $0 \leqslant F(x) \leqslant \frac{\pi}{4\,x}$, par encadrement on a $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = 0}$.

7. Avec la parité de F, il suffit d'étudier sur $\mathbb{R}_+^*$ et le résultat de la question 3 donne $F'(x) < 0$ pour tout $x > 0$, donc F est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

(on aurait pu montrer aussi que $0 < x < y \Longrightarrow F(x) < F(y)$)

On voit aussi que F est convexe et avec les limites obtenues précédemment on a l'allure de la courbe avec les deux asymptotes verticale et horizontale.*(cela ressemble à l'hyperbole d'équation $y = \frac{1}{x}$ et c'est tout ce que l'on veut voir sur l'esquisse...)*

8. On pose $p(x,t) = \frac{\sin(t)}{e^{2\,x\,t}-1}$ pour tout (x,t) dans $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$.

Pour tout $x > 0$, $p(x,\cdot)$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et avec $\sin(t) \underset{t\to 0}{\sim} t$ et $[e^{2\,x\,t}-1] \underset{t\to 0}{\sim} 2\,x\,t$ on a $\lim\limits_{t\to 0^+} p(x,t) = \frac{1}{2\,x}$, donc en posant $p(x,0) = \frac{1}{2\,x}$, la fonction $p(x,\cdot)$ est continue sur $\mathbb{R}_+$.

Avec

$$|p(x,t)| \leqslant \tfrac{1}{e^{2\,x\,t}-1}, \quad \tfrac{1}{e^{2x\,t}-1} \underset{t\to+\infty}{\sim} e^{-2\,x\,t}, \quad e^{-2\,x\,t} \underset{t\to+\infty}{=} O(\tfrac{1}{t^2}),$$

les résultats connus sur les intégrales de Riemann et les théorèmes relatifs aux comparaisons pour les intégrales, $p(x,\cdot)$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ donc l'intégrale définissant G est convergente et $\boxed{G \text{ est définie sur } \mathbb{R}_+^*}$.

9. Pour tout $x > 0$, $p(x,\cdot)$ est continue (par morceaux) sur $\mathbb{R}_+^*$ et pour tout t dans $\mathbb{R}_+^*$, $p(\cdot,t)$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

Pour tout segment $[a,b]$ inclus dans $\mathbb{R}_+^*$ $(0 < a < b)$ et tout (x,t) dans $[a,b] \times \mathbb{R}_+^*$, avec $|\sin(t)| \leqslant t$, on a $|p(x,t)| \leqslant \varphi(t)$ avec $\varphi(t) = \frac{t}{e^{2\,a\,t}-1}$.

Avec $\lim\limits_{t\to 0^+} \varphi(t) = \frac{1}{2\,a}$ et $\varphi(t) \underset{t\to+\infty}{=} O(\frac{1}{t^2})$ (comme ci-dessus), la fonction φ est continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+$ donc aussi sur $\mathbb{R}_+^*$, et le théorème de continuité des intégrales dépendant d'un paramètre (dans sa version locale) donne

$$\boxed{G \text{ est continue sur } \mathbb{R}_+^*}.$$

10. Pour $\alpha > 0$, l'application $[t \mapsto \sin(t)\,e^{-\alpha\,t}]$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ et avec $|\sin(t)\,e^{-\alpha\,t}| \leqslant e^{-\alpha\,t}$ et $e^{-\alpha\,t} \underset{t\to+\infty}{=} O(\frac{1}{t^2})$ (puisque $\alpha > 0$), on a l'intégrabilité donc la convergence de l'intégrale.

