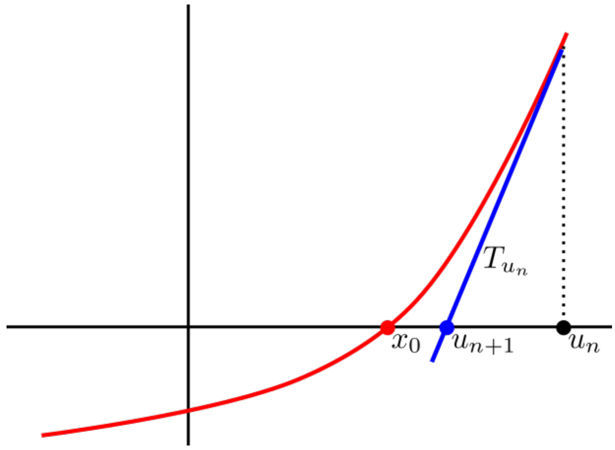
TP n°9 - Suite - Algorithmes numériques

1. Méthode de Newton

Dans cette partie, nous allons étudier un technique différente de la dichotomie pour approximer les solutions d'une équation du type $f(x) = 0$:



Exercice 1. *Méthode de Newton*

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 et strictement croissante sur $[a, b]$. On suppose qu'il existe $x_0 \in]a, b[$ tel que $f(x_0) = 0$. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la relation de récurrence suivante :

$$\begin{cases} u_0 \in [a, b] \\ u_{n+1} \text{ est l'abscisse du point d'intersection entre l'axe des abscisses et la tangente à } \mathcal{C}_f \text{ en } u_n. \end{cases}$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = u_n - \frac{f(u_n)}{f'(u_n)}.$$

   On admettra que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers x_0.

2. Écrire une fonction `newton(f,a,b,e)` qui prend pour arguments :
   — une fonction `f`,
   — les bornes `a` et `b` de l'intervalle de recherche d'une solution de $f(x) = 0$
   et qui **renvoie** une approximation d'une solution de $f(x) = 0$. On prendra `while abs(f(x)) >e:` pour critère d'arrêt de la boucle c'est-à-dire qu'on considérera que notre approximation x de la solution est bonne lorsque $|f(x)| \leq \varepsilon$.

Bien-sûr, un problème surviendra lorsqu'on voudra coder cette méthode : comment obtenir la dérivée de la fonction f. Pour ne pas surcharger le code, nous allons utiliser le module `misc` de `scipy` qui possède une fonction `derivative` permettant de calculer le nombre dérivé d'une fonction en un point :

```python
from scipy import misc #on importe le module misc de scipy

def cube(x): #on va faire nos tests sur la fonction cube
    return x*x*x

misc.derivative(cube,3) #renvoie le nombre dérivée de la fonction cube en 3
```

2. Calculs approchés d'intégrales

On considère une fonction continue $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. On aimerait estimer l'intégrale $I = \displaystyle\int_a^b f(x)dx$. On possède de nombreuses méthodes théoriques pour calculer cette quantité : calculs de primitive, intégration par parties, changement de variables, etc... Mais il arrive que ces outils s'avèrent impuissants lorsque la fonction f est trop complexe.

Ainsi, nous allons nous servir de l'outil informatique pour déterminer une valeur approchée de l'intégrale I. Pour cela, on va utiliser plusieurs méthodes, la méthode du rectangle et la méthode du trapèze.

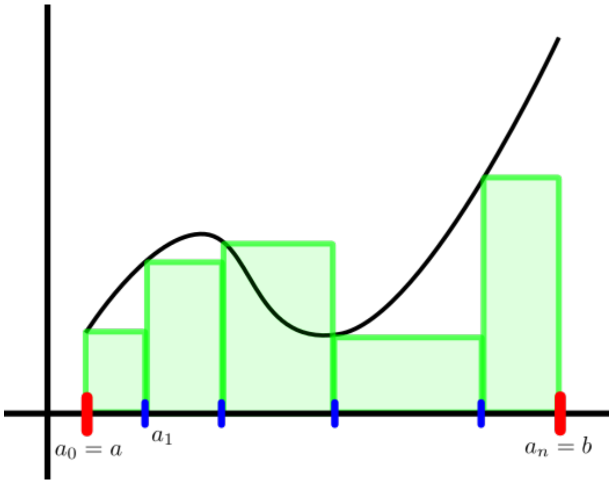
Dans la suite, nous utiliseront une subdivision régulière $(a_k)_{k\in[\![0,n]\!]}$ du segment $[a,b]$ en $n+1$ points i.e. pour $k \in [\![0,n]\!]$,

$$a_k = a + k\frac{b-a}{n}.$$

et on notera $I_k = \int_{a_k}^{a_{k+1}} f(x)dx$ pour $k \in [\![0,n-1]\!]$.

