Chapitre II

Topologie des espaces vectoriels normés

Table des matières

Partie A

Normes et espaces vectoriels normés

Dans cette partie, E désigne un espace vectoriel sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1. Définitions de base et premières propriétés

Définition 1. *Norme*

On appelle **norme** sur l'espace vectoriel, une application $N : E \to \mathbb{R}$ qui vérifie les axiomes suivants :

i) (Positivité) pour tout $x \in E$,
$$N(x) \geq 0;$$

ii) (Séparation) pour tout $x \in E$,
$$N(x) = 0 \text{ implique } x = 0_E;$$

iii) (Homogénéité) pour tous $x \in E$, $\lambda \in \mathbb{K}$,
$$N(\lambda x) = |\lambda| N(x);$$

iv) (Inégalité triangulaire) pour tous $x, y \in E$,
$$N(x+y) \leq N(x) + N(y).$$

Si N est une norme sur E, le couple (E, N) est appelé **espace vectoriel normé**.

Il est souvent d'usage de noter $\|\cdot\|$ d'un espace vectoriel normé et donc $\|x\|$ la norme d'un vecteur x de E.

Proposition 1.

Soit N une norme sur E. Alors $N(0_E) = 0$ et que pour tout $x \in E$, $N(-x) = N(x)$.

Exemple 1.

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ et $< \cdot, \cdot >$ un produit scalaire sur E et $\|\cdot\|$ sa norme associée (i.e. $x \mapsto \|x\| = \sqrt{< x, x >}$). La terminologie utilisée est bien justifiée : en effet, $\|\cdot\|$ est bien une norme sur E au sens de la définition 1.

Proposition 2. *Seconde Inégalité triangulaire*

Soit N une norme sur E. Pour tous $x, y \in E$ on a :

$$|N(x) - N(y)| \leq N(x-y) \leq N(x) + N(y).$$

Définition 2. *Vecteur unitaire*

Soit N une norme sur E.
On dit qu'un vecteur x de E est **unitaire** si $N(x) = 1$.

Notation 1. *Boule et sphère unité*

Soit N une norme sur E. On note :
- $S(0_E, 1) = \{x \in E \mid N(x) = 1\}$; on appelle cet ensemble **sphère unité** de E ;
- $B_f(0_E, 1) = \{x \in E \mid N(x) \leq 1\}$; on appelle cet ensemble **boule unité fermée** de E ;
- $B(0_E, 1) = \{x \in E \mid N(x) < 1\}$; on appelle cet ensemble **boule unité ouverte** de E ;

Définition 3.

Soit N une norme sur E et $x \in E$ un vecteur non nul.
On appelle **vecteur unitaire associé à** x le vecteur unitaire $\frac{1}{N(x)}x$.

Remarque 1.

Pour $x \neq 0_E$, le vecteur unitaire associé à x est clairement colinéaire à x.
Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, il n'existe que deux vecteurs unitaires colinéaires à x :

$$\frac{1}{N(x)}x \text{ et } -\frac{1}{N(x)}x.$$

Dans le cas où $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, il en a une infinité : ce sont exactement les

$$\frac{e^{it}}{N(x)}x \text{ pour } t \in [0, 2\pi[.$$

2. Premiers exemples d'espaces vectoriels normés

a. Quelques normes sur $\mathbb{K}^n$

Sur l'espace vectoriel $\mathbb{K}^n$ il existe de nombreuses normes qui permettent de le munir d'une structure d'espace vectoriel normé. En voici quelques unes parmi les plus fréquemment "rencontrées" :

Définition 4. *Normes usuelles sur $\mathbb{K}^n$*

Soit $x = (x_1, ..., x_n)$ un vecteur de $\mathbb{K}^n$. On définit :

— La **norme un**, notée $\|\cdot\|_1$:

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i| = |x_1| + ... + |x_n|.$$

— La **norme deux**, notée $\|\cdot\|_2$:

$$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2} = \sqrt{|x_1|^2 + ... + |x_n|^2}.$$

— La **norme infinie**, notée $\|\cdot\|_\infty$:

$$\|x\|_\infty = \max_{1\leq i\leq n} (|x_i|) = \max(|x_1|, ..., |x_n|).$$

On remarque immédiatement que dans le cas $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, la norme deux correspond à la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^n$.