Comme $\sin(t)$ est la partie imaginaire de $e^{i\,t}$, cette intégrale est la partie imaginaire de $\int_0^{+\infty} e^{(-\alpha+i)\,t}\,dt$. En notant $a = (-\alpha + i) \neq 0$, pour tout $x > 0$ on a

$$\int_0^x e^{a\,t}\,dt = \frac{1}{a}\int_0^x e^{a\,t}\,dt = \frac{e^{a\,x}-1}{a}.$$

Avec $e^{a\,x} = e^{-\alpha\,x}\,e^{i\,x}$ on a $|e^{a\,x}| = e^{-\alpha\,x}$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{a\,x} = 0$ et

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{a\,t}\,dt = -\frac{1}{a} = \frac{1}{\alpha - \mathrm{i}} = \frac{\alpha + \mathrm{i}}{\alpha^2+1}$$

et finalement $\boxed{\displaystyle\int_0^{+\infty} \sin(t)\,\mathrm{e}^{-\alpha\,t}\,dt = \frac{1}{\alpha^2+1}}$.

11. Pour tout $x > 0$ et tout $t > 0$ on a $-2x\,t > 0$ donc $\mathrm{e}^{-2\,x\,t} \in]0,1[$, donc avec la série géométrique : $\forall x > 0,\ \forall t \in \mathbb{R}_+^*,\ \frac{1}{1-\mathrm{e}^{-2\,x\,t}} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} [\mathrm{e}^{-2\,x\,t}]^n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \mathrm{e}^{-2\,n\,x\,t}$.

   Avec $p(x,t) = \mathrm{e}^{-2\,x\,t}\sin(t)\,\frac{1}{1-\mathrm{e}^{-2\,x\,t}}$, on obtient $p(x,t) = \mathrm{e}^{-2\,x\,t}\sin(t)\sum\limits_{n=0}^{\infty} \mathrm{e}^{-2\,n\,x\,t}$, c'est-à-dire

$$\boxed{\forall x > 0,\ \forall t > 0,\ \frac{\sin(t)}{\mathrm{e}^{2\,x\,t}-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \sin(t)\,\mathrm{e}^{-2\,n\,x\,t}}.$$

12. *(Il s'agit ici d'utiliser ici un des deux théorèmes qui permettent d'intervertir la sommation discrète et l'intégrale ; on pourrait utiliser le théorème de convergence dominée avec la suite des somme partielles d'autant que la majoration brutale $|\sin(t)| \leqslant 1$ ne permet pas d'utiliser l'autre théorème, celui qui n'a pas de nom ; la mise en œuvre du premier théorème est assez lourde et la majoration plus subtile $|\sin t| \leqslant |t|$ va nous permettre d'utiliser le deuxième)*

   En posant $f_n(t) = \sin(t)\,\mathrm{e}^{-2\,n\,x\,t}$ pour tout n dans $\mathbb{N}^*$ et t dans $\mathbb{R}_+$, on a f_n continue sur $\mathbb{R}_+$ et avec $|f_n(t)| \leqslant t\,\mathrm{e}^{-2\,n\,x\,t}$, une intégration par parties donne pour tout y dans $\mathbb{R}_+$,

$$\int_0^y |f_n(t)|\,dt \leqslant \int_0^y t\,\mathrm{e}^{-2\,n\,x\,t}\,dt = \left[-\frac{t\,\mathrm{e}^{-2\,n\,x\,t}}{2\,n\,x}\right]_0^y + \frac{1}{2\,n\,x}\int_0^y \mathrm{e}^{-2\,n\,x\,t}\,dt$$

$$\int_0^y |f_n(t)|\,dt \leqslant -\frac{y\,\mathrm{e}^{-2\,n\,x\,y}}{2\,n\,x} + \frac{1}{(2\,n\,x)^2}\left[-\mathrm{e}^{-2\,n\,x\,t}\right]_0^y.$$