On supposera dans la suite que f est de classe C^1.

a. Méthode du rectangle



Comme sur la figure précédente, on va approximer chaque I_k par le rectangle de hauteur $f(a_k)$ et de largeur $a_{k+1} - a_k$. Ainsi, on aura :

$$I_k = \underbrace{f(a_k)(a_{k+1} - a_k)}_{=:R_k} + e_k$$

où e_k désigne l'erreur commise lors de cette approximation.

Exercice 2.

Soit $f : [c, d] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. On note $e = \displaystyle\int_c^d f(x)dx - f(c)(d - c)$.

1. Montrer que $|e| \leq \displaystyle\int_c^d |f(x) - f(c)|dx$.
2. Montrer qu'il existe $K > 0$ tel que $|e| \leq K\dfrac{(d-c)^2}{2}$.
3. En déduire que
$$|e_k| \leq K\frac{(b-a)^2}{2n^2}.$$

En utilisant la relation de Chasles, on approxime alors l'intégrale I par la somme des I_k :

$$I = \int_a^b f(x)dx = \sum_{k=0}^{n-1} I_k = \sum_{k=0}^{n-1} R_k + E$$

où E est l'erreur commise lors de cette approximation.

Exercice 3.

En utilisant l'exercice précédent, montrer qu'il existe $K > 0$ tel que $|E| \leq K\dfrac{(b-a)^2}{2n}$.

Exercice 4.

Écrire une fonction `int_rect(f,a,b,e)` qui prend pour arguments :

— une fonction `f` ;

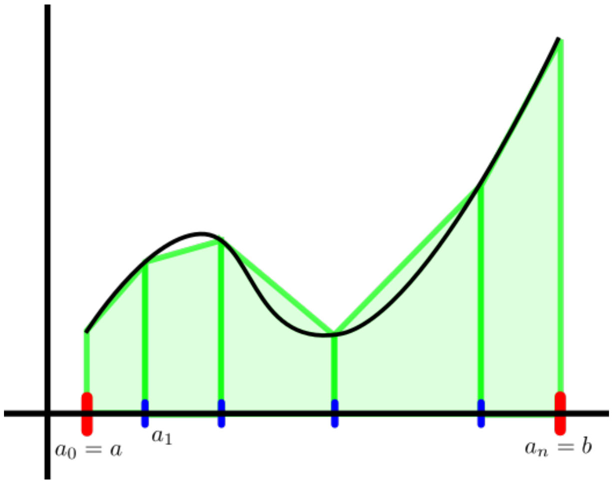
— les bornes `a` et `b` de l'intervalle d'intégration ;

— un nombre positif `e`

et qui renvoie une approximation de l'intégrale $I = \int_a^b f(t)dt$ par la méthode des rectangles telle que l'erreur commise E soit inférieure, en valeur absolue à `e`.

b. Méthode du trapèze

On suppose ici que f est de classe C^2 sur $[a, b]$.



Comme sur la figure précédente, on va approximer chaque I_k par le trapèze de largeur $a_{k+1} - a_k$ et de côtés de hauteur $f(a_k)$ et $f(a_{k+1})$ respectivement.

Exercice 5.

Déterminer l'aire T_k de ce trapèze

Ainsi, on aura :

$$I_k = T_k + e_k$$

où e_k désigne l'erreur commise lors de cette approximation.

On admet que pour $K = \sup_{x \in [a_k, a_{k+1}]} |f''(x)|$, on a :

$$|e_k| \leq K \frac{(b-a)^3}{12}.$$

En utilisant la relation de Chasles, on approxime alors l'intégrale I par la somme des I_k :

$$I = \int_a^b f(x)dx = \sum_{k=0}^{n-1} T_k + E$$

où E est l'erreur commise lors de cette approximation.

Exercice 6.

Montrer qu'il existe $K > 0$ tel que $|E| \leq K\dfrac{(b-a)^2}{2n}$.

Exercice 7.

Écrire une fonction `int_trap(f,a,b,e)` qui prend pour arguments :

— une fonction `f` ;

— les bornes `a` et `b` de l'intervalle d'intégration ;

— un nombre positif `e`

et qui renvoie une approximation de l'intégrale $I = \int_a^b f(t)dt$ par la méthode des trapèzes telle que l'erreur commise E soit inférieure, en valeur absolue à `e`.