Proposition 3.

Les normes un, deux, et infini sont bien des normes sur $\mathbb{R}^n$.

Remarque 2.

Soit $p \geq 1$ un réel. On peut généraliser l'idée des normes un et deux : on montrera en exercice que

$$x = (x_1, ..., x_n) \mapsto \|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

est une norme sur $\mathbb{K}^n$. On l'appelle la **norme** p.

b. Exemples de normes sur des espaces de suites

On considère l'espace vectoriel $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ des suites indexées par $\mathbb{N}$ et à valeurs dans $\mathbb{K}$. On définit les normes suivantes sur certains de ses sous-espaces :

Définition 5.

— On note $\ell^1(\mathbb{N}, \mathbb{K})$ l'ensemble des suites $u = (u_n)$ de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ telles que la série $\sum u_n$ est absolument convergente. On définit la **norme un**, notée $\|\cdot\|_1$ sur $\ell^1(\mathbb{N}, \mathbb{K})$ par :

$$\text{Pour } u = (u_n) \in \ell^1(\mathbb{N}, \mathbb{K}), \quad \|u\|_1 = \sum_{n=0}^{\infty} |u_n|.$$

— On note $\ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{K})$ l'ensemble des suites $u = (u_n)$ de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ telles que la série $\sum u_n^2$ est absolument convergente. On définit la **norme deux**, notée $\|\cdot\|_2$ sur $\ell^2(\mathbb{N},\mathbb{K})$ par :

$$\text{Pour } u=(u_n)\in\ell^2(\mathbb{N},\mathbb{K}),\quad \|u\|_2=\sqrt{\sum_{n=0}^{\infty}|u_n|^2}.$$

— On note $\ell^\infty(\mathbb{N},\mathbb{K})$ l'ensemble des suites *bornée* de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. On définit la **norme infinie**, notée $\|\cdot\|_\infty$ sur $\ell^\infty(\mathbb{N},\mathbb{K})$ par :

$$\text{Pour } u=(u_n)\in\ell^\infty(\mathbb{N},\mathbb{K}),\quad \|u\|_\infty=\sup_{n\in\mathbb{N}}(|u_n|).$$

Proposition 4.

Les couples $(\ell^1(\mathbb{N},\mathbb{K}),\|\cdot\|_1)$, $(\ell^2(\mathbb{N},\mathbb{K}),\|\cdot\|_2)$, $(\ell^\infty(\mathbb{N},\mathbb{K}),\|\cdot\|_\infty)$ sont des espaces vectoriels normés.

c. Exemples de normes sur des espaces de fonctions

Soit X un ensemble non vide. On considère l'ensemble $\mathcal{F}_b(X,\mathbb{K})$ des fonctions bornées de X à valeurs dans $\mathbb{K}$. C'est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$: $\mathcal{F}_b(X,\mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(X,\mathbb{K})$, l'ensemble de toutes les fonctions de X dans $\mathbb{K}$.

Voici la norme naturelle sur $\mathcal{F}_b(X,\mathbb{K})$:

Définition 6. *Norme sur l'espace des fonctions bornées*

Soit $f\in\mathcal{F}_b(X,\mathbb{K})$. On appelle **norme infinie** de f, et on note $\|\cdot\|_\infty$ la quantité :

$$\|f\|_\infty=\sup_{x\in X}|f(x)|.$$

Proposition 5.

La norme infinie de $\mathcal{F}_b(X,\mathbb{K})$ est bien définie et c'est une norme sur $\mathcal{F}_b(X,\mathbb{K})$.

Soit $a,b\in\mathbb{R}$ avec $a<b$. On considère l'espace vectoriel $C([a,b],\mathbb{K})$ des fonctions continues de $[a,b]$ dans $\mathbb{K}$. On définit trois normes usuelles sur cet espace par analogie du cas de $\mathbb{K}^n$:

Définition 7. *Normes sur $C([a,b],\mathbb{K})$*

Soit $f\in C([a,b],\mathbb{K})$. On définit les **normes de la convergence** : **en moyenne**, **en moyenne quadratique** et **uniforme** respectivement notées $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$, par :

$$\|f\|_1=\int_a^b|f(t)|dt,\quad \|f\|_2=\sqrt{\int_a^b|f(t)|^2dt}$$

$$\text{et } \|f\|_\infty = \sup_{t\in[a,b]} |f(t)|.$$

Proposition 6.