   Avec $\lim\limits_{y\to+\infty} \mathrm{e}^{-2\,n\,x\,y} = 0$ on obtient $N_1(f_n) = \int_0^{+\infty} |f_n| \leqslant \frac{1}{4\,x^2} \times \frac{1}{n^2}$. Comme la série $\sum \frac{1}{n^2}$ est convergente, le théorème d'intégration terme à terme donne (sur l'intervalle $\mathbb{R}_+^* =]0,+\infty[$ pour garder le développement avec la série géométrique) l'interversion et on a (avec la continuité de f_n sur $\mathbb{R}_+ = [0,+\infty[$)

$$\int_{]0,+\infty[} p(x,\cdot) = \sum_{n=1}^{\infty}\int_{]0,+\infty[} \sin(t)\,\mathrm{e}^{-2n\,x\,t}\,dt = \sum_{n=1}^{\infty}\int_{[0,+\infty[} \sin(t)\,\mathrm{e}^{-2\,n\,x\,t}\,dt.$$

   Avec le résultat obtenu dans la question précédente, on obtient finalement

$$\boxed{\forall x > 0,\ G(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+4\,n^2\,x^2} = F(x)}.$$

b. Niveau Centrale

Problème 2. *Centrale 2015*

Autour des sommes d'Euler

Dans tout le problème, on note pour tout entier $n \geqslant 1$, $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$.

On note ζ la fonction définie pour $x > 1$ par $\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$.

Le but du problème est d'étudier des séries faisant intervenir la suite (H_n) et notamment d'obtenir une relation due à Euler qui exprime, pour r entier naturel supérieur ou égal à 2, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{H_n}{(n+1)^r}$ à l'aide de valeurs de la fonction ζ en des points entiers.

I Représentation intégrale de sommes de séries

I.A –

I.A.1) Justifier que la série de terme général $a_n = \frac{1}{n} - \int_{n-1}^{n} \frac{\mathrm{d}t}{t}$ converge.

I.A.2) Montrer qu'il existe une constante réelle A telle que $H_n \underset{+\infty}{=} \ln n + A + o(1)$. En déduire que $H_n \sim \ln n$.

I.B – Soit r un entier naturel.

Pour quelles valeurs de r, la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{H_n}{(n+1)^r}$ est-elle convergente ?

Dans toute la suite on notera $S_r = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{H_n}{(n+1)^r}$ lorsque la série converge.

I.C –

I.C.1) Donner sans démonstration les développements en série entière des fonctions $t \mapsto \ln(1-t)$ et $t \mapsto \frac{1}{1-t}$ ainsi que leur rayon de convergence.

I.C.2) En déduire que la fonction

$$t \mapsto -\frac{\ln(1-t)}{1-t}$$

est développable en série entière sur $]-1,1[$ et préciser son développement en série entière à l'aide des réels H_n.

I.D – Pour tout couple d'entiers naturels (p,q) et pour tout $\varepsilon \in]0,1[$, on note

$$I_{p,q} = \int_0^1 t^p (\ln t)^q \,\mathrm{d}t \qquad \text{et} \qquad I_{p,q}^{\varepsilon} = \int_{\varepsilon}^1 t^p (\ln t)^q \,\mathrm{d}t$$

I.D.1) Montrer que l'intégrale $I_{p,q}$ existe pour tout couple d'entiers naturels (p,q).

I.D.2) Montrer que, $\forall p \in \mathbb{N}, \forall q \in \mathbb{N}^*, \forall \varepsilon \in]0,1[$, $\quad I_{p,q}^{\varepsilon} = -\frac{q}{p+1} I_{p,q-1}^{\varepsilon} - \frac{\varepsilon^{p+1}(\ln \varepsilon)^q}{p+1}$.

I.D.3) En déduire que l'on a $\forall p \in \mathbb{N}, \forall q \in \mathbb{N}^*$, $\quad I_{p,q} = -\frac{q}{p+1} I_{p,q-1}$.

I.D.4) En déduire une expression de $I_{p,q}$ en fonction des entiers p et q.

I.E – Soit r un entier naturel non nul et f une fonction développable en série entière sur $]-1,1[$.

