TP n°10 - Résolution numérique des équations différentielles

1. Introduction

Dans ce T.P., nous allons étudier des équations différentielles que l'on peut ramener sous la forme :

$$y' = f(y, t)$$

où $f : \Omega \to \mathbb{R}$ est une fonction et Ω est une partie de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. À une telle équation différentielle on peut ajouter une **condition initiale**, c'est-à-dire un couple $(y_0, t_0) \in \Omega$ fixé pour former le système suivant qu'on appelle **problème de Cauchy** associé à l'équation et à la condition initiale :

$$\begin{cases} y' = f(y, t) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

Sous certaines conditions de régularité sur la fonction f (de classe C^1 par exemple), le théorème de Cauchy-Lipschitz assure l'existence d'une unique fonction $y : t \mapsto y(t)$ qui satisfait le problème de Cauchy précédent.

Exemple 1.

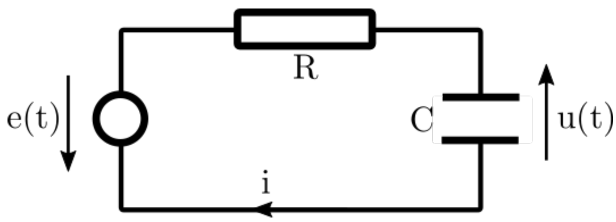
Le problème de Cauchy

$$\begin{cases} y' = y \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

admet pour unique solution la fonction $y : t \mapsto e^t$.

Exercice 1.

On considère un circuit RC :



On note C la capacité du condensateur, R la valeur de la résistance et $\tau = RC$. Alors la tension u aux bornes du condensateur vérifie le problème de Cauchy suivant

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} = \dfrac{1}{\tau}(e(t) - u) \\ u(0) = \dfrac{q_0}{C} \end{cases}$$

où e est le signal d'entrée fournit par le générateur et q_0 la charge initiale du condensateur.

1. Quelle est le fonction f associée à l'équation différentielle ?
2. Résoudre le problème de Cauchy pour :
   a. le signal nul $e(t) = 0$;
   b. le signal constant $e(t) = E$;
3. Tracer les solutions de 2.a. et 2.b. sur l'intervalle de temps $[0, 10^{-1}]$ grâce à la fonction `plot` de `matplotlib.pyplot`.
   On prendra les valeurs $R = 1500\Omega$, $C = 4.7.10^{-6}F$, $q_0 = 50.10^{-6}C$ et $E = 5V$ pour 2.b.
   On utilisera une subdivision de 200 points de l'intervalle $[0, 10^{-1}]$ (on indiquera les limites de l'axe des ordonnées de $-0,1$ à 11 avec `ylim(-0.1,11)`).

Lorsque f est une fonction "simple", on possède des outils théoriques pour connaître exactement la solution du problème de Cauchy. Malheureusement, la fonction f n'est pas toujours "gentille" et la théorie s'avère impuissante pour nous fournir une solution. Pour pallier ce souci, nous allons résoudre **numériquement** le problème de Cauchy : grâce à des méthodes d'approximation programmées en Python, nous allons chercher des fonctions de plus en plus proches de la solution du problème.

Reprenons l'exemple du circuit RC de l'exercice précédent. Lorsque l'on prend des signaux d'entrée e plus compliqués, la solution exacte pour u devient plus compliquée à trouver (par ex. un signal e sinusoïdal) voire même presque impossible à décrire (par ex. un signal e formé d'impulsions périodique) !

Exemple 2.

La solution du problème de Cauchy

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} = \dfrac{1}{\tau}(e(t) - u) \\ u(0) = \dfrac{q_0}{C} \end{cases}$$

où e est le signal sinusoïdal $e(t) = E\cos(\omega t)$ est :

$$u(t) = \left(\frac{q_0}{C} - \frac{E}{1 + (\omega\tau)^2}\right)e^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{E}{1 + (\omega\tau)^2}(\cos(\omega t) + \omega\tau\sin(\omega t)).$$

2. Une méthode de résolution numérique : la méthode d'Euler

On rappelle que pour tracer une fonction en Python sur un intervalle, il nous faut une subdivision assez fine de cet intervalle (créée grâce à la fonction `linspace` de `numpy`) puis calculer les images de chacun des points de la subdivision afin de tracer le tout avec la fonction `plot` de `matplotlib.pyplot`.

Ainsi le but de notre résolution numérique est d'approximer la solution exacte d'un problème de Cauchy

$$\begin{cases} y' = f(y, t) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

sur une subdivision de l'intervalle de temps $[t_0, t_0 + T]$ où T est la durée sur laquelle on veut connaître nos solutions approchées.