Les normes de la convergence en moyenne, en moyenne quadratique et uniforme sont bien des normes sur $C([a,b],\mathbb{K})$.

Remarque 3.

On verra dans la suite du chapitre, que la norme infinie sur $C([a,b],\mathbb{K})$ peut-être obtenue comme norme *induite* par la norme infinie sur $\mathcal{F}_b([a,b],\mathbb{K})$ via l'inclusion $C([a,b],\mathbb{K}) \subset \mathcal{F}_b([a,b],\mathbb{K})$.

3. Distance associée à une norme

La norme d'un espace vectoriel normé E est une manière d'associer une *longueur* à chaque vecteur de E. Du point de vue *affine* i.e. si on se place dans un espace affine dirigé par E, une manière de mesurer la distance entre deux points M et N devient alors clair : il suffit de regarder la longueur - la norme - du vecteur $\overrightarrow{MN}$ qui "sépare" ces deux points.

Définition 8. *Distance associée à une norme*

Soit N une norme sur E. On appelle **distance associée à** N l'application $d : E \times E \to \mathbb{R}_+$ définie par :

$$\text{pour } (x,y) \in E^2, \quad d(x,y) = N(y-x).$$

Proposition 7. *Seconde inégalité triangulaire*

Soit N une norme sur E. Alors la distance d associée à N vérifie, pour tous $x, y, z \in E$:

$$|d(x,y) - d(y,z)| \leq d(x,z) \leq (d(x,y) + d(y,z))\,.$$

Définition 9. *Distance à une partie*

Soit N une norme sur E, d sa distance associée, A une partie non vide de E et $x \in E$. On appelle **distance de** x **à** A et on note $d(x,A)$, la quantité :

$$d(x,A) = \inf\{d(x,a) \mid a \in A\}.$$

On peut également définir la distance entre deux parties de E :

Définition 10. *Distance entre deux parties*

Soit N une norme sur E, d sa distance associée et A, B des parties non vides de E. On appelle **distance de** A **à** B et on note $d(A, B)$, la quantité :

$$d(A, B) = \inf\{d(a, b) \mid (a, b) \in A \times B\}.$$

4. Boules et sphères associées à une distance

On généralise dans ce paragraphe la notion de cercle/sphère, disque/boule bien connue dans les espaces euclidiens de dimension 2 et 3 qui nous apparaissent naturels. Comme pour la sphère et la boule unité d'une norme, la forme des sphères et boules que nous allons considérer peut être tout-à-fait contre-intuitive vis-a-vis de la terminologie et de nos habitudes.

Notation 2. *Boule et sphère unité*

Soit N une norme sur E, d sa norme associée, $x_0 \in E$ et r un réel strictement positif. On note :

— $S(x_0, r) = \{x \in E \mid d(x, x_0) = r\}$; on appelle cet ensemble **sphère** de centre x_0 et de rayon r ;

— $B_f(x_0, r) = \{x \in E \mid d(x, x_0) \leq r\}$; on appelle cet ensemble **boule fermée** de centre x_0 et de rayon r ;

— $B(x_0, r) = \{x \in E \mid d(x, x_0) < r\}$; on appelle cet ensemble **boule ouverte** de centre x_0 et de rayon r ;

Remarque 4.

On peut remarquer que $S(x_0, r) = B_f(x_0, r) \setminus B(x_0, r)$.

Proposition 8.

Soit N une norme sur E. Toute boule (ouverte ou fermée) est une partie convexe de E.

5. Parties bornées, applications bornées

a. Parties bornées

Définition 11. *Partie bornée*

Soit N une norme sur E et A une partie de E. On dit que A est **bornée** s'il existe un réel positif R tel que :

$$\text{pour tout } x \in A, \quad N(x) \leq R.$$

Proposition 9.