On suppose que pour tout x dans $]-1,1[$, $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ et que $\sum_{n\geqslant 0} \frac{a_n}{(n+1)^r}$ converge absolument.

Montrer que $\int_0^1 (\ln t)^{r-1} f(t) \,\mathrm{d}t = (-1)^{r-1}(r-1)! \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{(n+1)^r}$.

I.F –

I.F.1) Déduire des questions précédentes que pour tout entier $r \geqslant 2$,

$$S_r = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{H_n}{(n+1)^r} = \frac{(-1)^r}{(r-1)!} \int_0^1 (\ln t)^{r-1} \frac{\ln(1-t)}{1-t} \, \mathrm{d}t$$

I.F.2) Établir que l'on a alors $S_r = \dfrac{(-1)^r}{2(r-2)!} \displaystyle\int_0^1 \frac{(\ln t)^{r-2}(\ln(1-t))^2}{t} \, \mathrm{d}t$.

I.F.3) En déduire que $S_2 = \dfrac{1}{2} \displaystyle\int_0^1 \frac{(\ln t)^2}{1-t} \, \mathrm{d}t$

puis trouver la valeur de S_2 en fonction de $\zeta(3)$.

II La fonction β

II.A – La fonction Γ

II.A.1) Soit $x > 0$. Montrer que $t \mapsto t^{x-1} e^{-t}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$.

Dans toute la suite, on notera Γ la fonction définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par $\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} \, \mathrm{d}t$.

On admettra que Γ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur son ensemble de définition, à valeurs strictement positives et qu'elle vérifie, pour tout réel $x > 0$, la relation $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.

II.A.2) Soit x et α deux réels strictement positifs. Justifier l'existence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-\alpha t} \, \mathrm{d}t$ et donner sa valeur en fonction de $\Gamma(x)$ et α^x.

II.B – La fonction β et son équation fonctionnelle

Pour (x, y) dans $(\mathbb{R}^{+*})^2$, on définit $\beta(x, y) = \displaystyle\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1} \, \mathrm{d}t$.

II.B.1) Justifier l'existence de $\beta(x, y)$ pour $x > 0$ et $y > 0$.

II.B.2) Montrer que pour tous réels $x > 0$ et $y > 0$, $\beta(x, y) = \beta(y, x)$.

II.B.3) Soient $x > 0$ et $y > 0$. Établir que $\beta(x+1, y) = \dfrac{x}{x+y} \beta(x, y)$.

II.B.4) En déduire que pour $x > 0$, $y > 0$, $\beta(x+1, y+1) = \dfrac{xy}{(x+y)(x+y+1)} \beta(x, y)$.

Correction.

I.A -

I.A.1) Pour $n \geqslant 2$, on a $a_n = \dfrac{1}{n} - \displaystyle\int_{n-1}^{n} \frac{\mathrm{d}t}{t} = \frac{1}{n} - [\ln(t)]_{n-1}^{n} = \frac{1}{n} - \ln\left(\frac{n}{n-1}\right)$

$$= \frac{1}{n} + \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} + \left(-\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)$$

donc $a_n \underset{n\to\infty}{\sim} -\dfrac{1}{2n^2}$ donc, par comparaison à une série de Riemann, $\underline{(\sum a_n)_{n\geqslant 2} \text{ converge}}$.

I.A.2) ⋄ Puisque $\forall k \geqslant 2,\ a_k = \dfrac{1}{k} - \ln(k) + \ln(k-1)$, par télescopage, $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} a_k = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n) = H_n - 1 - \ln(n)$

donc $H_n = \ln(n) + 1 + \displaystyle\sum_{k=2}^{n} a_k = \ln(n) + 1 + \sum_{k=2}^{\infty} a_k + o(1)$ puisque la série $(\sum a_n)_{n\geqslant 2}$ converge.

Ainsi $\underline{\exists A \in \mathbb{R},\ H_n \underset{+\infty}{=} \ln(n) + A + o(1)}$.