On se donne une subdivision $t_0 < t_1 < ... < t_n = t_0 = T$ de notre intervalle (on prendra le plus souvent une subdivision régulière grâce à `linspace`). Si y est une solution de l'équation différentielle, alors on a, pour $k \in [\![0, n-1]\!]$:

$$\begin{aligned} y(t_{k+1}) - y(t_k) &= \int_{t_k}^{t_{k+1}} y'(t)dt \\ &= \int_{t_k}^{t_{k+1}} f(y(t),t)dt \end{aligned}$$

Si on connaît la valeur de chacune des intégrales $\displaystyle\int_{t_k}^{t_{k+1}} f(y(t),t)dt$, alors on connaît chacun des $y(t_k)$!

En effet, grâce à la condition initiale $y(t_0) = y_0$, on peut déterminer $y(t_1) = y_0 + \displaystyle\int_{t_k}^{t_{k+1}} f(y(t),t)dt$; puis $y(t_2)$, etc... et donc tous les t_k par récurrence !

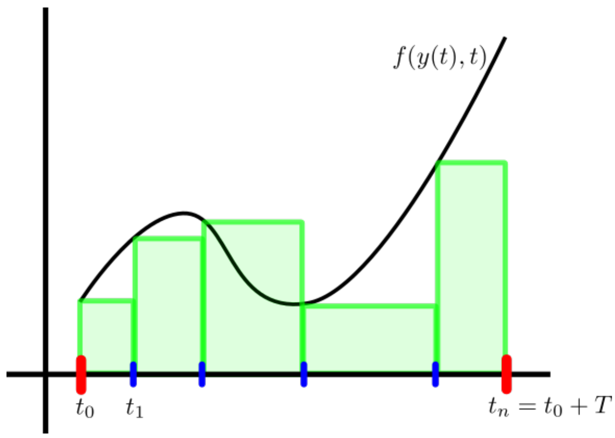
Le problème : calculer $\displaystyle\int_{t_k}^{t_{k+1}} f(y(t),t)dt$, c'est dur ! Trop dur en général !

La méthode d'Euler consiste alors à approximer les intégrales $\displaystyle\int_{t_k}^{t_{k+1}} f(y(t),t)dt$ de façon à obtenir chacun des valeurs approchées des $y(t_k)$.

Voici les deux principales méthodes d'Euler d'approximation de ces intégrales :

a. La méthode d'Euler explicite

La méthode d'Euler explicite consiste à approcher les intégrales $\int_{t_k}^{t_{k+1}} f(y(t),t)dt$ par des rectangles "gauches" :



i.e.

$$\int_{t_k}^{t_{k+1}} f(y(t),t)dt \simeq (t_{k+1} - t_k) f(y(t_k), t_k).$$

On pose $\delta_k = t_{k+1} - t_k$. On obtient donc une suites $(y_k)_{k \in [\![0,n]\!]}$ qui approxime les valeurs $y(t_k)$ grâce à la condition initiale y_0 et la relation de récurrence, pour $k \in [\![0, n-1]\!]$:

$$y_{k+1} = y_k + \delta_k f(y_k, t_k).$$

Exemple 3.

On reprend le problème de Cauchy :

$$\begin{cases} y' = y \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

On cherche à appliquer la méthode d'Euler explicite pour déterminer des solutions approchées de la solution exacte (que l'on connaît déjà ici, mais c'est quand même plus pratique pour comparer !) sur l'intervalle $[0, 2]$.

Si on se donne une subdivision régulière $(t_k)_{k\in[\![0,n]\!]}$ de n points de $[0, 2]$, on obtient donc la suite des valeurs approchées :

$$y_{k+1} = (1 + \frac{2}{n})y_k.$$

Exercice 2.

On considère de nouveau le problème de Cauchy :

$$\begin{cases} y' = y \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

1. Écrire une fonction `Y_expo(n)` qui renvoie la liste des valeurs approchées $y_0, ..., y_{n-1}$ pour la subdivision régulière de `n` points de l'intervalle $[0, 2]$.
2. Écrire une fonction `euler_exp_expo(n)` qui permette de tracer, sur $[0, 2]$, la fonction exponentielle (avec une subdivision de 200 points) et la solution approchée du problème de Cauchy associé par la méthode d'Euler explicite pour une subdivision régulière de `n` points de l'intervalle $[0, 2]$.
3. Comparer les solutions approchées pour $n = 5$, $n = 10$, $n = 30$.

Exercice 3.