Soit N une norme sur E, d sa distance associée et A une partie de E. Les propositions suivantes sont équivalentes :

i) A est bornée ;

ii) il existe $R \geq 0$ tel que $A \subset B_f(0_E, R)$;

iii) il existe $x_0 \in E$ et $R \geq 0$ tels que $A \subset B_f(x_0, R)$;

iv) il existe $R \geq 0$ tel que pour tous $x, y \in A$, $d(x, y) \leq R$.

Définition 12.

Soit N une norme sur E et A une partie non vide et bornée de E. On appelle **diamètre** de A et on note $\operatorname{diam}(A)$, le réel positif :

$$\operatorname{diam}(A) = \sup_{(x,y)\in A^2} d(x, y).$$

Remarque 5.

Si une partie A d'un espace vectoriel normé E n'est pas bornée, alors, par convention, on dira que $\operatorname{diam}(A) = +\infty$.

b. Applications et suites bornées

Définition 13. *Application bornée*

Soit N une norme sur E et X un ensemble non vide. Une fonction $f : X \to E$ est dite **bornée** si $f(X)$ est une partie bornée de E i.e. s'il existe $R \in \mathbb{R}_+$ tel que pour tout $x \in X$:

$$N(f(x)) \leq R.$$

Remarque 6. *Suite bornée*

Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans E peut être vue comme l'application $f : \mathbb{N} \to E$ telle que $f(n) = u_n$ pour $n \in \mathbb{N}$. La définition précédente s'applique donc également aux suites i.e. une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée s'il existe $R \in \mathbb{R}_+$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$N(u_n) \leq R.$$

On peut généraliser la structure de l'espace vectoriel normé $\mathcal{F}_b(X, \mathbb{K})$ vu dans la paragraphe 2 au cas des fonctions à valeurs dans E bornées :

Définition-Proposition 14.

Soit N une norme sur E et X un ensemble non vide. L'ensemble $\mathcal{F}_b(X,E)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ et l'application $\|\cdot\|_\infty$ appelée **norme infinie** définie par :

$$\text{pour } f \in \mathcal{F}_b(X,E), \quad \|f\|_\infty = \sup_{x\in X} N(f(x)),$$

est une norme sur $\mathcal{F}_b(X,E)$.

6. Constructions d'espaces vectoriels normés

a. Opérations sur les normes

Proposition 10.

Soit N, N' deux normes sur E et $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$. Alors :
- $N+N' : x \mapsto N(x)+N'(x)$ est une norme sur E.
- $\alpha N : x \mapsto \alpha N(x)$ est une norme sur E.

b. Composition par une fonction injective

Proposition 11.

Soit F un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$, N une norme sur E et u une application linéaire *injective* de F dans E. Alors l'application $N' : F \to \mathbb{R}_+$ définie par :

$$N' = N \circ u : x \mapsto N(u(x)),$$

est une norme sur F.

c. Application : normes sur $\mathbb{K}[X]$

On considère l'espace vectoriel $\mathbb{K}[X]$ des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ à une indéterminée. Grâce à la proposition précédente, on va munir $\mathbb{K}[X]$ de plusieurs structures d'espace vectoriel normé à partir des exemples que l'on a étudiés dans le paragraphe 2).

Exemple 2.

Soit P un polynôme de $\mathbb{K}[X]$. On note $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ la suite de ses coefficients (on rappelle que cette suite est stationnaire en 0) et on notera $t \mapsto P(t)$ la fonction polynomiale associée à P.

Normes provenant des espaces de suites : Les applications $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$ sont des normes sur $\mathbb{K}[X]$ où :

$$\|P\|_1 = \sum_{i=1}^{+\infty} |a_i| \quad \|P\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{+\infty} |a_i|^2} \text{ et } \|P\|_\infty = \sup_{i\in\mathbb{N}} |a_i|.$$

Normes provenant des espaces de fonctions : Soit $a < b$ des réels. Les applications $\mathcal{N}_1$, $\mathcal{N}_2$ et $\mathcal{N}_\infty$ sont des normes sur $\mathbb{K}[X]$ où :

$$\mathcal{N}_1(P) = \int_a^b |P(t)|dt \quad \mathcal{N}_2(P) = \sqrt{\int_a^b |P(t)|^2 dt} \text{ et } \mathcal{N}_\infty(P) = \sup_{t\in[a,b]} |P(t)|.$$