⋄ On en déduit directement $\underline{H_n \underset{n\to\infty}{\sim} \ln(n)}$.

I.B - Si $r \leqslant 1$, on a $(n+1)^r \dfrac{H_n}{(n+1)^r} = H_n \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$ donc, par comparaison à la série de Riemann divergente $\left(\sum \dfrac{1}{(n+1)^r}\right)$, $\left(\sum \dfrac{H_n}{(n+1)^r}\right)$ diverge.

Si $r > 1$, prenons s tel que $r > s > 1$, on a $\dfrac{H_n}{(n+1)^r} = \dfrac{H_n}{(n+1)^{r-s}} \dfrac{1}{(n+1)^s} = o\left(\dfrac{1}{(n+1)^s}\right)$ car $\dfrac{H_n}{(n+1)^{r-s}} \underset{n\to\infty}{\sim} \dfrac{\ln(n)}{(n+1)^{r-s}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ puisque $r - s > 0$. Par comparaison à la série de Riemann convergente $\left(\sum \dfrac{1}{(n+1)^s}\right)$, $\left(\sum \dfrac{H_n}{(n+1)^r}\right)$ converge.

On conclut que : $\underline{\left(\sum \dfrac{H_n}{(n+1)^r}\right)_{n\geqslant 1} \text{ converge si et seulement si } r > 1}$.

I.C -

I.C.1) ⋄ $\underline{\forall t \in]-1,1[,\ \ln(1-t) = -\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^n}{n} \quad \text{(rayon de convergence } R = 1)}$.

⋄ $\underline{\forall t \in]-1,1[,\ \dfrac{1}{1-t} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} t^n \quad \text{(rayon de convergence } R = 1)}$.

I.C.2) Le produit de Cauchy des deux séries ci-dessus a donc un rayon de convergence supérieur ou égal à 1 et on a

$$\forall t \in]-1,1[,\ \frac{\ln(1-t)}{1-t} = -\left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^n}{n}\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} t^n\right) = -\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right) t^n .$$

Donc $\underline{t \mapsto \dfrac{\ln(1-t)}{1-t} \text{ est développable en série entière sur }]-1,1[\text{ et } \forall t \in]-1,1[,\ \dfrac{\ln(1-t)}{1-t} = -\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} H_n t^n}$.

I.D -

I.D.1) Pour $(p,q)\in\mathbb{N}^2$, $t\mapsto t^p(\ln t)^q$ est continue sur $]0,1]$ et $\sqrt{t}\,t^p(\ln t)^q = t^{p+1/2}(\ln t)^q \xrightarrow[t\to 0^+]{} 0$ car $p+\frac{1}{2}>0$, soit $t^p(\ln t)^q \underset{0^+}{=} o\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)$ donc $t\mapsto t^p(\ln t)^q$ est intégrable sur $]0,1]$ et donc $\underline{I_{p,q} \text{ existe pour tout } (p,q)\in\mathbb{N}^2}$.

I.D.2) $t\mapsto \dfrac{t^{p+1}}{p+1}$ et $t\mapsto(\ln t)^q$ sont de classe C^1 sur le segment $[\varepsilon,1]$ donc par intégration par parties,

$$I_{p,q}^{\varepsilon} = \left[\frac{t^{p+1}}{p+1}(\ln t)^q\right]_{\varepsilon}^{1} - \int_{\varepsilon}^{1}\frac{t^{p+1}}{p+1}\,q\frac{(\ln t)^{q-1}}{t}\,\mathrm{d}t$$

soit $\underline{\forall p\in\mathbb{N},\ \forall q\in\mathbb{N}^*,\ \forall\varepsilon\in]0,1[,\quad I_{p,q}^{\varepsilon} = -\dfrac{q}{p+1}I_{p,q-1}^{\varepsilon} - \dfrac{\varepsilon^{p+1}}{p+1}(\ln\varepsilon)^q}$.

