Chapitre I

Fonctions convexes

Table des matières

Partie A

Parties convexes d'un espace vectoriel

Dans cette partie, E désigne un espace vectoriel réel. On le muni de sa structure d'espace affine canonique et on note O son origine. Pour un vecteur u de E, on identifie (abusivement) le point $O+u$ et le vecteur u. De plus, compte tenu de cette identification, si u et v sont des points de E, on note $\overrightarrow{uv} = v - u$.

1. Barycentres

Définition 1. *Barycentres*

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $x_1, ..., x_n$ des points de E.
On dit que l'élément g de E est un **barycentre** de $x_1, ..., x_n$ s'il existe des réels $\lambda_1, ..., \lambda_n$ vérifiant $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \neq 0$ et tels que :

$$g = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i.$$

Dans ce cas, on dit que g est le **barycentre de la famille de points pondérés** $((x_i, \lambda_i))_{1 \leq i \leq n}$.

Remarque 1.

Si tous les réels de la famille $(\lambda_i)_{1 \leq i \leq n}$ sont égaux à un certain réel non nul λ, le barycentre est appelé **isobarycentre** et est égal à $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i$. On remarque que l'isobarycentre ne dépend pas de la valeur commune λ des coefficients.

Exemple 1.

1. L'isobarycentre de deux points u et v est le point $\frac{1}{2}(u+v)$. Le barycentre de $((u,2),(v,-1))$ est le point $2u - v$.
2. Soit X une variable aléatoire prenant un nombre fini de valeurs réelles $x_1, ..., x_n$ de probabilités respectives $p_1, ..., p_n$. Le barycentre de la famille $((x_i, p_i))_{1 \leq i \leq n}$ n'est autre que l'espérance de X.

Proposition 1.

Soit $x_1, ..., x_n$ des points de E, $\lambda_1, ..., \lambda_n$ des réels tels que $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \neq 0$ et μ un réel non nul.
Le barycentre de la famille de points pondérés $((x_i, \mu\lambda_i))_{1 \leq i \leq n}$ est bien défini et est égal au barycentre de la famille de points pondérés $((x_i, \lambda_i))_{1 \leq i \leq n}$.

Remarque 2.

En vertu de la proposition précédente, quitte à diviser par la somme des pondérations, tout barycentre peut être considéré comme celui d'une famille dont la somme des pondérations vaut 1.

Définition 2. *Barycentre à coefficients positifs*

Soit $x_1, ..., x_n$ des points de E et $\lambda_1, ..., \lambda_n$ des réels tels que $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \neq 0$. On dit que le barycentre de la famille de points pondérés $((x_i, \lambda_i))_{1 \leq i \leq n}$ est **à coefficients positifs** si, pour tout $i \in \{1, ..., n\}$, $\lambda_i \geq 0$.

2. Parties convexes

Définition 3. *Segment*

Soit u, v des points de E. Le **segment** entre u et v, noté $[u, v]$ est l'ensemble défini par :

$$[u, v] := \{tu + (1 - t)v \mid t \in [0, 1]\}$$

Définition 4. *Partie convexe*

Soit A une partie de E.
On dit que A est **convexe** si, pour tous $u, v \in A$, le segment $[u, v]$ est inclus dans A ; i.e.

$$\forall u, v \in A, \ \forall t \in [0, 1], \quad tu + (1 - t)v \in A.$$

Exemple 2.

Les segments, les sous-espaces vectoriels et les sous-espaces affines sont des parties convexes.

Théorème 1. *Caractérisation des convexes par les barycentres*

Soit A une partie de E.
A est convexe si, et seulement si, le barycentre à coefficients positifs de toute famille de points pondérés de A appartient à A.

Partie B

Fonctions convexes d'une variable réelle

Dans cette partie, I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$ d'intérieur non vide.

1. Fonctions convexes

Définition 5. *Fonction convexe / concave*

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction. On dit que f est **convexe** si, pour tous $x, y \in I$ et pour tout $t \in [0,1]$:

$$f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y).$$

On dit que f est **concave** si $-f$ est convexe.

Exemple 3.

— Toute fonction affine est convexe sur $\mathbb{R}$.
— La fonction valeur absolue est convexe sur $\mathbb{R}$.

2. Convexité et épigraphe

Définition 6. *Épigraphe*

On appelle **épigraphe** de f le sous-ensemble de $I \times \mathbb{R}$, noté $\mathcal{E}_f$, définit par :

$$\mathcal{E}_f = \{(x,y) \in I \times \mathbb{R} \mid f(x) \leq y\}.$$

Théorème 2. *Caractérisation géométrique de la convexité*

Soit $f : I \to \mathbb{R}$. La fonction f est convexe sur I si, et seulement si, son épigraphe $\mathcal{E}_f$ est une partie convexe de $\mathbb{R}^2$.

Théorème 3. *Inégalité de Jensen*

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction. Si f est convexe sur I, alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, tous points $x_1, ..., x_n$ de I et tous réels positifs $\lambda_1, ..., \lambda_n$ tels que $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$, on a :

$$f(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i) \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i).$$

3. Inégalité des pentes

Théorème 4. *Inégalité des pentes*

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction. f est convexe sur I si, et seulement si, pour tous $x, y, z \in I$ avec $x < y < z$, on a :

$$\frac{f(y)-f(x)}{y-x} \leq \frac{f(z)-f(x)}{z-x} \leq \frac{f(z)-f(y)}{z-y}.$$

Proposition 2.

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction. f est convexe sur I si, et seulement si, pour tout $x_0 \in I$, l'application :

$$\tau_{x_0} : \left| \begin{array}{lcl} I \setminus \{x_0\} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \end{array} \right. .$$

est croissante.

Partie C

Convexité et dérivabilité

1. Fonctions convexes dérivables

Théorème 5.

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction *dérivable* sur I. f est convexe sur I si, et seulement si, f' est croissante sur I.

Proposition 3.

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur I. Si f est convexe sur I, alors son graphe est au dessus de chacune de ses tangentes i.e. pour tout $x_0 \in I$, on a :

$$\forall x \in I, \quad f(x) \geq f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0).$$

2. Fonctions convexes deux fois dérivables

Théorème 6. *Caractérisation de la convexité par la dérivée seconde*

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction deux fois dérivable sur I. f est convexe si, et seulement si, f'' est positive i.e.

$$\forall x \in I, \quad f''(x) \geq 0.$$

3. Exemples d'inégalités classiques

Exemple 4.

1. $\forall x \in \mathbb{R}$, $e^x \geq 1 + x$.
2. $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\ln(x) \leq x - 1$

3. $\forall x \in [0, \pi/2]$, $\frac{2}{\pi}x \leq \sin(x) \leq x$.

Exemple 5. *Moyenne géométrique VS moyenne arithmétique*

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $x_1, ..., x_n \in \mathbb{R}_+$. On a :

$$\sqrt[n]{x_1 ... x_n} \leq \frac{x_1 + ... + x_n}{n};$$

ou autrement écrit :

$$\left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i.$$

En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\sqrt[n]{n!} \leq \frac{n+1}{2}.$$