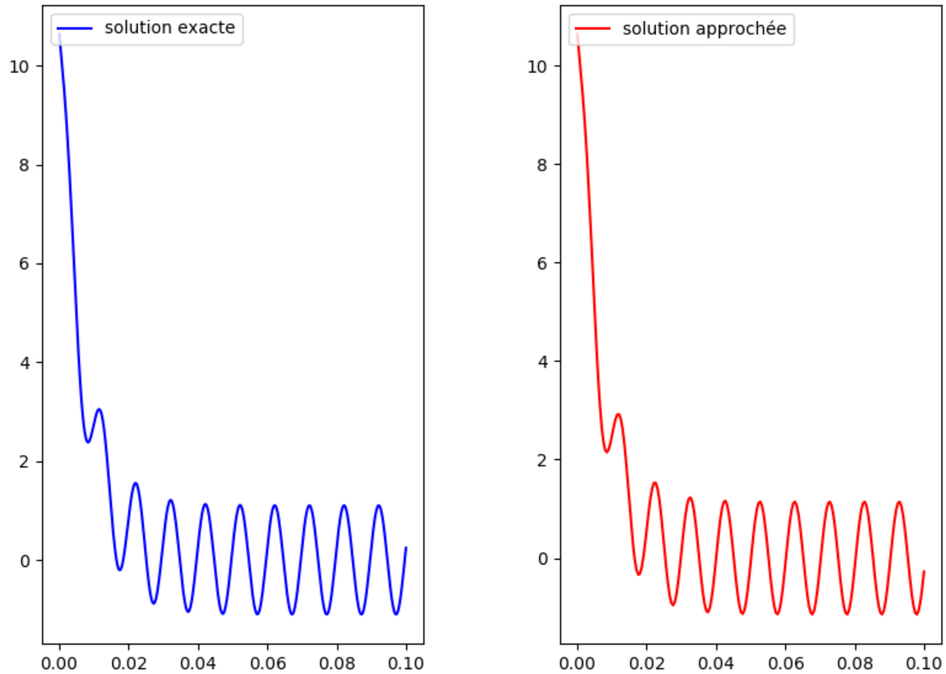
On considère de nouveau le problème de Cauchy associé au circuit RC :

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} = \dfrac{1}{\tau}(e(t) - u) \\ u(0) = \dfrac{q_0}{C} \end{cases}$$

On considère ici un signal d'entrée sinusoïdal $e(t) = E\cos(\omega t)$. En appliquant la méthode d'Euler explicite, tracer et comparer les solutions exactes et approchées sur $[0, 10^{-1}]$ pour $n = 5, 20, 200$.

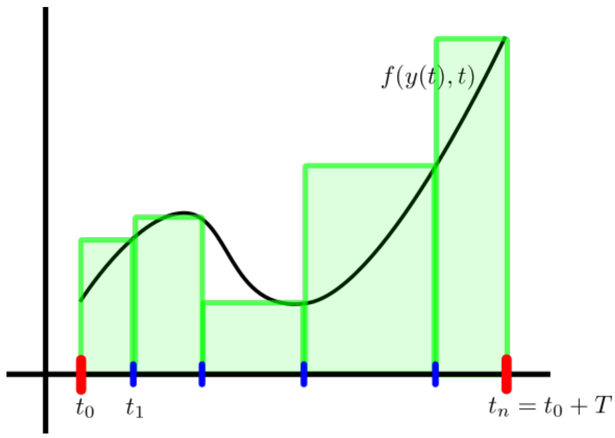
On prendra les valeurs $R = 1500\Omega$, $C = 4.7.10^{-6}F$, $q_0 = 50.10^{-6}C$, $E = 5V$ et $\omega = 2\pi.10^2\text{rad}.s^{-1}$.

Pour $n = 200$, on doit obtenir :



b. La méthode d'Euler implicite

La méthode d'Euler implicite consiste à approcher les intégrales $\int_{t_k}^{t_{k+1}} f(y(t),t)dt$ par des rectangles non plus "gauches" mais... "droits" ! :



i.e.

$$\int_{t_k}^{t_{k+1}} f(y(t),t)dt \simeq (t_{k+1} - t_k) f(y(t_{k+1}), t_{k+1}).$$

Nous pouvons voir ici que nous n'avons plus une expression explicite de x_{k+1} en fonction de x_k ! Il nous faudra d'autres méthodes de résolution numérique pour pouvoir utiliser cette relation ce qui rend la méthode implicite plus coûteuse en ressource que la méthode d'Euler explicite. Malgré cela, la méthode implicite donne de meilleurs résultats comme nous le verrons plus tard.