I.D.3) Puisque $p\geqslant 0$ et $q\geqslant 1$, selon [**1**], $I_{p,q-1}^{\varepsilon}\xrightarrow[\varepsilon\to 0^+]{} I_{p,q-1}$ et $I_{p,q}^{\varepsilon}\xrightarrow[\varepsilon\to 0^+]{} I_{p,q}$. De plus, $\varepsilon^{p+1}(\ln\varepsilon)^q \xrightarrow[\varepsilon\to 0^+]{} 0$ donc, à la limite quand $\varepsilon\to 0^+$, la formule du [**2**] donne $\underline{I_{p,q} = -\dfrac{q}{p+1}I_{p,q-1}}$.

I.D.4) On a donc $I_{p,q} = \left(-\dfrac{q}{p+1}\right)\left(-\dfrac{q-1}{p+1}\right)\cdots\left(-\dfrac{1}{p+1}\right)I_{0,q} = (-1)^q\dfrac{q!}{(p+1)^{q+1}}I_{0,q}$ avec $I_{0,q} = \displaystyle\int_0^1 t^p\,\mathrm{d}t = \dfrac{1}{p+1}$ donc $\underline{I_{p,q} = (-1)^q\dfrac{q!}{(p+1)^{q+1}}}$.

I.E - On a $\forall t\in]0,1[,\ (\ln t)^{r-1}f(t) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n t^n(\ln t)^{r-1}$. Posons, pout $t\in]0,1[,\ u_n(t) = a_n t^n(\ln t)^{r-1}$. On a :

- $\forall n\in\mathbb{N},\ u_n$ est continue sur $]0,1[$ et, d'après [**2**], u_n est intégrable sur $]0,1]$, donc sur $]0,1[$, car $r\in\mathbb{N}^*$;
- selon ci-dessus, $\sum u_n$ converge simplement sur $]0,1[$ vers $t\mapsto(\ln t)^{r-1}f(t)$ qui est continue sur $]0,1[$;
- $\forall n\in\mathbb{N},\ \displaystyle\int_0^1 |u_n(t)|\,\mathrm{d}t = |a_n|\int_0^1 t^n|(\ln t)^{r-1}|\,\mathrm{d}t = (-1)^{r-1}|a_n|I_{n,r-1} = (r-1)!\frac{|a_n|}{(n+1)^r}$ et, par hypothèse, $\left(\sum\dfrac{|a_n|}{(n+1)^r}\right)$ converge donc $\left(\sum\displaystyle\int_0^1|u_n(t)|\,\mathrm{d}t\right)$ converge .

Le théorème d'intégration terme à terme s'applique et, sachant

$$\int_0^1 u_n(t)\,\mathrm{d}t = a_n\,I_{n,r-1} = (-1)^{r-1}(r-1)!\frac{a_n}{(n+1)^r},$$

on obtient : $\underline{\displaystyle\int_0^1(\ln t)^{r-1}f(t)\,\mathrm{d}t = (-1)^{r-1}(r-1)!\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{a_n}{(n+1)^r}}$.

I.F -

I.F.1) Pour $r\geqslant 2$, on applique [**E**] à $f:\ t\mapsto\dfrac{\ln(1-t)}{1-t}$ qu'on sait depuis [**C.3**] être développable en série entière sur $]-1,1[$ avec comme coefficient de t^n dans ce développement, $a_n = -H_n$. C'est légitime puisque $\left(\sum\dfrac{|a_n|}{(n+1)^r}\right) = \left(\sum\dfrac{H_n}{(n+1)^r}\right)$ est alors convergente d'après [**B**].

On obtient donc $\displaystyle\int_0^1(\ln t)^{r-1}\frac{\ln(1-t)}{1-t}\,\mathrm{d}t = (-1)^{r-1}(r-1)!\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{-H_n}{(n+1)^r}$ soit

$$\underline{\forall r\in\mathbb{N}^*\setminus\{1\},\ S_r = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{H_n}{(n+1)^r} = \frac{(-1)^r}{(r-1)!}\int_0^1(\ln t)^{r-1}\frac{\ln(1-t)}{1-t}\,\mathrm{d}t}.$$

I.F.2) Pour $[c,d]\subset]0,1[$, on a, par intégration par parties,

$$\begin{aligned}\int_c^d \frac{\ln(1-t)}{1-t}(\ln t)^{r-1}\,\mathrm{d}t &= \left[-\frac{\big(\ln(1-t)\big)^2}{2}(\ln t)^{r-1}\right]_c^d + \frac{r-1}{2}\int_c^d \frac{\big(\ln(1-t)\big)^2(\ln t)^{r-2}}{t}\,\mathrm{d}t\\ &= \frac{\big(\ln(1-c)\big)^2(\ln c)^{r-1}}{2} - \frac{\big(\ln(1-d)\big)^2(\ln d)^{r-1}}{2} + \frac{r-1}{2}\int_c^d \frac{\big(\ln(1-t)\big)^2(\ln t)^{r-2}}{t}\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

Or $\big(\ln(1-c)\big)^2(\ln c)^{r-1} \underset{c\to 0+}{\sim} c^2(\ln c)^{r-1} \xrightarrow[c\to 0+]{} 0$, $\big(\ln(1-d)\big)^2(\ln d)^{r-1} \underset{d\to 1^-}{\sim} \big(\ln(1-d)\big)^2(d-1)^{r-1} \xrightarrow[d\to 1^-]{} 0$ car $r-1>0$. Enfin $\omega:\ t\mapsto \dfrac{\big(\ln(1-t)\big)^2(\ln t)^{r-2}}{t}$ est continue sur $]0,1[$, $\omega(t) \underset{t\to 0^+}{\sim} t\,(\ln t)^{r-2} \xrightarrow[t\to 0^+]{} 0$ donc φ est prolongeable par continuité en 0 , $\sqrt{1-t}\,\omega(t) \underset{t\to 1^-}{\sim} (-1)^{r-2}\big(\ln(1-t)\big)^2(1-t)^{r-3/2} \xrightarrow[t\to 1^-]{} 0$ (car $r>3/2$) donc $\omega(t) \underset{t\to 1^-}{=} o\left(\dfrac{1}{\sqrt{1-t}}\right)$ et donc ω est intégrable sur $]0,1[$. Tout ceci justifie un passage à la limite pour $(c,d)\to(0,1)$ et donne, avec le résultat du [**1**], la formule

$$\underline{\forall r\in\mathbb{N}^*\setminus\{1\},\ S_r = \frac{(-1)^r}{2(r-2)!}\int_0^1 \frac{\big(\ln(1-t)\big)^2(\ln t)^{r-2}}{t}\,\mathrm{d}t}\ .$$

I.F.3) ◇ En particulier, $S_2 = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^1 \frac{\big(\ln(1-t)\big)^2}{t}\,\mathrm{d}t$. Effectuons dans cette intégrale le changement de variable C^1 et strictement décroissant $u=1-t$, on obtient $\underline{S_2 = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^1 \frac{(\ln u)^2}{1-u}\,\mathrm{d}u}$.

◇ Appliquons le résultat du [**E**] à $r=3$ et $f:\ t\mapsto \dfrac{1}{1-t}$ qui est bien développable en série entière sur $]-1,1[$ avec comme coefficient de t^n dans son développement, $a_n=1$ donc $\left(\sum \dfrac{|a_n|}{(n+1)^3}\right) = \left(\sum \dfrac{1}{(n+1)^3}\right)$, série de Riemann convergente. On a donc $\displaystyle\int_0^1 \frac{(\ln u)^2}{1-u}\,\mathrm{d}u = 2\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(n+1)^3} = 2\zeta(3)$ et donc $\underline{S_2=\zeta(3)}$.

Partie II

II.A -

II.A.1) $\gamma:\ t\mapsto t^{x-1}e^{-t}$ est continue sur $]0,+\infty[$, $\gamma(t) \underset{t\to 0^+}{\sim} t^{x-1} = \frac{1}{t^{1-x}}$ avec $1-x<1$ et $t^2\,t^{x-1}e^{-t} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$ donc $\gamma(t) \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ donc $\underline{t\mapsto t^{x-1}e^{-t} \text{ est intégrable sur }]0,+\infty[}$.

II.A.2) Par le changement de variable C^1 et strictement croissant $u=\frac{t}{\alpha}$ dans l'intégrale définissant Γ, on a

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} (\alpha u)^{x-1}e^{-\alpha u}\alpha\,\mathrm{d}u = \alpha^x\int_0^{+\infty} u^{x-1}e^{-\alpha u}\,\mathrm{d}u$$

donc $\underline{\displaystyle\int_0^{+\infty} u^{x-1}e^{-\alpha u}\,\mathrm{d}u \text{ existe et } \int_0^{+\infty} u^{x-1}e^{-\alpha u}\,\mathrm{d}u = \frac{\Gamma(x)}{\alpha^x}}$.

II.B.1) Pour $x > 0$ et $y > 0$, $\phi : \ t \mapsto t^{x-1}(1-t)^{y-1}$ est continue sur $]0,1[$, $\phi(t) \underset{t\to 0^+}{\sim} t^{x-1} = \frac{1}{t^{1-x}}$ avec $1-x<1$ et $\phi(t) \underset{t\to 1^-}{\sim} (1-t)^{y-1} = \frac{1}{(1-t)^{1-y}}$ avec $1-y<1$ donc ψ est intégrable sur $]0,1[$ et donc $\underline{\forall (x,y) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2,\ \beta(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,\mathrm{d}t \text{ existe}}$.

II.B.2) Le changement de variable C^1 et strictement décroissant $u = 1-t$ donne $\beta(x,y) = \int_1^0 (1-u)^{x-1}u^{y-1}\,(-\mathrm{d}u)$ soit $\underline{\forall (x,y) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2,\ \beta(x,y) = \beta(y,x)}$.

II.B.3) Par intégration par parties avec $u(t) = t^x$ et $v'(t) = (1-t)^{y-1}$, on a, puisque tous les termes existent,

$$\begin{aligned}
\beta(x+1,y) &= \int_0^1 t^x(1-t)^{y-1}\,\mathrm{d}t = \left[-\frac{t^x(1-t)^y}{y}\right]_0^1 + \frac{x}{y}\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^y\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{x}{y}\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,(1-t)\,\mathrm{d}t = \frac{x}{y}\int_0^1 \left(t^{x-1}(1-t)^{y-1} - t^x(1-t)^{y-1}\right)\mathrm{d}t \\
&= \frac{x}{y}\left[\beta(x,y) - \beta(x+1,y)\right]
\end{aligned}$$

donc $\frac{x+y}{y}\beta(x+1,y) = \frac{x}{y}\beta(x,y)$ et donc $\underline{\forall (x,y) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2,\ \beta(x+1,y) = \frac{x}{x+y}\beta(x,y)}$.

II.B.4) Selon [**3**&**2**], $\beta(x+1,y+1) = \frac{x}{x+y+1}\beta(x,y+1) = \frac{x}{x+y+1}\beta(y+1,x) = \frac{x}{x+y+1}\,\frac{y}{x+y}\beta(y,x) = \frac{x}{x+y+1}\,\frac{y}{x+y}\beta(x,y)$ donc $\underline{\forall (x,y) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2,\ \beta(x+1,y+1) = \frac{xy}{(x+y)(x+y+1)}\beta(x,y)}$.